EXPRESIONES INDETERMINADAS

POR

RAFAEL ANDRADE RODRIGUEZ

Nos proponemos desde hoy, para cooperar de algún modo a la publicación de los Anales de la Universidad Central, escribir ciertos capítulos importantes, tanto de las matemáticas elementales, como de las superiores, o también capítulos que se den la mano, añadiendo algo que nos sea posible de nuestra parte, con el objeto de que después se forme un curso medianamente completo, a fin de que los estudiantes tengan más facilidades para el estudio, que es lo que siempre nos proponemos, cuantas veces publicamos alguna insignificancia.

Hemos escogido, por lo pronto, esta sección de las matemáticas, ya por su importancia y aplicaciones, ya también porque al final queremos añadir algo de nuevo y que trata de los *nuevos signos de indeterminación*, que no nos parece exacto y hay inmenso campo para discutirse.

Con estos antecedentes, procedemos de la manera siguiente:

Sea **m** una cantidad finita y determinada y consideremos las expresiones que vienen.

1ª $\frac{o}{m}$; *decimos que su valor es cero.*

En efecto, si

$$\frac{o}{m}=o$$

cualquiera que sea el valor de **m** tendremos

$$o \times m = o$$

2ª $\frac{m}{o}=\infty$ (infinito).

Porque en una fracción, mientras más pequeño sea el denominador, el cociente se hace tanto mayor y si el denominador llega a ser infinitamente pequeño, el cociente llegará a ser infinitamente grande; si el denominador es cero, el cociente será el infinito.

Así por ejemplo

$$\frac{4}{1}=4$$

$$\frac{4}{0,1}=40$$

$$\frac{4}{0,01}=400$$

$$\frac{4}{0,001}=4000$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{4}{0,0000000001}=40000000000$$

y se ve que, mientras el denominador es más pequeño, el cociente es cada vez más grande.

3.ª $$\frac{m}{\infty}=0$$

Al contrario del caso anterior, cuando el denominador crece, el cociente disminuye y si el denominador llega a ser el infinito, el cociente llegará a ser cero. Tomando el ejemplo semejante al caso precedente, tendremos

$$\frac{4}{1}=4$$

$$\frac{4}{10}=0,4$$

$$\frac{0}{100}=0,04$$

$$\frac{4}{1000}=0,004$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{4}{10000000000}=0,0000000004$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

4.ª $$\frac{\infty}{m}=\infty$$

porque tendremos

$$\infty \times m = \infty$$

Es evidente que, cualquiera cantidad que se multiplique por el infinito, dará el infinito.

5.ª
$$\frac{\infty}{0} = \infty \,; \quad \frac{0}{\infty} = 0$$

En virtud de las dobles razones de los casos anteriores,

Con estas ligeras apuntaciones, hablemos de las expresiones indeterminadas, que nos hemos propuesto.

La fórmula fundamental es $\frac{0}{0}$, que se llama *un símbolo de indeterminación.*

Si hacemos

$$\frac{0}{0} = m$$

tendremos

$$0 \times m = 0$$

Luego, cualquiera que sea el valor de **m** multiplicado por cero, dará cero, y de este modo, habrá una infinidad de valores de **m** que responden a la cuestión; es por esta razón que $\frac{0}{0}$ representa una indeterminación.

Si tenemos por ejemplo

$$x = \frac{2y-4}{4y-8} \qquad (1)$$

y hacemos $y = 2$, resultará

$$x = \frac{0}{0} = \text{indeterminación.}$$

Pero no siempre hay indeterminación, sino que a veces existe en el numerador y denominador un factor común que vuelve la expresión $\frac{0}{0}$, por ciertos valores de las variables; si se suprime este factor, se quita la indeterminación. Así la expresión (1) podemos escribirla

$$x = \frac{2\,(y-2)}{4\,(y-2)} = \frac{2}{4}$$

En Matemáticas, decimos siempre, sin recelo alguno, *dos cantidades iguales a una tercera, son iguales en-*

tre sí; axioma que no puede asegurarse, porque si dos cantidades M, N, son iguales a una tercera Q, no se puede decir que $M=N$, si antes no nos hemos cerciorado de que Q no es igual a $\frac{0}{0}$.

Podemos proponernos ¿cuál es el verdadero valor de la fracción

$$\frac{(x-2)^2\ (x+2)}{(x-2)\ (x+3)}$$

que resulta $\frac{0}{0}$ cuando $x=2$?

Si se simplifica la fracción tendremos

$$\frac{(x-2)\ (x+1)}{(x+3)}$$

Si se hace ahora $x=2$, resulta

$$\frac{(2-2)\ (2+1)}{2+3}\frac{0}{5}=0$$

Otro símbolo de indeterminación es

$$\infty\times 0$$

Consideremos la expresión

$$x\times\frac{m}{x}$$

Cualquiera que sea el valor de x, esta expresión será constantemente igual a m. En el caso de que x crezca hasta el infinito, tendremos

$$\infty\times\frac{m}{\infty}=\infty\times 0=m$$

Como si se considerase la expresión

$$x^3\times\frac{3}{x^2}=3x$$

Si $x=\infty$, resultaría

$$\infty\times 0=3\times\infty=\infty$$

Asimismo

$$x^3\times\frac{3}{x^3}=3$$

y en el mismo caso, se obtendría

$$\infty\times\frac{3}{\infty}=\infty\times 0=3$$

También tendríamos

$$x^3 \times \frac{3}{x^4} = \frac{3}{x}$$

$$\infty \times 0 = \frac{3}{\infty} = 0$$

y de esta manera, se pueden encontrar muchísimos valores.

De esto se desprende que, *no puede decirse una cantidad cualquiera* m, *multiplicada por cero, da cero, sin haberse asegurado antes que* m *no es igual al infinito.*

Otro valor indeterminado es

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Porque cualquiera cantidad que se multiplique por el denominador que es infinito, tiene que reproducir el numerador que también es infinito. Además podemos escribir

$$\infty = \frac{m}{0}$$

luego

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{m}{0}}{\frac{m}{0}} = \frac{0}{0} = \text{indeterminación.}$$

El último de los símbolos de indeterminación que nosotros consideramos es

$$\infty - \infty$$

Porque

$$\infty - \infty = \infty\,(1-1) = \infty \times 0 = \text{indeterminación.}$$

Podemos escribir

$$\infty - \infty = \frac{m}{0} - \frac{m}{0} = \frac{m \times 0 - m \times 0}{0 \times 0} = \frac{0}{0} = \text{indeterminación.}$$

Hasta aquí, para demostrar que los signos estudiados son indeterminados, nos hemos valido de demostraciones elementales; ahora tomando los mismos signos, hagamos demostraciones superiores, valiéndonos para ésto, del Cálculo Diferencial.

Se sabe que si x es una variable y y una función, la relación entre estas dos cantidades se expresa símbolicamente

$$y = F\ (x)$$

Consideremos entonces la relación

$$\frac{F\ (x)}{f\ (x)}$$

de tal modo que

$$F\ (a) = o$$
$$f\ (a) = o$$

luego

$$\frac{F\ (x)}{f\ (x)} = \frac{o}{o}$$

cuando $x = a$, y hemos dicho que esta relación es indeterminada.

Si se da a *a* un incremento *h*, aplicando la serie de Taylor, tendremos

$$\frac{F\ (a+h)}{f\ (a+h)} = \frac{F\ (a) + \frac{h}{1} F'\ (a) + \frac{h^2}{2!}\ F''\ (a) + \ldots}{f\ (a) + \frac{h}{1} f'\ (a) + \frac{h^2}{2!}\ f''\ (a) + \ldots}$$

y como

$$F\ (a) = o;\ f\ (a) = o$$

dividiendo el numerador y el denominador del segundo miembro por *h*, resultará

$$\frac{F\ (a+h)}{f\ (a+h)} = \frac{F'\ (a) + \frac{h}{2!}\ F''\ (a) + \ldots}{f'\ (a) + \frac{h}{2!}\ f''\ (a) + \ldots}$$

Esta relación tendrá lugar cuando *h* tienda hacia cero y podemos escribirla entonces

$$\frac{F\ (a)}{f\ (a)} = \text{lím.}\ \frac{F\ (a+h)}{f\ (a+h)}$$

por consiguiente, cuando

$$\text{lím.}\ h = o$$

se tiene

$$\frac{F\ (a)}{f\ (a)} = \frac{F'\ (a)}{f'\ (a)}$$

Luego en el límite, *la relación de las dos funciones es igual a la relación de las derivadas.*

Si al mismo tiempo

$$F'(a)=o=f'(a)$$

simultaneamente; entonces en la expresión anterior se podrán dividir numerador y denominador por *h* y resultará

$$\frac{F[a+h]}{f[a+h]}=\frac{F''[a]+\frac{h}{3!}F'''[a]+\ldots}{f''[a]+\frac{h}{3!}f'''[a]+\ldots}$$

y cuando

$$\text{lím. } h=o$$

se tiene

$$\frac{F[a]}{f[a]}=\frac{F''[a]}{f''[a]}$$

y el procedimiento puede seguirse así indefinidamente.

Esta regla pertenece a L'Hopital que dice: *la relación de dos funciones que se anulan por el mismo valor de* x, *es igual a la relación de las primeras derivadas que no se anulen por el mismo valor de la variable.*

Consideremos polimonios tales como F (x) y f (x), de modo que se tenga F (a)=o. Según el Algebra Elemental sabemos que cada polimonio es divisible por

$$x-a$$

luego

$$F[x]=[x-a]\ P[x]$$
$$f[x]=[x-a]\ p[x]$$

Por consiguiente

$$\frac{F[x]}{f[x]}=\frac{[x-a]\ P[x]}{[x-a]\ p[x]}=\frac{o}{o}$$

cuando $x=a$

Pero sabemos que se levanta esta indeterminación, suprimiendo el factor común y así

$$\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{P(a)}{p(a)}$$

Ahora apliquemos la regla de L'Hopital y tendremos

$$F'(x)=P(x)+(x-a)\ P'(x)$$
$$f'(x)=p(x)+(x-a)\ p'(x)$$

Si se hace $x=a$, tendremos según la misma regla

$$\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{F'(a)}{f'(a)}=\frac{P(a)}{p(a)}$$

y se ha obtenido el mismo resultado.

Así por ejemplo, sea la expresión

$$\frac{x^2+2\,ax+a^2}{x^2-a^2}=\frac{0}{0}$$

cuando $x=-a$

Según la regla superior, tendremos

$$\text{lím.}\ \frac{x^2+2ax+a^2}{x^2-a^2}=\frac{2x+2a}{2x}$$

Si $x=-a$, resulta

$$\frac{-2a+2a}{2a}=0$$

Valiéndonos de la regla elemental, tenemos

$$\frac{x^2+2ax+a^2}{x^2-a^2}=\frac{(x+a)^2}{(x-a)\ (x+a)}=\frac{x+a}{x-a}=\frac{0}{2a}=0$$

cuando $x=-a$

Determinemos el caso en el cual

$$a=\infty$$

entonces no conviene la demostración dada. Se pone

$$F[x]=F\left(\frac{1}{z}\right)$$

haciendo $z=\frac{1}{x}$

que es simplemente un cambio de variable.

Luego si

$$\text{lím. } x=\infty$$

resultará

$$\text{lím. } z=0$$

y se aplicará la misma regla.

Sea ahora

$$\frac{F[x]}{f[x]}=\frac{\infty}{\infty}$$

cuando $x=a$. Tendremos que

$$\frac{F[x]}{f[x]}=\frac{\frac{1}{f[x]}}{\frac{1}{F[x]}}$$

que en el límite, se presenta en la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x=a$. Estamos en el caso anterior y tomaremos las derivadas; por consiguiente

$$\text{lím.}\ \frac{F[x]}{f[x]} = \text{lím.}\ \frac{-\dfrac{f'[x]}{[f(x)]^2}}{-\dfrac{F'[x]}{[F(x)]^2}} = \text{lím.}\ \frac{\left[\dfrac{F(x)}{f(x)}\right]^2}{\dfrac{F'(x)}{f'[x]}}$$

es decir

$$1 = \text{lím.}\ \frac{\dfrac{F[x]}{f[x]}}{\dfrac{F'[x]}{f'[x]}}$$

luego

$$\text{lím.}\ \frac{F[x]}{f[x]} = \text{lím.}\ \frac{F'[x]}{f'[x]}$$

y si $x = a$, resulta

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F'(a)}{f'(a)}$$

que es la misma la regla de L'Hopital.

Si tenemos

$$y = \frac{L\,x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

para $x = \infty$; tomando las derivadas, tendremos

$$\text{lím.}\ y = \frac{\dfrac{1}{x}}{1} = 0$$

cuando $x = \infty$

Sea ahora

$$F(x)\ f(x) = 0 \times \infty$$

cuando $x = a$.

Esta expresión puede ponerse en la forma

$$F(x)\ f(x) = \frac{F(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

luego

$$\text{lím.}\ F(x)\ f(x) = \text{lím.}\ \frac{F(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

que tomará la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x = a$.

Estamos en el mismo caso primero, por consiguiente

$$\text{lím.}\ F(x)\ f(x) = \frac{F'(x)}{\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}}$$

entonces

$$\text{lím. } F(x)\ f(x) \times \text{lím. } \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \text{lím. } F'(x)$$

Por consiguiente

$$\text{lím. } \frac{F(x)}{f(x)} = \text{lím. } \frac{F'(x)}{f'(x)}$$

y cuando $x = a$, resulta

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F'(a)}{f'(a)}$$

que es, como se ve, la misma regla.

El último símbolo de indeterminación $\infty - \infty$, también es fácil demostrarlo por la regla superior.

Entremos ahora, en algunos ejemplos, más o menos importantes:

1º ¿Cuál es el valor de

$$\text{lím. } \frac{\text{sen } x}{x}$$

cuando $x = 0$?

Tendremos, $\text{lím. } \dfrac{\text{sen. } x}{x} = \dfrac{0}{0}$;

tomando las derivadas, resulta

$$\text{lím. } \frac{\text{sen. } x}{x} = \text{lím. } \frac{\cos x}{1} = 1$$

2º ¿Cuál es el valor de

$$\text{lím. } \frac{\text{tg. } x}{\text{sen. } x}$$

cuando $x = 0$?

Tomando las derivadas, tendremos

$$\text{lím. } \frac{\text{tg. } x}{\text{sen. } x} = \text{lím. } \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x} = \text{lím. } \frac{1}{\cos^3 x} = 1$$

3º ¿Cuál es el valor de

$$y = x \text{ L. } x$$

cuando $x = 0$?

Este valor será

$$y = -0 \times \infty$$

Escribamos

$$y = \frac{\text{L. } x}{\frac{1}{x}}$$

entonces

$$y=\frac{\infty}{\infty}$$

Tendremos

$$\text{lím. } y=\text{lím. } \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\text{lím. }(-x)=0$$

4º ¿Cuál es el valor de

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}$$

cuando $x=a$?

Aplicando la regla, tendremos

$$\text{lím. } \frac{x^m-a^m}{x-a}=\frac{mx^{m-1}}{1}=ma^{m-1}$$

para $x=a$.

Por la regla elemental, tendríamos

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+a\,x^{m-2}+\ldots\ldots+a^{m-1}$$

Si se hace $x=a$, resulta

$$ma^{m-1}$$

5º- ¿Cuál es el valor de

$$\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\text{sen } x}$$

para $x=0$?

Apliquemos la regla, yéndonos hasta las terceras derivadas:

$$\text{lím. } \frac{e^x-e^{x-}-2x}{x-\text{sen } x}=\text{lím. } \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}$$

para $x=0$;

$$\text{lím. } \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\text{lím. } \frac{e^x-e^{-x}}{\text{sen } x}=\frac{0}{0}$$

para $x=0$.

En fin,

$$\text{lím. } \frac{e^x-e^{-x}}{\text{sen } x}=\text{lím. } \frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

para $x=0$, y así, el verdadero valor es 2.

Hemos presentado la teoría, más o menos completa de los llamados símbolos de indeterminación; ahora nos proponemos hablar de lo que precisamente nos hemos propuesto y es de aquellos signos que muchísimos autores consideran como indeterminados y que nososros vamos a procurar demostrar lo contrario. Estas expresiones dichas indeterminadas, son:

$$1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

Los autores que sostienen estos símbolos, para demostrar que son indeterminados, se valen de los logaritmos y así pruebon por ejemplo:

$$\log. 1^\infty = \infty \log. 1 = \infty \times 0$$
$$= \text{indeterminación}.$$

Pero nosotros creemos que el valor indeterminado será

$$\log. 1^\infty$$

mas no 1^∞, simplemente y para probar lo que decimos, afirmamos que la multiplicación de

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

aun cuando sea un número infinito de veces, dará siempre el número 1, sin valernos de ninguna demostración y considerando sólo la definición de la multiplicación aplicada a la definición de potencia.

Pero podemos también demostrar de otra manera: Pongamos

$$1^\infty = \text{tg. } \alpha$$

puesto que la tangente de un ángulo puede tomar todos los valores posibles. Ahora bien, se sabe que

$$\text{tg. } 45^0 = 1$$

luego

$$(\text{tg. } 45^0)^\infty = \text{tg. } \alpha$$

$$\text{tg. } 45^0 = (\text{tg. } \alpha)^{\frac{1}{\infty}} = (\text{tg. } \alpha)^0 = 1 \;;$$

pero

$$\text{tg. } \alpha = 1^\infty = (1^0)^\infty = 1^{0 \cdot \infty}$$

luego

$$1 = 1^{\infty \cdot 0}$$

y por fin

$$1^\infty = 1$$

que es lo que hemos tratado de probar.

De otra manera, también tenemos:

$$1 = \cos 360^0 + i \text{ sen } 360^0$$

que es una expresión compleja.

Ahora, por la fórmula de Moivre. se sabe que

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos n \alpha + i \operatorname{sen} n \alpha$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} 1^\infty &= (\cos 360^0 + i \operatorname{sen} 360^0)^\infty \\ &= \cos \infty \times 360^0 + i \operatorname{sen} \infty \times 360^0 \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

En cuanto al otro valor 0^0 podemos escribir

$$0^0 = (m-m)^{n-n} = \frac{(m-m)^n}{(m-m)^n} = 1$$

y así el único valor es 1.

por el último valor ∞^0, podemos hacer

$$\infty^0 = \left(\frac{1}{0}\right)^0 = \frac{1^0}{0^0} = \frac{1}{1} = 1$$

Para concluir, nos permitimos indicar que no se debe decir de un modo absoluto que, por ejemplo, 1^∞ es un valor indeterminado, ya que hemos probado lo contrario; solamente de un modo relativo, en algunos casos, puede la forma indicada adquirir otros valores diferentes de la unidad, como vamos a indicar inmediatamente.

Sea la expresión U^v, en la cual

lím. $U = 1$; lím. $V = \infty$

para un valor $x = a$.

Tenemos

$$U^v = 1^\infty$$

Pongamos

$$U^v = (1 + u - 1)^v = \left[(1 + u - 1)^{\frac{1}{u-1}} \right]^{(u-1)v}$$

Ahora, para $x = a$, $u - 1$ tiende hacia cero; $(1 + u - 1)$ tiene por límite e; puesto que se sabe

lím. $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, cuando lím. $\alpha = 0$, luego U^v tiene por límite

$$e^\beta$$

sienda β el límite de

$$(u-1)\,v$$

que alcanza a la forma

$$0 \times \infty$$

De esta manera, se podría encontrar el límite de

$$y=\left[\text{tg. } (x+45^0)\right]^{\frac{1}{\text{sen } x}}$$

para $x=0$, límite que es

$$y=e^2$$

Además podríamos también escribir

$$1^\infty = 1^{\frac{\infty}{0}} = 1^{\frac{\frac{m}{0}}{\frac{0}{m}}} = 1^{\frac{m \cdot 0}{0 \cdot m}} = 1^{\frac{0}{0}}$$

y se ve que el exponente es una forma indeterminada.

Lo mismo podríamos decir de los dos otros símbolos de discusión que son 0^0, ∞^0.