Rafael ANDRADE R.

TEORIA DE LAS ECUACIONES

La dificultad de encontrar las raíces de una ecuación de un grado cualquiera, nos ha impulsado á que investiguemos un método más ó menos fácil y práctico que, sin necesidad de conocer el Algebra Superior, permita, valiéndonos de pequeñas nociones de Geometría Analítica, encontrar las mencionadas raíces de una manera suficientemente aproximada y que evite sobre todo, los grandes cálculos que hay que verificar con este objeto.

Las raíces de las ecuaciones del segundo grado, bicuadradas, recíprocas, binomias, trinomias y algunas otras, se determinan por métodos conocidos en las matemáticas elementales; pero si se toma, por ejemplo, una ecuación completa del tercer grado, ya no es posible resolverla por los medios anteriores, sino que es necesario valerse del Algebra Superior y verificar, como se ha dicho, grandes cálculos y que todavía en muchas ocasiones, se procede por tanteos y el resultado, por consiguiente, no es sino aproximado. Por esta circunstancia, nos vamos á valer de un método completamente sencillo, que da el valor de las raíces con una aproximación más ó menos suficiente. Indicaremos también de paso, los métodos que se conocen, para que veamos la diferencia que existe entre éstos y el que ahora nos permitimos presentar á los lectores.

En efecto, vamos á estudiar desde la ecuación del primer grado y llegaremos hasta la del quinto. Nuestro método no será aplicable, es claro, para las ecuaciones de primero y segundo grado por ser muy simple su resolución por los métodos conocidos; pero sin embargo lo indicaremos para que veamos su procedimiento. Del tercer grado, para adelante, estamos seguros de que este nuestro método, sera talvez preferido.

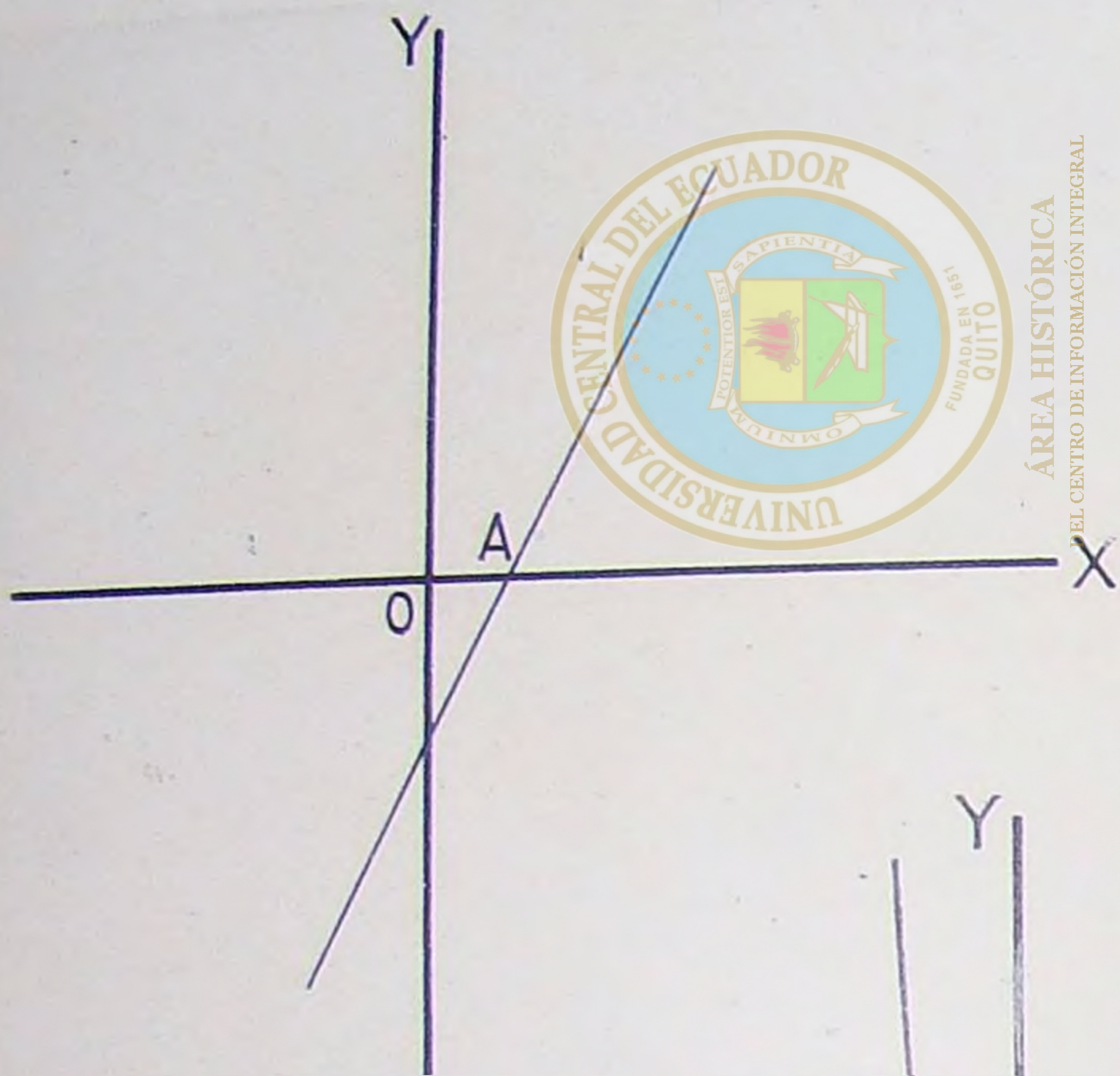

Fig. I

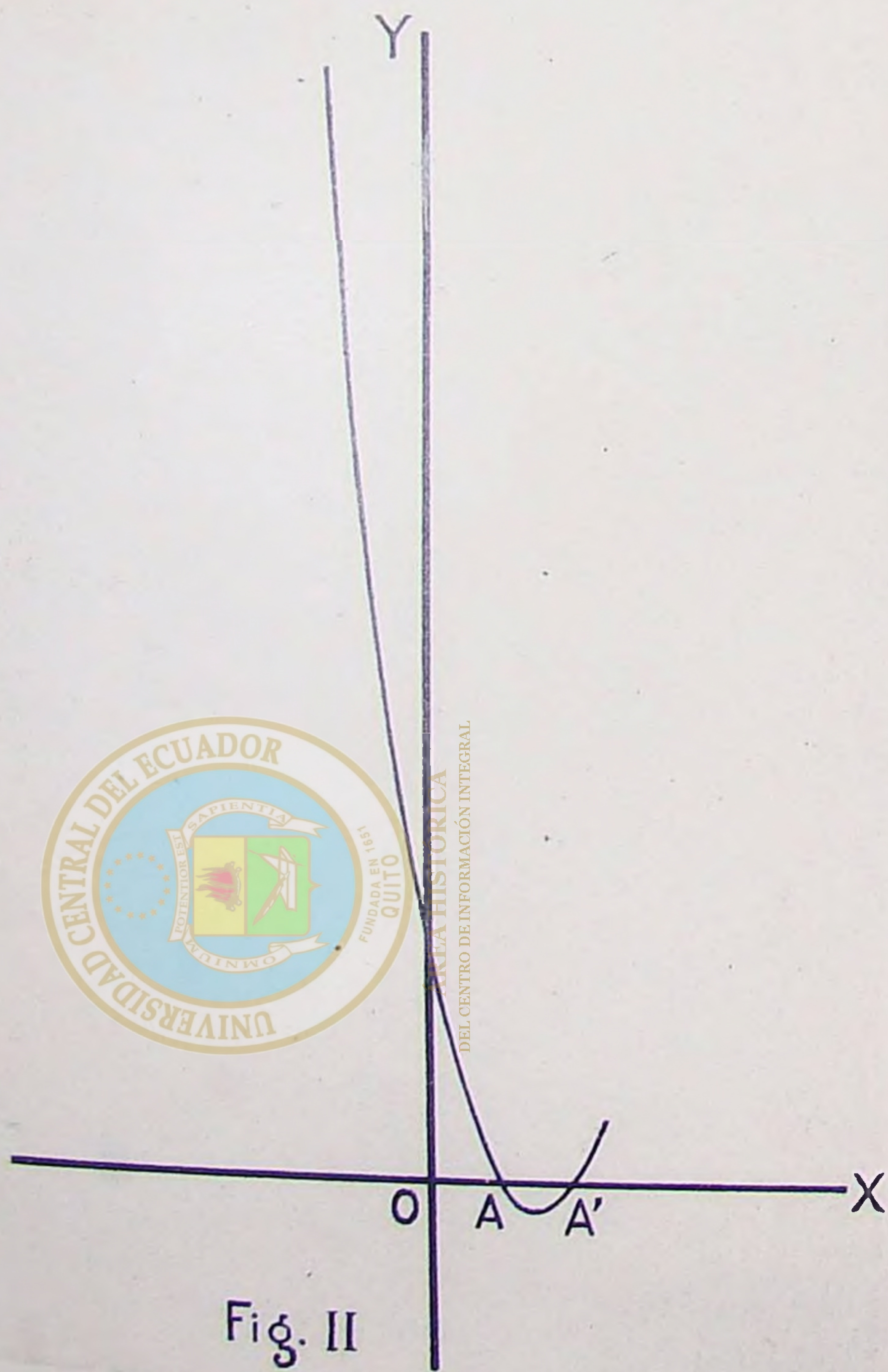

Fig. II

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Sea la ecuación del primer grado:

$$2x-4=f\ (y)=0 \qquad (1)$$

y se trata de encontrar la raíz de la ecuación

$$2x-4=0 \qquad (2)$$

que se verifica por $x=+2$

En la ecuación (1) hagamos sucesivamente:

$x=-3$, tendremos	$y=-6-4=-10$
$x=-2$	$y=-4-4=-8$
$x=-1$	$y=-2-4=-6$
$x=0$	$y=-4 \quad =-4$
$x=1$	$y=2-4 \quad =-2$
$x=2$	$y=4-4 \quad = 0$

Y vemos que por $x=2$, $y=0$; luego 2 es la raíz de la ecuación propuesta.

Tomemos un sistema de ejes rectangulares [fig. 1] y construyamos la recta correspondiente á la ecuación propuesta; resulta que la intersección de la recta con el eje X dará la raíz de la ecuación, porque este punto está comprendido entre un valor positivo y otro negativo, por consiguiente hay una raíz. Además en este punto tenemos $y=0$.

Pero en el punto A, tenemos $y=0$, $x=2$, por consiguiente, la gráfica resuelve también la cuestión.

Sea la ecuación del segundo grado

$$f=(y)=x^2-6x+8=0 \qquad [1]$$

Sabemos ya encontrar las raíces de la ecuación

$$x^2-6x+8=0$$

que son:

$$x'=\frac{6+\sqrt{36-4\times 8}}{2}=4$$

$$x''=\frac{6-\sqrt{36-4\times 8}}{2}=2$$

Por nuestro método, vamos á resolver la ecuación [1].

Tomemos asimismo, un sistema de ejes rectangulares [fig. 2] y hagamos sucesivamente:

$x=-3$ tendremos	$y=9+18+8=35$
$x=-2$	$y=4+12+8=24$
$x=-1$	$y=1+6+8=15$
$x=0$	$y=8$
$x=1$	$y=1-6+8=3$
$x=2$	$y=4-12+8=0$
$x=3$	$y=9-18+8=-1$
$x=4$	$y=16-24+8=0$

y vemos así que las dos raíces son 2 y 4.

La curva construida con estos datos, será la de la fig. 2.

Vemos entonces que los puntos A y A′ dan

$$x=2$$

$$x=4$$

y queda resuelta la cuestión.

Esto supuesto, entremos en la materia que nos hemos propuesto.

Sea la ecuación completa del tercer grado:

$$x^3+x^2-3x+1=f[y]=0$$

Tendremos para	$x=-3,$	$y=-27+9+9+1=-8$
	$x=-2$	$y=-8+4+6+1=3$
	$x=-1$	$y=-1+1+3+1=4$
	$x=0$	$y=1$
	$x=1$	$y=1+1-3+1=0$
	$x=2$	$y=8+4-6+1=7$
	$x=3$	$y=27+9-9+1=28$

Construyendo la curva dada por estos puntos [fig. 3] aplicaremos nuestro método.

Como se ve una de las raíces es 1. Para encontrar otra, unamos los puntos P_1 y P_2; tendremos:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR QUITO ÁREA HISTÓRICA DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

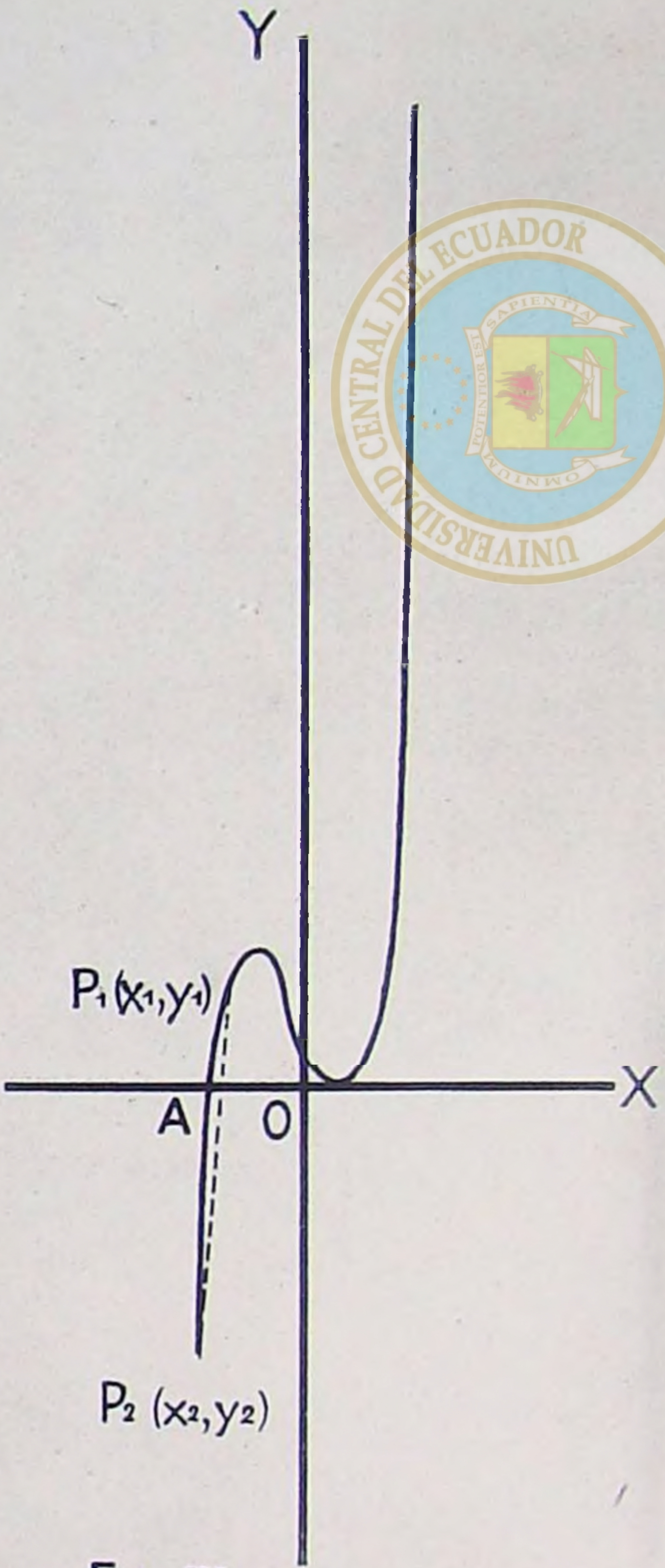

Fig. III

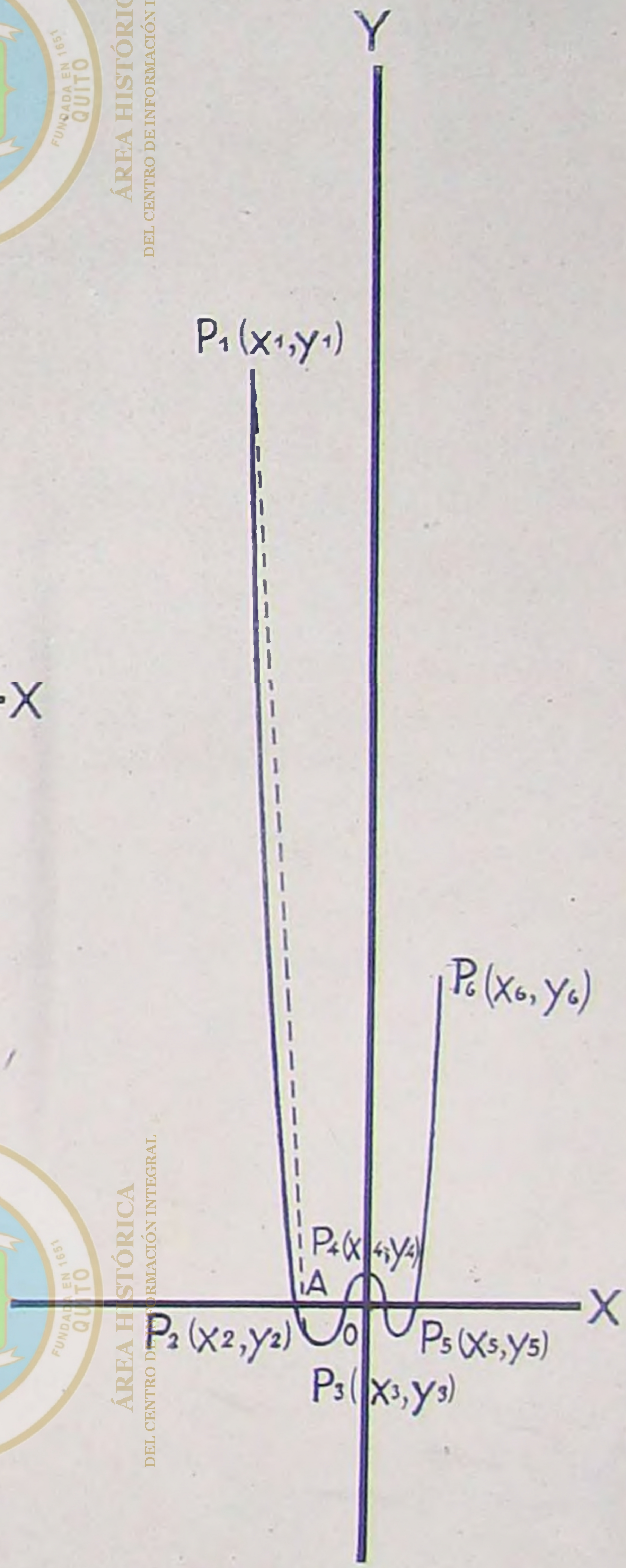

Fig. IV

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
ÁREA HISTÓRICA DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL
UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
ÁREA HISTÓRICA DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

y como $x_1 = -2$, $y_1 = 3$; $x_2 = -3$, $y_2 = -8$, tendremos:

$$\frac{x+2}{-3+2} = \frac{y-3}{-8-3}$$

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{-11}$$

$$-11x-22 = -y+3$$

$$-11x-22-3 = -y$$

Pero como al punto A $y=0$, resulta

$$-11x-25 = 0$$

$$x = \frac{-25}{11} = -2{,}27$$

que es el valor aproximado de la otra raíz.

Para conocer el valor del error, sustituyamos $x = -2{,}27$ en la ecuación $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ y tendremos:

$$[-2{,}27]^3 + [-2{,}27]^2 - 3(-2{,}27) + 1 = -11{,}697 + 5{,}1529 + 6{,}81 + 1 = 1{,}266$$

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Se ve así que el valor de x no hace al primer miembro igual á o.

Pongamos $x = -2{,}26$; resultará:

$$[-2{,}26]^3 + [-2{,}26]^2 - 3(-2{,}26) + 1 = 1{,}3445$$

que es ya un valor más fuerte. Haciendo entonces $x = -2{,}275$, resulta:

$$[-2{,}275]^3 + [-2{,}275]^2 - 3(-2{,}275) + 1 = 1{,}2261$$

Finalmente, haciendo $x = -2{,}2795$ se nota que el error es solamente en la tercera cifra decimal.

Así vemos que el ya dicho error no es sino más ó menos del 1 por ciento; es decir, que se tiene una aproximación del 99 por ciento.

Sea la ecuación del cuarto grado

$$x^4+x^3-3x^2-x+1=0=f(y) \qquad (1)$$

Para $x=-3$,	tendremos	$y=31$
$x=-2$		$y=-1$
$x=-1$		$y=-1$
$x=0$		$y=1$
$x=1$		$y=-1$
$x=2$		$y=11$
$x=3$		$y=79$

y haciendo una construcción análoga á las anteriores, resultará la curva que nos permitirá encontrar el valor de las raíces.

Tomemos en efecto, los puntos P_1 y P_2 [fig. 4]; la ecuación de la recta que pasa por estos, se da como se sabe por

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (\alpha)$$

y sustituyendo valores, tenemos:

$$\frac{x+3}{-2+3}=\frac{y-31}{-1-31}$$

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y-31}{-32}$$

$$-32x-96=y-31$$

$$-32x-96+31=y$$

pero como se tiene en A, y =0, resulta:

$$-32x-65=0$$

$$x=-\frac{65}{32}=-2,03$$

Para encontrar el valor de la siguiente raíz, tomemos los puntos P_3 y P_4; tendremos según la fórmula [α]

$$\frac{x-x_3}{x_4-x_3}=\frac{y-y_3}{y_4-y_3}$$

y sustituyendo valores, resulta:

$$\frac{x+1}{0+1}=\frac{y+1}{1+1}$$

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}$$

$$2x+2=y+1$$

$$2x+1=y$$

De donde $$2x+1=0$$

$$x=-\tfrac{1}{2}=-0{,}5$$

Para la siguiente raíz, tomemos los puntos P_4 y P_5; tendremos:

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
AREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$\frac{x-x_4}{x_5-x_4}=\frac{y-y_4}{y_5-y_4}$$

$$\frac{x-0}{-1-0}=\frac{y-1}{-1-1}$$

$$-2x=-y+1$$

$$-2x-1=-y$$

De donde $$2x+1=y$$

$$2x+1=0$$

$$x=-0{,}5$$

Para la última raíz, se tomarán los puntos P_5 y P_6; se tendrá

$$\frac{x-x_5}{x_6-x_5}=\frac{y-y_5}{y_6-y_5}$$

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y+1}{11+1}$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{12}$$

$$12x-12=y+1$$

$$12x-13=y$$

$$12x-13=0$$

$$x=\frac{13}{12}=1,083$$

Para encontrar la aproximación que tenemos en este método, sustituyamos uno de los valores de x en la fórmula (1)

Tomemos $x=-\frac{1}{2}$; resultará así

$$(-\tfrac{1}{2})^4+(-\tfrac{1}{2})^3-3(-\tfrac{1}{2})^2-(-\tfrac{1}{2})+1=\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{8}-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{2}$$

y resulta un valor diferente de cero. Ensayemos con $x=-0,55$

Tendremos $0,09-0,16-0,90+0,55+1=0,58$, que es un valor que ya se aproxima á cero.

Se podrá tomar $x=-0,56$; entonces tendríamos que el error sería de 1,12 por ciento; de modo que por este método tenemos una aproximación de un 98 por ciento más ó menos. Con este dato se podrá ya corregir los valores de las otras raíces encontradas.

Sea la ecuación del quinto grado:

$$x^5+x^4-x^3-3x^2+x+1=0=f(y)$$

Tendremos para	$x=-3$,	$y=-164$
	$x=-2$	$y=-21$
	$x=-1$	$y=-4$
	$x=0$	$y=1$
	$x=1$	$y=0$
	$x=2$	$y=31$
	$x=3$	$y=264$

La curva correspondiente será la de la figura 5 á la cual podemos aplicar los métodos ya indicados ó hechos en las otras ecuaciones estudiadas.

Tomando la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 tenemos:

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR FUNDADA EN 1651 QUITO ÁREA HISTÓRICA DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

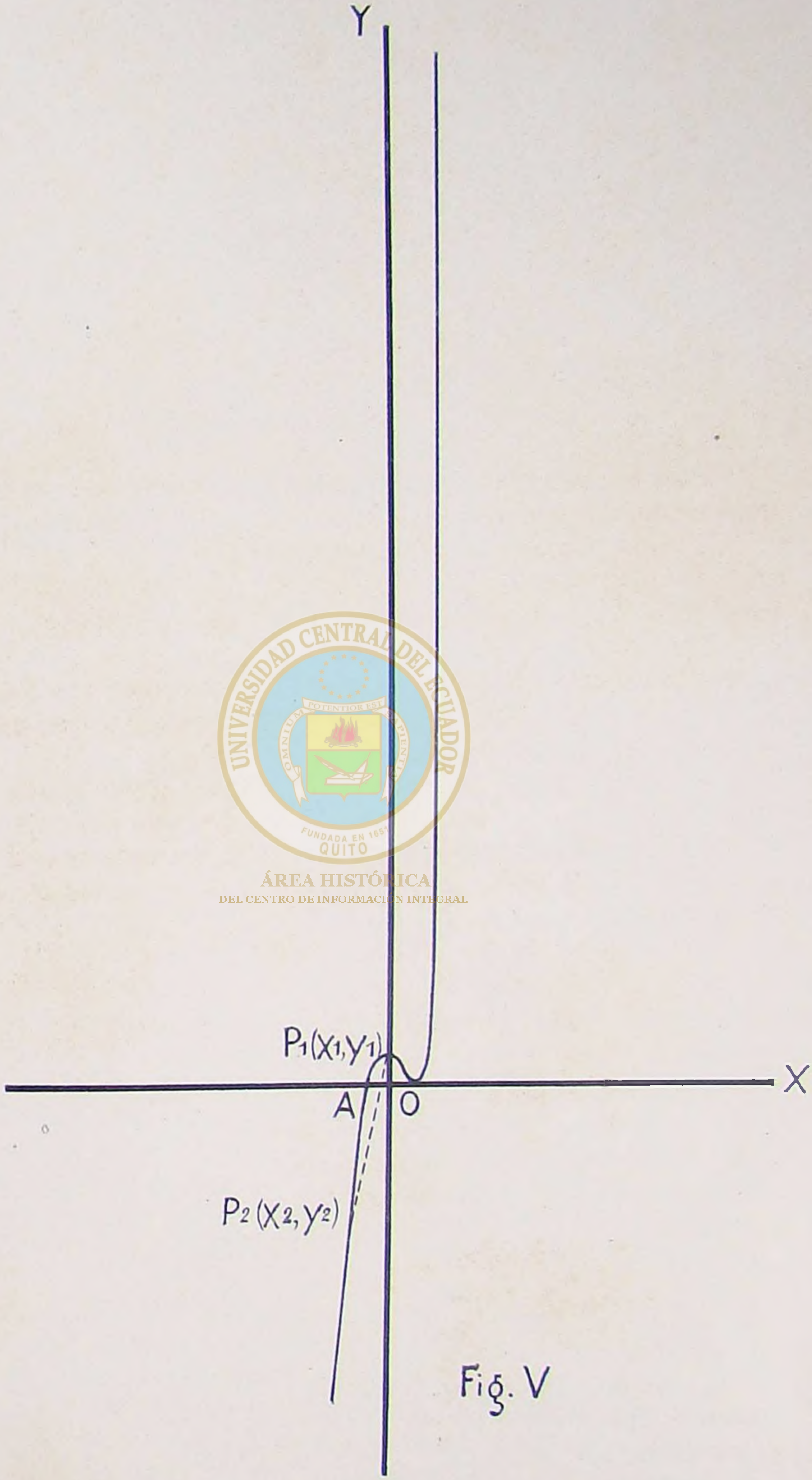

Fig. V

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
QUITO
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-0}{-1-0}=\frac{y-1}{-4-1}$$

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{-5}$$

$$-5x=-y+1$$

$$-5x-1=-y$$

$$5x+1=0$$

$$5x=-1$$

$$x=-{}^1/_5=-0,2$$

Este valor en la ecuación (1) da:

$$(-0,2)^5+(-0,2)^4-(-0,2)^3-3(-0,2)^2+(-0,2)+1$$

$$=-0,00032+0,0016+0,008-0,12-0,2+1=0,68928$$

que es un valor que ya se aproxima mucho de cero. Haríamos iguales ensayos que los anteriores y hallaríamos que podemos tener una aproximación de más ó menos el 98 por ciento.

Dada una ecuación se puede conocer directamente el número de raíces positivas y negativas que tiene, fijándose solamente en los signos de sus términos. Si los signos de éstos cambian, hay *variaciones* ó sea raíces positivas; y si los signos de los términos no cambian hay *permanencias* ó sea raíces negativas.

Hemos hecho nuestra resolución de las ecuaciones de un modo analítico; pero si se desean encontrar las raíces á primera vista, no hay sino que apreciar á la escala el valor de la parte del eje X que va desde el origen de las coordenadas al punto donde la curva corta al eje de las absisas. Los segmentos situados en la derecha del eje Y son positivos, los situados á la izquierda, negativos. Cuando la curva no corta al eje X, las raíces son imaginarias.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR FUNDADA EN 1651 QUITO ÁREA HISTÓRICA DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Hasta aquí hemos presentado á la ligera, el método que nos hemos propuesto exponer.

Como dijimos también que, para una útil comparación, presentaríamos además los métodos conocidos, vamos á exponerlos brevemente tomándolos de algún tratado de Algebra Superior.

Tratemos en primer lugar de las investigaciones de las raíces comensurables y sea la ecuación

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0$$

Si la raíz de esta ecuación es a se tendría

$$a^4+Pa^3+Qa^2+Ra+S=0$$

De donde $S=-Ra-Qa^2-Pa^3-a^4$

y así $\frac{S}{a}=-R-Qa-Pa^2-a^3$

entonces $\frac{S}{a}$ debe ser un número entero.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1651
QUITO
ÁREA HISTÓRICA

De la última ecuación sacamos $\frac{S}{a}+R=-Qa-Pa^2-a^3$

y si se hace $\frac{S}{a}+R=R^1$ resulta

$$R^1=-Qa-Pa^2-a^3$$

$$\frac{R^1}{a}=-Q-Pa-a^2$$

y también $\frac{R^1}{a}$ debe ser un número entero.

Si lo mismo se hace $\frac{R^1}{a}+Q=Q^1$ tendremos

$$\frac{Q^1}{a}=-P-a$$

y $\frac{Q^1}{a}$ es también número entero.

Haciendo cosa igual, resultará por fin

$$\frac{P^1}{a} = -1$$

El número *a* será la raíz de la ecuación siempre que satisfaga á las condiciones:

$$\frac{S}{a} + R = R^1$$

$$\frac{R^1}{a} + Q = Q^1$$

$$\frac{Q^1}{a} + P = P^1$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$\frac{P^1}{a} + 1 = 0$$

Luego es necesario: 1º Dividir el último término por el divisor *a* y añadir al cuociente el coeficiente del término afectado de x; 2º Dividir esta suma por el divisor *a* y añadir al cuociente el coeficiente del término afectado de x^2; 3º Dividir esta suma por el divisor *a* y añadir al cuociente el coeficiente del término afectado de x^3; 4º Dividir esta suma por el divisor *a* y añadir al cuociente la unidad ó el coeficiente del término afectado de x^4; el resultado deberá ser igual á cero si *a* es la raíz.

Como aplicación se toma el ejemplo siguiente:

$$x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 20x + 15 = 0$$

El cuadro de cálculos es así;

$$
\begin{array}{l}
+15+5+3+1-1-3-5-15 \\
+1+3+5+15-15-5-3-1 \\
-19-17-15-5-35-25-23-21 \\
\quad -5-5+35 \\
\quad +18+18+58 \\
\quad +6+18-58 \\
\quad -3+9-67 \\
\quad -1+9+69 \\
\qquad 0
\end{array}
$$

Todos los divisores del último término 15, están colocados por orden de magnitud, ya con el signo +, ya con el —, en una misma línea que es la de los divisores de *a*.

La segunda línea contiene los cuocientes de 15 dividido sucesivamente por todos estos divisores (es la línea de las cantidades $\frac{S}{a}$).

La tercera línea ha sido formada añadiendo á la anterior el coeficiente —20 que multiplica á x (es la línea de las cantidades $R^1 = \frac{S}{a} + R$).

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

La cuarta línea contiene los cuocientes de cada número de la precedente por el divisor que le corresponde (es la línea de las cantidades $\frac{R^1}{a}$). Se ha despreciado todos los números no enteros.

La quinta línea resulta de los números escritos en la precedente, añadidos á 23 que multiplica á x^2 (es la línea de las cantidades Q^1).

La sexta contiene los cuocientes de los números de la anterior por el divisor que les corresponde (encierra las cantidades $\frac{Q^1}{a}$).

La séptima comprende las sumas de los números de la precedente y del coeficiente —9 que multiplica á x^3 (son las cantidades $\frac{Q^1}{a} + P$).

La octava se obtiene dividiendo cada uno de los números de la precedente por el divisor correspondiente [es la línea de $\left.\frac{P}{a}\right)$ y como no encuentra -1 sino en la línea marcada con $+3$, se concluye que la ecuación propuesta no tiene sino una raíz comensurable á saber $+3$, de suerte que la ecuación es divisible por $x+3$.

Hemos presentado este método tal como se encuentra en los libros.

El cálculo como se ve, no es difícil; pero está sujeto á largas operaciones.

Del mismo modo, nos permitimos presentar otro método, conocido con el nombre de "Método de Newton".

Si λ es un valor de x que vuelve positivo el polinomio $f(x)$ y todas sus derivadas, λ es límite superior de las raíces positivas de $f[x]=0$.

En efecto, designando por h una cantidad positiva, por la fórmula de Taylor tenemos:

$$f[\lambda+h]=f[\lambda]+hf'[\lambda]+\frac{h^2}{1,2}f''[\lambda]+\ldots\ldots$$

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Si ahora $f[\lambda]$, $f'[\lambda]$, etc., son positivas como también h, $f[\lambda+h]$, lo será también, cualquiera que sea la cantidad positiva h; esto que aquí vale á decir que es un límite superior de las raíces positivas.

Generalizando el teorema precedente tenemos:

Sea $f[x]=0$ una ecuación cualquiera en la cual $f[x]$ queda finita y continúa lo mismo que sus n primeras derivadas cualquiera que sea x. Si por un valor λ de x se tiene:

$$f[\lambda]>0,\ f'[\lambda]>0,\ldots\ldots$$

y si además, para todo valor de x superior á λ se tiene $f^n(\lambda>0$, λ será un límite superior de las raíces de $f(x)=0$.

En efecto cualquiera que sea el número positivo h se tiene:

$$f[\lambda+h]=f[h]+hf'[\lambda]+\ldots\ldots+\frac{h^n}{1,2\ldots n}f^n[\lambda+\theta h]$$

siendo θ comprendido entre 0 y 1, se ve que $f[\lambda+h]$ es una suma de términos esencialmente positivos y las hipótesis admitidas son satisfechas; pues para todo valor de x superior á λ, $f(x)$ es positiva y por consiguiente no puede ser nula.

Para aplicar el método de Newton, se principia por formar las derivadas sucesivas del primer miembro de la ecuación $f(x)=0$, dividiéndolas por los factores numéricos

$$1,\ \frac{1}{1,2},\ \frac{1}{1,2,3},\ \ldots\ldots,$$

después se cambia el signo de $f(x)$ si hay lugar, de tal suerte que $f[+\infty]$ sea positiva.

Consideramos la ecuación

$$f[x]=x^6-3x^4+8x^2-7x-8=0$$

se tiene

$$f'(x)=6x^5-12x^3+16x-7$$

$$\tfrac{1}{2}f''(x)=15x^4-18x^2+8$$

$$\tfrac{1}{6}f'''(x)=20x^3-12x=4x(5x^2-3)$$

Esta última derivada es positiva por $x>\frac{3}{\sqrt{5}}$; entonces $\frac{1}{2}f''[x]$ es positiva por este valor de x; pero $f[x]$ es negativa por $x=\frac{2}{\sqrt{5}}$; todo número mayor que $\frac{2}{\sqrt{5}}$ volviendo $f[x]$ positiva, será entonces un límite superior de las raíces de esta ecuación, $x=\sqrt{3}$ por ejemplo.

La marcha que se sigue es la siguiente:

1º Se busca los límites más allá de los cuales no existen raíces, á fin de disminuir el intervalo en el cual se deben buscar las raíces.

2º Se aplican entonces los métodos de aproximación que daremos á conocer brevemente.

Se llama límite superior ó inferior de las raíces de una ecuación un número superior ó inferior de la mayor ó menor de las raíces de esta ecuación.

Conociendo el límite superior de las raíces, se encuentra el inferior. En efecto, el límite inferior de las raíces positivas de $f[x]=0$ es igual al límite superior de las raíces positivas de

$f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ que se puede reducir á la forma $f[x]=0$, f designando un polinomio entero en x, quitando los denominadores. Lo mismo el límite superior de las raíces negativas de $f[x]=0$ es

igual al límite inferior de las raíces positivas de $\left(-\frac{1}{x}\right)=0$. En

fin, el límite inferior de las raíces negativas no es otra cosa que el límite superior de las raíces positivas de $f[-x]=0$.

Un límite superior de las raíces de una ecuación $f(x)=0$ es un número que, sustituyendo en lugar de x, hace adquirir al primer miembro un signo que no pierde más para valores superiores á x.

FORMULA DE APROXIMACIÓN DE NEWTON Y DE FOURIER. —Si después de haber separado convenientemente las raíces de una ecuación algebraica $f(x)=0$, se ha sustituído en lugar de x dos números a y $b > a$ poco diferentes uno de otro, dando á $f(x)$ valores de signos contrarios y comprendiendo por consiguiente una raíz, pero una sola. Se llegará siempre á este resultado después de un número más ó menos considerable de tanteos. Sea $(a+h)$ la raíz buscada, se tendrá por la fórmula de Taylor.

$$f(a+h), \text{ es decir, } 0=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h)$$

de donde
$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{h^2}{2}\,\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)} \qquad (\alpha)$$

Partiendo al contraaio del valor aproximado *b* designando por $b-k$ la raíz exacta y por λ un número comprendido, como θ entre 0 y 1 se encuentra de la misma manera.

$$0=f(b)-kf'(b)+\frac{k^2}{2}f''(b-\lambda k)$$

y así

$$k=\frac{f(b)}{f'(b)}+\frac{k^2}{2}\,\frac{f''(b-\lambda k)}{f'(b)} \qquad (\beta)$$

Si las cantidades k y h son pequeñas, se pueden despreciar sus cuadrados y tomar $h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$

$$k = \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Tal es el método que nos ha dado Newton para las aproximaciones de las raíces de las ecuaciones.

Hay además otros métodos y aplicaciones de éstos, que sería muy largo enumerar; tendríamos necesidad de formar un libro completo sobre esta materia, lo cual no nos hemos propuesto en este insignificante trabajo.

No hemos hecho otra cosa que presentar nuestro método tal como lo hemos concebido y además indicar los medios más conocidos para encontrar las raíces de una ecuación.

Siempre que deseemos encontrar aproximadamente el valor de las raíces de una ecuación dada, nos parece que este método gráfico analítico será más cómodo, ya por lo fácil que es como también porque sólo exige aproximaciones enteramente elementales.

Una vez construída la curva que representa la ecuación, podríamos también encontrar con facilidad el máximun ó el mínimun de la ecuación, sin tener necesidad de recurrir á las derivadas que ya es materia de Algebra Superior; porque, como se sabe, solo en cortos casos, se puede encontrar el valor máximo ó mínimo de una ecuación por los métodos de Algebra Elemental.

En fin puede ser que se hagan aplicaciones numerosas; pero suspendemos aquí nuestro trabajo por habernos extendido un poco más del objeto que nos hemos propuesto.

RAFAEL ANDRADE R.

Profesor de Matemáticas.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1651
QUITO
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL