Teoría de las Ecuaciones

Como se sabe, se llama *ecuación algébrica* con coeficientes reales, la que resulta cuando se iguala a cero un polinomio entero con coeficientes constantes.

La forma más general de una ecuación algébrica de grado *m* es

$$A_m X^m + A_{m-1} X^{m-1} + A_{m-2} X^{m-2} + \ldots\ldots + A_1 X + A_0 = O;$$

$A_m, A_{m-1}, \ldots\ A_1, A_0,$ designan coeficientes constantes.

Así por ejemplo, la ecuación

$$X^4 - 5X^3 + 4X^2 + X - 1 = 0$$

es una ecuación algébrica del 4º grado.

Si dos números α, β, se substituyen a X en una ecuación algébrica, dando resultados de signos contrarios, esta ecuación tiene, por lo menos, una raíz real comprendida entre α y β.

En efecto, cuando x varía de una manera continua desde $x = \alpha$ hasta $x = \beta$, el primer miembro de la ecuación, variará de la misma manera, pasando de un valor positivo a un negativo y viceversa, es decir cambiando de signo y encontrando el valor cero.

Si se considera un sistema de ejes rectangulares, al pasar de un valor positivo a un negativo, la curva corta al eje de abcisas; por consiguiente, hay una raíz, desde luego que

$$Y = o$$

en la ecuación

$$Y = F\ (x)$$

que representa la curva correspondiente a la ecuación propuesta.

D'Alembert ha establecido este postulado:

Toda ecuación algébrica, tiene por lo menos, una raíz.

Algunos autores han considerado este postulado como teorema y han presentado, por lo mismo, demostraciones exactas, pero largas y cansadas. Es claro que, como en todo postulado, las demostraciones resultan difíciles, desde luego que se trata de demostrar una cosa evidente. Nosotros consideraremos esta propiedad, como un postulado y no un teorema, desde luego que, de las mismas definiciones de ecuación y de raíz, se desprende la claridad y evidencia de dicho enunciado.

Esto supuesto, consideremos el propio teorema de D'Allembert que dice

Una ecuación algébrica de grado m, tiene un númers de raíces iguates a m.

En efecto, sea

$$f\ (x) = o$$

una ecuación de grado *m*.

Como toda ecuación tiene por lo menos una raíz, se puede escribir

$$f\ (x) = (x - a)\ P_1\ (x)$$

siendo *a* la raíz.

Ahora $P_1\ (x)$ es del grado $m - 1$, y por la misma razón

$$P_1\ (x) = (x - b)\ P_2\ (x)$$
$$P_2\ (x) = (x - c)\ P_3\ (x)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P_{m-1}\ (x) = (x - l)\ P_m\ (x)$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots (x - l)\, P_m(x)$$

Las raíces pueden ser, en parte reales y en parte, imaginarias. Se puede también presentar una raíz con repetición; entonces se dice que la raíz es *múltiple* de la ecuación.

Si a se presenta un número de veces igual a α, se dice que α es una raíz de la ecuación con *con orden de multiplicidad* α.

En este caso

$$f(x) = 0$$

será divisible por

$$(x - a)(x - a)(x - a) \ldots$$

o sea por

$$(x - a)^{\alpha}$$

Así, si hay una ecuación de orden m con raíces reales y además:

a con orden de multiplicidad α
b con orden de multiplicidad β
c con orden de multiplicidad γ
. . . .
l con orden de multiplicidad λ

tendremos

$$f(x) = K (x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} (x - c)^{\gamma} \ldots (x - l)^{\lambda}.$$

siendo K un coeficiente constante y con la condición

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = m$$

Cuando en la ecuación algébrica, se encuentran algunas raíces imaginarias, se establece el teorema siguiente:

Si

$$f(x) = 0$$

admite la raiz imaginaria

$$a + b\,i$$

la ecuación admitirá también como raíz, la cantidad conjugada

$$a - b\,i$$

Consideremos f (x) como del grado *m* y escribamos

$$f(x) = \Sigma A_m x^m$$

Si $a+bi$ es raíz de $f(x) = 0$, debemos tener

$$\Sigma A_m (a+bi)^m = 0$$

Ahora si

$$a = \rho \cos w$$
$$b = \rho \operatorname{sen} w$$

tendremos

$$\Sigma A_m \rho^m (\cos m\,w + i \operatorname{sen} m\,w) = 0$$

Haciendo el cálculo, se separan las partes reales de las imaginarias y se tiene

$$\Sigma A_m \rho^m \cos m\,w = 0 \qquad (1)$$
$$\text{i} \qquad \Sigma A_m \rho^m \operatorname{sen} m\,w = 0 \qquad (2)$$

Si se reemplaza x por $a - bi$, se escribirá

$$a = \rho' \cos w'$$
$$-b = \rho' \operatorname{sen} w'$$

y se tendrá siempre

$$\Sigma A_m \rho^m [\cos(-mw) + i \operatorname{sen}(-mw)]$$
$$= \Sigma A_m \rho^m (\cos mw - i \operatorname{sen} mw)$$

porque se ha cambiado el signo del argumento.

Asimismo, separando la parte real de la imaginaria, se tiene

$$\Sigma A_m x^m = \Sigma A_m [\rho^m \cos mw - i \rho^m \operatorname{sen} mw]$$

Pero hemos demostrado que (1) y (2) son iguales a cero, luego $a - bi$ es también raíz de la ecuación..

Si una ecuación admite la raíz $\alpha+\beta i$ con orden de multiplicidad p, admitirá $\alpha-\beta i$ con el mismo orden.

Sea la ecuación

$$f(x) = 0$$

del grado m.

Por hipótesis f (x) es divisible por

$$[x - (\alpha + \beta i)]^p$$

Según la propiedad anterior, f (x) es también divisible por la cantidad conjugada

$$x - (\alpha - \beta i)$$

correspondiente a la raíz imaginaria conjugada

$$\alpha + \beta i$$

Por lo tanto, f (x) es divisible por el producto

$$(x - \alpha + \beta i)(x - \alpha - \beta i)$$

es decir por la cantidad real

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2$$

Así el cociente de f (x), real, por esta cantidad real, será también real. Designemos por $f_1(x)$ este cociente y tendremos

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha+\beta i)(x-\alpha-\beta i)}$$

Pero por la dicha hipótesis f (x) era divisible por

$$(x - \alpha - \beta i)^p$$

por consiguiente, $f_1(x)$ será divisible por

$$(x - \alpha - \beta i)^{p-1}$$

y así en adelante.

Una ecuación f(x) de grado m, puede descomponerse en un producto de factores en x del primero y segundo grado.

Sea la ecuación

$$f(x) = 0$$

con las raíces

a con orden de multiplicidad α
b " " " " β
c " " " " γ
- -

siendo *a*, *b*, *c*, reales.

Sean las raíces imaginarias:

$M + Ni$; $M - Ni$ con multiplicidad π
$P + Qi$, $P - Qi$ con multiplicidad ρ

Debemos tener tantos factores como el número *m* que corresponde al grado; es decir

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\pi+\pi+\rho+\rho+\ldots = m$$

Según lo visto, tenemos

$$f(x) = \sum_{0}^{M} A_m x^m \equiv A_m (x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} \ldots$$

$$[x-(M+Ni)]^{\pi}[x-(M-Ni)]^{\pi} \ldots$$

En el último miembro, resultará un polinomio de grado *m*; si se comparan los coeficientes de *x*, se ve que en el miembro dicho el coeficiente sería 1. Para la identificación se necesita que se multiplique por A_m. Además, en el segundo miembro, los factores del segundo grado se obtienen haciendo la multiplicación de las raíces imaginarias.

Luego f (x) se ha descompuesto en factores del primero y segundo grado y así se escribe siempre

$$A_m\, x^m + A_{m-1}\, x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0$$

$$= A_m (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} \ldots (x^2+px+q)^{\pi} (x^2+rx+s)^{\rho} \ldots$$

Entremos a estudiar ahora la relación que existe entre los coeficientes y las raíces de una ecuación algébrica. Como ya se tiene

$$f(x) = A_m (x-a)(x-b)(x-c) \ldots\ldots (x-l)$$

según la teoría de las combinaciones

$$(x+a)(x+b)(x+c) \ldots (x+l) = x^m + x^{m-1}\Sigma a + x^{m-2}\Sigma ab$$

$$+ x^{m-3}\Sigma abc + \ldots + abc \ldots l$$

resultará entonces que

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

puede escribirse

$$A_0 (x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-l) = 0$$

Por consiguiente

$$\frac{A_1}{A_0} = -(a+b+c+\ldots+l) = -\Sigma a$$

$$\frac{A_2}{A_0} = ab + ac + ad + \ldots = \Sigma ab$$

$$\frac{A_3}{A_0} = -(abc + abd + \ldots .) = -\Sigma\, abc$$

....

$$\frac{A_m}{A_0} = \pm\, abc \ldots . l$$

Así por ejemplo, si se tiene la ecuación del tercer grado

$$3x^3 - 15x^2 + 2x - 45 = 0$$

sus tres raíces *a*, *b*, *c*, satisfacen a las relaciones

$$a+b+c = \frac{15}{2};\ ab+ac+bc = \frac{9}{3};\ abc = \frac{45}{3}$$

Teorema de Rolle.—*Dos raíces reales consecutivas a, b, de una ecuación*

$$f(x) = 0$$

comprenden, por lo menos, una raíz real de la ecuación derivada

$$f'(x) = 0$$

Si se supone que x varía desde a hasta b, la función f (x) parte de cero para llegar al mismo cero y como esta función es continua, empieza por aumentar para disminuir en seguida o inversamente. Entonces f ′ (x) cambia de signo y tiene necesariamente que pasar por cero, es decir, se anula para un valor de x intermedio entre a y b.

Así por ejemplo, sea la ecuación

$$x^2 - 6x + 8 = 0 = f(x)$$

cuyas raíces reales son a = 2, b = 4

Se tiene

$$f'(x) = 0 = 2x - 6$$

y se ve que

$$x = 3$$

que es un valor intermedio entre 2 y 4.

Con estos antecedentes, vamos a separar las raíces reales de una ecuación algébrica.

La función f (x) pudiendo sufrir entre a y b alternativas de incremento y de disminución, resulta que la derivada puede anularse muchas veces en el intervalo; se encuentran entonces muchas raíces de la ecuación derivada comprendidas entre dos raíces consecutivas de la ecuación propuesta.

Luego, dos raíces consecutivas a', b', de la ecuación derivada pueden no comprender ninguna raíz de la ecuación propuesta; pero dichas raíces no comprenden jamás más de una raíz. En efecto, si en el intervalo $a'b'$ se encontraban muchas raíees de la ecuación propuesta, tomando dos consecutivas a, b de estas raíces, se tendría en la ecuación $f(x) = 0$, dos raíces consecutivas que no comprenden ninguna raíz de la ecuación derivada, lo que es inadmisible.

Resulta de ésto que, si se sabe encontrar las raíces de la ecuación derivada, se podrá saber el número de raíces reales de la ecuación propuesta.

Designemos por a', b', c' . . . . l', las raíces reales de la ecuación derivada ordenadas según su magnitud; reemplacemos sucesivamente x en $f(x) = 0$, por

$$-\infty, a', b', \ldots, l', +\infty$$

Si los resultados de dos substituciones consecutivas son de signos contrarios, hay en el intervalo correspondiente una raíz de la ecuación y una sola.

Si los resultados son del mismo signo, no hay en el intervalo ninguna raíz de la misma ecuación, puesto que no puede haber más de una.

En resumen, ya se sabe que el cambio de signo es señal de la existencia de una raíz real de la ecuación $f(x)=0$. Entonces las raíces de la ecuación derivada, permiten separar las raíces reales de la eeuación propuesta.

Luego si m es el número de raíces reales de la ecuación derivada, $m+1$ será él de los intervalos y entonces la ecuación $f(x)=0$ tendrá a lo más $m+e$ raíces reales.

De ésto se deduce que, *cuando una ecuación tiene todas sus raíces reales, sucede lo mismo con la ecuación derivada correspondiente.*

Porque considerando una ecuación del grado $m+1$ cuyas $m+1$ raíces reales ordenadas en el sentido creciente, sean

$$a, b, c, \dots h, k, l$$

resulta que hay m intervalos, por existir $m+1$ raíces reales. Entre cada grupo de dos raíces, se encuentra una raíz de la ecuación derivada y una sola.

Las m raíces de la ecuación $f'(x)=0$ con así reales.

Teorema.—*Si en un polinomio se da a x, valores cada vez más grandes o valores cada vez más pequeños, este polinomio conserva el signo de su primer término o del último respectivamente.*

1º Sea el polinomio

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\dots+A_{m-1}x+A_m$$

que pŭede escribirse

$$x^m\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\dots\dots+\frac{A_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{A_m}{x}\right)$$

Si x aumenta indefinidamente, los términos que contienen x como denominador, tienden hacia cero, por consiguiente la expresión entre paréntisis se aproxima indefinidamente del límite A_0 y acaba por tomar el mismo signo que este coeficiente.

Su producto por x^m, es decir el polinomio mismo, toma entonces el signo de A_0x^m.

2º Sea el polinomio

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_nx^{m-n}$$

$$= x^{m-n}\,(A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_n)$$

Si x disminuye indefinidamente, la expresión entre paréntesis tiene por límite A_n y concluye por tomar el signo de su coeficiente. Su producto por x^{m-n} es decir el polinomio propuesto es del signo de A_nx^{m-n}.

De lo cual deducimos:

1º Una ecuación algébrica, de grado impar, con coeficientes reales tiene al menos una raíz real de signo contrario a su último término, porque el primer miembro toma los valores $+\infty$ y $-\infty$ cuando

$$x = \pm\infty \text{ y } x = \mp\infty$$

2º Una ecuación algébrica, de grado par, con coeficientes reales, cuyo último término es negativo, tiene por lo menos dos raíces reales, porque

$$f(0) \text{ y } f(+\infty$$

son de signos contrarios, lo mismo que

$$f(0) \text{ y } f(-\infty).$$

Método de Descartes.—Según este método, basta ver una ecuación algébrica, par señalar un límite superior del número de raíces positivas y negativas que dicha ecuación puede tener.

Cuando dos términos consecutivos de una ecuación son de signos contrarios, se dice que presentan una *variación* de signo; cuando tiene el mismo signo, se dice que presentan una *permanencia*.

En la ecuación

$$+x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$\text{V} \quad \text{P} \quad \text{V} \quad \text{P} \quad \text{V}$$

presenta tres variaciones y dos permanencias.

Las variaciones, lo mismo que las permanencias, cambian, cambiando x en $-x$. Efectivamente, tenemos:

$$-x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$\text{P} \quad \text{V} \quad \text{P} \quad \text{V} \quad \text{P}$$

y vemos que hay dos variaciones y dos permanencias.

Vamos a demostrar que el número de variaciones, corresponde al número de raíces positivas y con este objeto, se considera el teorema siguiente:

Una ecuación algébrica $f(x) = 0$, cuyo primer miembro es una función racional y entera en x, no puede tener más raíces positivas, sino como el númnro de variaciones de signos existen entre sus coeficientes.

La misma ecuación no puede tener más raíces negativas, sino como el número de variaciones de signos existen en los signos de sus coeficientes, cuando se cambia x en $-x$.

Así, en el ejemplo propuesto, no hay más de tres raíces positivas y dos raíces negativas.

1º *Raíces positivas.*—Propongámosnos demostrar el teorema en el sentido de que, si es admisible para una ecuación del grado $m - 1$, será verdadero para una ecuación de grado m.

Sea la ecuación

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_p x^{m-p} + A_m = 0$$

Designemos por V el número de variaciones de su primer miembro y $p_1, p_2, \ldots p_k$, las raíces positivas en número k y ordenadas según su magnitud.

Se va a probar que se tiene

$$V \geq k$$

En efecto, consideremos la derivada de la ecuación propuesta

$$f'(x) = mx^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots + (m-p)A_px^{m-p-1}$$

cuyos términos tienen el mismo signo que f (x), habiendo desaparecido el último término. Entonces esta última ecuación. tendrá el mismo número V de variaciones o un número V — 1, menor de una unidad, según que los términos A_px^{m-p}, A_m, formarán o no una variación que bien ha podido desapareeer.

Supongamos los términos A_px^{m-p}, A_m, del mismo signo.

La derivada f.′ (x) tiene entonces el mismo número de variaciones que f (x); vamos a ver que tiene también k raíces positivas, por lo menos.

Se sabe que las raíces positivas de la ecuación propuesta siendo p_1, p_2 . . . . p_k, la derivada tiene una por lo menos, entre p_1 y p_2, otra entre p_2 y p_3, etc., otra entre p_{k-1} y p_k, es decir, k — 1 raíces positivas. Además, hay otra raíz comprendida entre *o* y p_1, lo cual completa el número k Sustituyamos en el primer miembro de f′ (x) los dos números h, $p_1 - h$; por la substitución del más pequeño h, f′ (x) tomará el signo del término que contiene h con el menor exponente, es decir el signo de A_p.

Por la substitución de $p_1 - h$, p_1 siendo la raíz, f′ (x) tomará un signo contrario al de f (x). Entonces la ecuación propuesta, no teniendo ninguna raíz entre *o* y p_1, ni por consiguiente, entre *o* y $p_1 - h$, f (o) y f $(p_1 - h)$ son del mismo signo, Así f (o) $= A_m$; f $(p_1 - h)$ es del signo que A_m, por consiguiente del mismo signo que A_p; luego f′ $(p_1 - h)$ es del signo contrario al de A_p. Pues, como hemos visto, f′ (h) es del mismo signo que A_p; f′ $(p_1 - h)$ y f′ (h) son de signos diferentes y en fin la ecuación f′ (x) = o admite una raíz positiva comprendida entre h y $p_1 - h$, o lo que es lo mismo, entre o y p_1. Esta raíz unida a las $k - 1$ otras, dan k raíces positivas. Pero la ecuación $f'(x) = o$, siendo del grado $m - 1$, la regla de Descartes se aplica y entonces el número de variaciones V no puede ser menor de k y se tiene

$$V \geq k$$

Supongamos ahora que los términos $A_p\, x^{m-p}$ y A_m sean de signos contrarios; la derivada $f'(x)$ no tendrá sino $V - 1$ variaciones, puesto que A_m desaparece. Entonces hay $k - 1$ raíces positivas a saber: una comprendida entre p_1 y p_2, otra entre p_2 y p_3, etc., otra entre p_{k-1} y p_k, y como el grado es el $m - 1$, se tiene

$$V - 1 \geq k - 1$$

$$V \geq k$$

2º *Raíces negativas* —Si en la ecuación $f(x) = o$ se reemplaza x por $-x$, se obtiene una nueva ecuacion

$$f(-x) = o$$

en la cual los términos de grado par conservan su signo, mientras que los de grado impar, cambian. Las raíces de la ecuación transformada son evidentemente iguales y de signos contrarios a las de la ecuación propuesta, puesto que, si $x = \alpha$, satisface a la ecuación $f(x) = o$ y se tendrá

$$f(\alpha) = o$$

lo que puede escribirse

$$f[-(-\alpha)] = o$$

por consiguiente, $-\alpha$ es raíz de la ecuación en la cual se cambia x en $-x$.

Las raíces negativas de la ecuación propuesta, serán del mismo número de las raíces positivas de la ecuación transformada y por consiguiente, el número de variaciones de ésta es un límite superior del número de raíces negativas de aquella.

Si aplicando las reglas precedentes, se encuentra que el número de raíces positivas de una ecuación de grado *m*, no puede pasar de V y que el número de raíces negativas, no puede pasar de V y si además se tiene

$$V + V' = m$$

se concluirá evidentemente que la ecuación no tiene todas sus raíces reales, sino que habrá algunas raíces imaginarias.

Así por ejemplo, en la ecuación

$$x^8 + 5x^3 + \underbrace{2x - 1}_{V} = 0$$

no hay sino una variación, luego no habrá más de una raíz positiva. Cambiando x en $-x$ se encuentra

$$\underbrace{x^8 - 5x^3}_{V} - 2x - 1 = 0$$

y también no hay sino una variación, luego no habrá más de una raíz negativa. Entonces no hay más de dos raíces y las seis restantes, por lo menos, serán imaginarias

---

Es conveniente, al tratarse de ecuaciones numéricas, poder reconocer si la ecuación propuesta tiene raíces iguales, puesto que, cuando ésto sucede, se puede descomponer la ecuación en otras de grado menor que no admiten raíces desiguales y el problema se facilita

De una manera general, se dice que una ecuación $f(x) = 0$, admite n veces la raíz a, cuando $f(x)$ es divisible, como antes hemos dicho, por $(x - a)^n$.

En este caso, se establece la propiedad siguiente:

Para que un número a sea n veces raíz de una ecuación algébrica $f(x) = 0$, *es necesario y suficiente que, puesto en vez de x, anule el polinomio y sus n — 1 primeras derivadas.*

Reemplazando x por $a + (x - a)$. se puede escribir

$$f(x) = f[a + (x - a)]$$

Aplicando la serie de Taylor, se tiene

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\dots$$

$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\dots$$

Si a anula $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{(n-1)}(a)$,

los términos que quedan en el segundo miembro, contendrán $(x-a)^n$, de suerte que $f(x)$ es divisible por $(x-a)^n$, es decir que $f(x)$ admitirá la raíz a con orden de multiplicidad n, como ya se ha visto de otra manera.

Para demostrar que la condición es necesaria, supongamos que $f(x)$ siendo divisible por $(x-a)^n$ y $f^{(p)}(x)$ siendo la primera de las derivadas de $f(x)$ que no se anula por $x=a$, se tenga $p < n$, entonces se tendrá

$$\frac{f(x)}{(x-a)^p}=\frac{f^{(p)}(a)}{p!}+\frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}(x-a)+\dots$$

$$+\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^{m-p}$$

igualdad que resulta imposible, desde luego que la enésima derivada conteniendo por hipótesis $(x - a)^n$ como factor, y n siendo mayor que p, el primer miembro se anula cuando $x = a$ y el segundo toma el valor

$$\frac{f^{(p)}(a)}{p!}$$

que es diferente de cero. Entonces $p \geq n$ y la condición enunciada, es necesaria y suficiente.

De lo cual se desprende:

Para que un número a sea n veces raíz de una ecuación $f(x) = 0$, es necesario y suficiente que, puesto en lugar de x, anule el polinomio $f(x)$ y que sea además $n - 1$ veces raíz de la ecuación derivada

$$f'(x) = 0$$

Tenemos ya

$$f(a) = 0;\ f'(a) = 0, \ldots . f^{(n-1)}(a) = 0$$

Pues, las $n - 1$ últimas ecuaciones, expresan que a es raíz de la ecuación $f'(x) = 0$ y de sus $n - 2$ primeras derivadas y por consiguiente, que a es $n - 1$ veces raíz de la ecuación $f'(x) = 0$.

Según ésto, si se tiene

$$f(x) = (x - a)^n (x - b)^p (x - c)^q \ldots .$$

se tendrá también

$$f'(x) = (x - a)^{n-1}(x - b)^{p-1}(x - c)^{q-1} \ldots .$$

Luego el polinomio $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ admitirán los factores comunes $(x - a)^{n-1}$, $(x - b)^{p-1}$, ...

Además, no podrán admitir otros, puesto que si el factor $x - l$ aparecía a la vez en $f(x)$ y $f'(x)$, correspondería a una raíz doble de la ecuación $f(x) = 0$.

Entonces de una manera general, el máximo común divisor de $f(x)$ y $f'(x)$ es formado de todos los factores primos del primer grado que corresponden a las raíces múltiples de la ecuación $f(x) = 0$, cada factor primo ejerciendo en dicho máximo común divisor con un exponente inferior de una unidad al orden de multiplicidad de la raíz que representa.

Para reconocer si una ecuación $f(x) = 0$, tiene raíces iguales, se buscará el m. c d, de $f(x)$ y $f'(x)$. Si éste no existe, la ecuación no admitirá raíces iguales. Si existe, las raíces simples de este m. c. d. igualado a cero serán raíces dobles de la ecuación propuesta; sus raíces dobles serán triples de esta misma ecuación, etc.

La investigación del m. c. d. entre dos polinomios, se opera como para los números enteros, dividiendo el polinomio de grado más alto por el segundo polinomio, éste último por el primer residuo, el primer residuo por el segundo residuo y así en adelante.

Transformación de las ecuaciones.—Tiene por objeto deducir de una ecuación dada, otra cuyas raíces tengan con las de la primera, una relación conocida. Con este fin, consideremos los dos ejemplos siguientes:

1º *Aumentar o disminuir las raíces de una ecuación de una misma cantidad h.*

Tratemos de reducir las raíces y si x representa una raíz cualquiera de la ecuación propuesta, y la raíz correspondiente de la ecuación buscada, se tendrá

$$y = x - h$$

$$x = y + h$$

Es necesario reemplazar x por $y + h$ y si $f(x) = 0$ representa la ecuación dada, la transformada en y será

$$f(h+y)=f(h)+y\,f'(h)+\frac{y^2}{2\,!}f''(h)+\ldots.$$

$$+\,y^m\,\frac{f^{(m)}(h)}{m\,!}=0$$

Por ejemplo, la ecuación

$$2x^4-7x^3-8x^2+5x-1=0=f(x)$$

llega a ser, cuando se disminuye todas las raíces de 3,

$$2y^4+17y^3+37y^2-16y-85=0$$

2º *Multiplicar por una cantidad cualquiera h las raíces de una ecuación.*

$$f(x)=0$$

Tendremos asimismo

$$y=hx$$

$$x=\frac{y}{h}$$

Bastará pues, en la ecuación

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots.+A_m=0$$

substituir x por $\frac{y}{h}$.

Entonces

$$A_0\,\frac{y^m}{h^m}+A^1\,\frac{y^{m-1}}{h^{m-1}}+\ldots.+A_m=0;$$

$$A_0 y^m + A_1 h y^{m-1} + \dots + A_m h^m = 0.$$

Límites de las raíces.—Se llama *límite superior* de las raíces positivas o negativas, de una ecuación algébrica, todo número mayor que la mayor de las raíces y *límite inferior*, todo número menor que la más pequeña de las raíces de la ecuación algébrica. Para conocer estos límites, se conocen las reglas siguientes:

1ª *Regla de Lagrange.*—Si en una ecuación algébrica de grado m

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

el valor absoluto del mayor coeficiente negativo es N y si n es la diferencia entre el grado de la ecuación y el del primer término negativo,

$$1 + \sqrt[n]{N},$$

es un límite superior de las raíces positivas.

Sea f (x) el primer miembro de la ecuación y puesto que N es el mayor coeficiente negativo, se puede escribir

$$f(x) > x^m - N(x^{m-n} + x^{m-n-1} + \dots + x + 1)$$

Como tenemos una progresión, se escribirá la suma así

$$f(x) > x^m - N\frac{x^{m-n+1} - 1}{x - 1};$$

$$f(x) > \frac{x^m(x - 1) - Nx^{m-n+1} + N}{x - 1}$$

luego a fortiori

$$f(x) > \frac{x^m(x-1) - Nx^{m-n+1}}{x-1}$$

Ahora f (x) será positiva, si se tiene a la vez

$$x > 1; \quad x^m(x-1) - Nx^{m-n+1} > 0$$

Entonces la segunda desigualdad, se hace

$$x^{n-1}(x-1) - N > 0;$$

$$x > 1 + \sqrt[n]{N}$$

Se ve que el segundo miembro es un límite superior de las raíces positivas y si $N > 1$, $N + 1$ será con mayor razón dicho límite superior.

2ª *Regla de Newton.*—Todo número que vuelve positivo el primer miembro de una ecuación algébrica y todas sus derivadas, es un límite superior de las raíces positivas.

Sea α un número que vuelve positivo el polinomio f (x) y todas sus derivadas, h una cantidad positiva; según la serie de Taylor, se tiene:

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + \frac{h}{1\,!}f'(\alpha) + \frac{h^2}{2\,!}f''(\alpha) + \dots + \frac{h^n}{n\,!}f^{(n)}(\alpha) + \dots\dots$$

Si $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, ... son positivas, lo mismo que h, $f(\alpha + h)$ será también, cualesquiera que sea el valor de h; entonces α es un límite superior de las raíces positivas.

Aclaremos estos particulares con un ejemplo.

Sea la ecuación

$$x^5 + 7x^4 - 12x^3 - 49x^2 + 52x - 13 = 0.$$

Por la regla de Lagrange, se tiene

$$N = 49; \quad n = 2$$

luego

$$1 + \sqrt[n]{N} = 1 + \sqrt{49} = 8$$

así 8 es un límite superior de las raíces positivas.

Conforme a la regla de Newton, se tiene

$$f(x) = x^5 + 7x^4 - 12x^3 - 49x^2 + 52x - 13$$

$$f'(x) = 5x^4 + 28x^3 - 36x^2 - 98x + 52$$

$$\frac{1}{2!} f''(x) = 10x^3 + 42x^2 - 36x - 49$$

$$\frac{1}{3!} f'''(x) = 10x^2 + 28x - 12$$

$$\frac{1}{4!} f^{iv}(x) = 5x + 7$$

$$\frac{1}{5!} f^{v}(x) = 1$$

Se ve que, todo número positivo vuelve $f^{iv}(x)$ positiva; aún más el número 1 vuelve positiva $f'''(x)$; el número 2 vuelve positiva $f''(x)$ y $f(x)$; por fin, el número 3 que vuelve positiva $f(x)$ y todas sus derivadas, es un límite superior de las raíces positivas.

Para obtener un límite inferior de las raíces positivas de una ecuación se pone

$$x = \frac{1}{z}$$

y se busca un límite superior de las raíces de la ecuación transformada.

Sea por ejemplo la ecuación

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0$$

La ecuación transformada es

$$5z^3 - 17z^2 + 3z + 1 = 0$$

El número 4 siendo un límite superior de las raíces positivas de esta última ecuación, $\frac{1}{4}$ es un límite inferior de las raíces de la ecuación primera.

En cuanto a las raíces negativas, para obtener estos límites, se pone $x = -z$ y se buscan los límites de la ecuación transformada.

Se investigan también las raíces comensurables de una ecuación, de la manera siguiente:

Sea

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0$$

la ecuación propuesta.

Si la raíz de esta ecuación es a, se tendrá

$$a^4 + Pa^3 + Qa^2 + Ra + S = 0$$

de donde

$$S = -Ra - Qa^2 - Pa^3 - a^4$$

y así

$$\frac{S}{a} = -R - Qa - Pa^2 - a^3$$

y entonces $\dfrac{S}{a}$ debe ser un número entero.

De lo anterior, sacamos

$$\frac{S}{a} + R = -Qa - Pa^2 - a^3$$

Hagamos

$$\frac{S}{a} + R = R_1$$

y resulta

$$R_1 = -Qa - Pa^2 - a^3$$

$$\frac{R_1}{a} = -Q - Pa - a^2$$

y también $\dfrac{R_1}{a}$ debe ser un número entero.

Si asimismo se hace

$$\frac{R_1}{a} + Q = Q_1$$

tendremos

$$\frac{Q_1}{a} = -P - a$$

y $\dfrac{Q_1}{a}$ debe ser también número entero.

Si se sigue haciendo cosa igual, resultará por fin

$$\frac{P_1}{a} = -1$$

El número a es entonces raíz, siempre que satisfaga a las condiciones siguientes:

$$\frac{S}{a} + R = R_1$$

$$\frac{R_1}{a} + Q = Q_1$$

$$\frac{Q_1}{a} + P = P_1$$

$$\frac{P_1}{a} + 1 = 0$$

Luego es necesario: 1º Dividir el último término por el divisor a y añadir al cuociente el coeficiente del término afectado de x; 2º Dividir esta suma por el divisor a y añadir al cuociente el coeficiente del término afectado de x^2; 3º Dividir esta suma por el divisor a y añadir al cuociente el coeficiente del término afectado de x^3; 4º Dividir esta suma por a y añadir al cuociente la unidad o el coeficiente del término afectado de x^4.

El resultado deberá ser igual a cero si a es la raíz.

Como aplicación, tomemos la ecuación siguiente:

$$x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 20x + 15 = 0$$

El cuadro de cálculos, se hace así:

+15	+5	+3	+1	−1	−3	−5	−15
+1	+3	+5	+15	−15	−5	−3	−1

-19	-17	-15	-5	-35	-25	-23	-21
	-5	-5	$+35$				
	$+18$	$+18$	-58				
	$+6$	$+18$	-58				
	-3	$+9$	-67				
	-1	$+9$	$+69$				
		0					

Todos los divisores del último término 15, están colocados por orden de magnitud, ya con el signo $+$, ya con el $-$, en una misma línea que es la de los divisores de a.

La segunda línea contiene los cuocientes de 15 dividido sucesivamente por todos estos divisores. Es la línea de las cantidades $\frac{S}{a}$.

La tercera línea ha sido formada añadiendo a la anterior el coeficiente -20 que multiplica a x y es la línea de las cantidades.

$$R_1 = \frac{S}{a} + R$$

La cuarta línea contiene los cuocientes de cada número de la precedente por el divisor que le corresponde y es la línea de las cantidades $\frac{R_1}{a}$. Se han despreciado todos los números no enteros.

La quinta línea resulta de los números escritos en la precedente, añadidos a 23 que multiplica a x^2 y es la línea de las cantidades Q_1.

La sexta contiene los cuocientes de los números de la anterior por el divisor que les corresponde y encierra las cantidades $\frac{Q_1}{a}$.

La séptima comprende las sumas de los números de la precedente y del coeficiente —9 que multiplica a x^3 y son las cantidades $\frac{Q_1}{a} + P$.

La octava se obtiene dividiendo cada uno de los números de la precedente por el divisor correspondiente y es la línea de $\frac{P}{a}$ y como se encuentra —1 en la línea marcada con —3, se concluye que la ecuación propuesta no tiene sino una raíz comensurable que es —3.

Para terminar esta primera parte de la resolución de las ecuaciones algébricas, valiéndonos solamente del Algebra Elemental, vamos a resolver algunas ecuaciones numéricas.

Sea la ecuación completa del 4º grado,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

que podemos escribirla

$$x^4 + \frac{2ax^3}{2} + bx^2 + cx + d = 0$$

o también

$$x^4 + \frac{2ax^3}{2} + \frac{a^2x^2}{4} - \frac{a^2x^2}{4} + bx^2 + cx + d = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) x^2 + cx + d = 0;$$

$$\left(x^2 - \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right) x^2 - cx - d$$

Si el segundo miembro fuera cuadrado perfecto, la ecuación estaría resulta; pero como no lo es, se añade a los dos miembros la cantidad

$$2\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right) y + y^2$$

y entonces el primer miembro, queda un cuadrado perfecto y el segundo llega a ser

$$\left(\frac{a^2}{4} - b\right) x^2 - cx - d + 2\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right) y + y^2$$

$$= \frac{a^2x^2}{4} - bx^2 - cx - d + 2yx^2 + axy + y^2$$

$$= x^2\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right) + x(ay + c) + y^2 - d$$

Luego, igualando los dos miembros, se tiene

$$\left(x^2 - \frac{ax}{2}\right)^2 + 2\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right) y + y^2$$

$$= x^2\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right) + x(ay - c) + y^2 - d$$

que equivale a

$$\left[\left(x^2 - \frac{ax}{2}\right) + y\right]^2 = x^2\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right) + x(ay - c) + y^2 - d \quad (1)$$

Veamos las condiciones de y, para que el segundo miembro, sea un cuadrado perfecto.

Si en (1) hacemos por lo pronto, nulo el segundo miembro, tendremos

$$x = \frac{-(ay - c) \pm \sqrt{(ay-c)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)(y^2 - d)}}{2}$$

Entonces, para la condición buscada, se necesita que

$$(ay - c)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)(y^2 - d) = 0$$

de lo cual resulta una ecuación del tercer grado en y que es

$$8y^3 - 4by^2 + y(2ac - 8d) + 4bd + a^2d - c^2 = 0$$

y para entender mejor el asunto, aclaremos con un ejemplo.

Sea la ecuación

$$x^4 - 2x^3 - 6x + 3 = 0$$

que podemos escribirla

$$x^4 - 2x^3 + \frac{4x^2}{4} - \frac{4x^2}{4} + 3 - 6x = 0$$

de donde resulta

$$(x^2 - x)^2 = x^2 + 6x - 3$$

Designando por y una cantidad indeterminada y aplicando lo visto tenemos

$$(x^2-x)^2+2(x^2-x)y+y^2=2(x^2-x)y+y^2+x^2+6x-3 \qquad (1)$$

Ahora, el segundo miembro es

$$x^2(2y+1)+x(6-2y)+y^2-3$$

que igualado a cero, se tiene

$$x=\frac{-(6-2y)\pm\sqrt{(6-2y)^2-4(2y+1)(y^2-3)}}{2(2y+1)}$$

La cantidad subradical, siendo nula, se tiene

$$(6-2y)^2-4(2y+1)(y^2-3)=0$$

es decir

$$36-24y+4y^2-(8y+4)(y^2-3)=0$$

$$36-24y+4y^2-8y^3+24y-4y^2+12=0$$

$$8y^3-48=0$$

$$y^3=6$$

$$y=\sqrt[3]{6}$$

Entonces la ecuación (1) llega a ser

$$(x^2-x+\sqrt[3]{6})^2=2(x^2-x)\sqrt[3]{6}+(\sqrt[3]{6})^2+x^2+6x-3$$

es decir

$$(x^2-x+\sqrt[3]{6})^2=\left[x+\frac{6-2y}{2(2y+1)}\right]^2=\left[x+\frac{6-2\sqrt[3]{\ }}{2(2\sqrt[3]{6}+1)}\right]^2;$$

$$x^2 - x + \sqrt[3]{6} = x + \frac{6 - 2\sqrt[3]{6}}{4\sqrt[3]{6} + 2};$$

$$x^2 - 2x + \sqrt[3]{6} - \frac{6 - 2\sqrt[3]{6}}{4\sqrt[3]{6} + 2} = 0$$

que es una ecuación del 2º grado.

Con una ecuación completa del tercer grado

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

se puede hacer

$$x = y - \frac{a}{3}$$

y entonces la ecuación propuesta se transforma en

$$(y - \frac{a}{3})^3 + a\,(y - \frac{a}{3})^2 + 6\,(y - \frac{a}{3}) + c = 0;$$

$$y^3 - ay^2 + \frac{a^2y}{3} - \frac{a^3}{27} + y^2x - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^4}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = 0$$

$$y^3 + y\,(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b) + c - \frac{ab}{3} + \frac{a^4}{9} - \frac{a^3}{27} = 0$$

Si se llama

$$A = \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b = \frac{3b - a^2}{3}$$

$$B = c - \frac{ab}{3} + \frac{a^4}{9} - \frac{a^3}{27} = 27c + 3a^4 - a^2 - 9ab$$

se tiene

$$y^3 + Ay + B = 0$$

que es la ecuación de Cardan, sumamente conocida.

Si en la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

se diera el caso en el cual $b = \frac{a^2}{3}$, tendríamos entonces muy facilmente:

$$x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x + c = 0;$$

$$x^3 + \frac{3ax^2}{3} + \frac{3a^2x}{9} + c = 0;$$

$$x^3 + \frac{3ax^2}{3} + \frac{3a^2x}{9} + \frac{a^3}{27} = \frac{a^3}{27} - c;$$

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27} - c$$

$$x + \frac{a}{3} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{27} - c}$$

$$x = -\frac{a}{3} + \sqrt[3]{\frac{a^3}{27} - c} = \frac{-a + \sqrt[3]{a^3 - 27c}}{3}$$

Si a la ecuación

$$x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x + c = 0$$

se le añade miembro a miembro

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

para que la ecuación resultante

$$x^3 + (A + a)\,x^2 + \left(\frac{a}{3} + B\right)x + C + c = 0$$

tenga las mismas raíces que la primera, se necesitaría que

$$\frac{-a + \sqrt[3]{a^3 - 27c}}{3} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad (2)$$

y supongamos que se trate de resolver la ecuación completa del tercer grado

$$x^3 + a_1 x^2 + b_1 x + C_1 = 0$$

Hagamos

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a + A \\ b_1 &= \frac{a^2}{3} + B \\ c_1 &= C + c \end{aligned}\right| \quad (3)$$

Las incógnitas son: A, a, B, C, c y las cantidades conocidas a_1, b_1, c_1.

Resolviendo las cuatro ecuaciones de los grupos (2) y (3) con cinco incógnitas, se puede siempre dividir una ecuación del tercer grado en otras dos, de raíces comunes y que puedan resolverse fácilmente. Debiendo dar un valor arbitrario a una de las incógnitas, éste se puede escoger de manera que la ecuación (2) resulta fácil para calcularla.

Tratemos de resolver algunas ecuaciones, cuyas raíces cumplen con ciertas condiciones.

Sea de resolver la ecuación

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$$

sabiendo que una de las raíces es igual a la suma de las dos otras.

Sean α, β, γ estas raíces.

La condición indicada es

$$\alpha = \beta + \gamma \qquad (1)$$

Pero como la suma de las raíces de la ecuación es

$$-\frac{b}{a}$$

esta cantidad es igual a

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Se tiene así

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{3} \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) resulta

$$2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \frac{1}{6}$$

Como una de las raíces es $\frac{1}{6}$, el primer miembro de la ecuación es divisible por

$$x - \frac{1}{6}$$

o sea

$$6x - 1$$

y se tiene entonces

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = (6x - 1)(6x^2 - x - 1)$$

Ahora, las raíces de

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

son $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{3}$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación propues, son $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$.

Resolver la ecuación

$$2x^3 - x^2 - 7x - 3 = 0$$

sabiendo que la suma de las dos raíces es igual a la unidad

De las relaciones

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

se deduce que $-\frac{1}{2}$ es raíz de la ecuación.

Hemos visto detenidamente, que con los métodos estudiados, las resoluciones de las ecuaciones, resultan largas y algo difíciles y es mejor, como vamos a ver, limitar las raíces, por el métedo de Descartes y resolver la ecuación por los métodos de aproximación que vamos a estudiar de una manera en lo posible completa.

La ecuación del tercer grado

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

puede ser considerada como el resultado de la eliminación de *y* entre la ecuación de la parábola P. (fig. 1)

$$y = x^2$$

y la de la hipérbola H

$$xy + ay + bx + c = 0$$

Construyendo a una misma escala las dos curvas representadas por estas ecuaciones, las abcisas de sus puntos comunes M, serán las raíces de la ecuación propuesta.

Cuando es cómodo, se puede substituir la hipérbola por un círculo, para que se facilite el cálculo y asimismo, puede también resolverse una ecuación de grado mayor. Pero dejándonos de ésto, vamos a dar un método más fácil de aproximación.

Sea la ecuación completa del tercer grado

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = y = 0$$

Hagamos sucesivamente

$$x = -3;\ x = -2;\ x = -1;\ x = 0;\ x = 1;\ x = 2;\ x = 3$$

Fig. 1

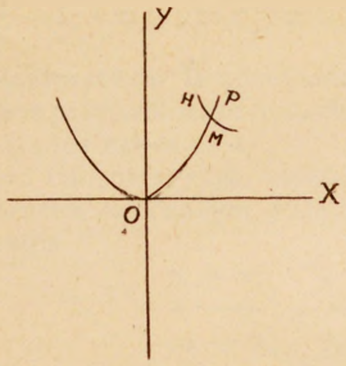


Fig. 3

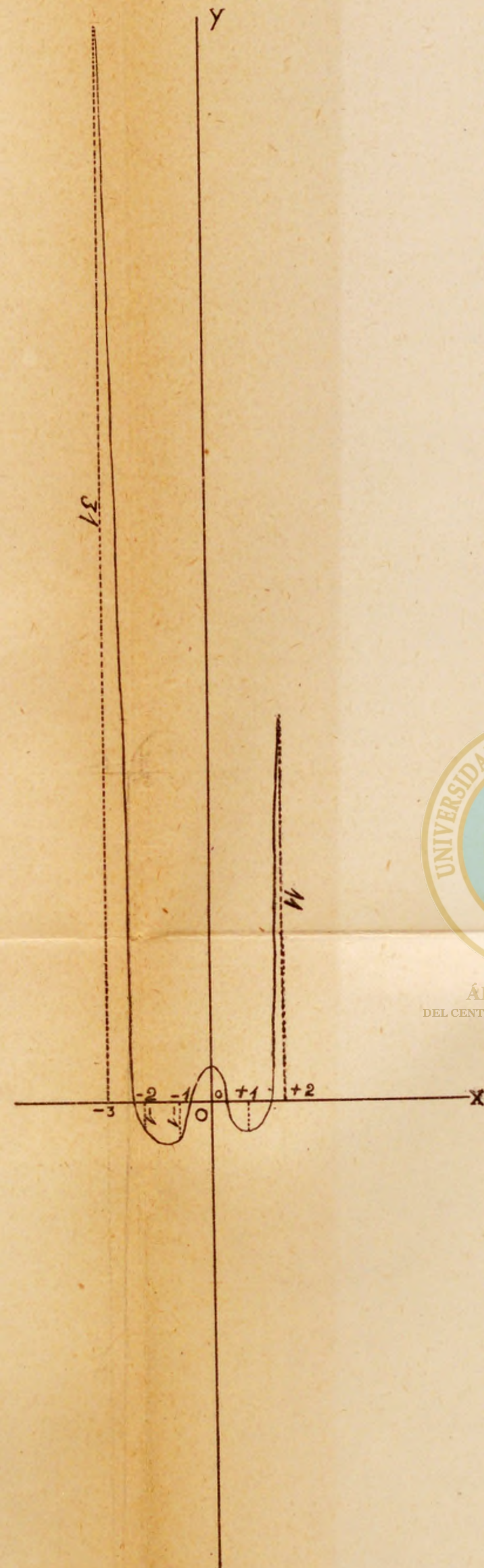


Fig. 4

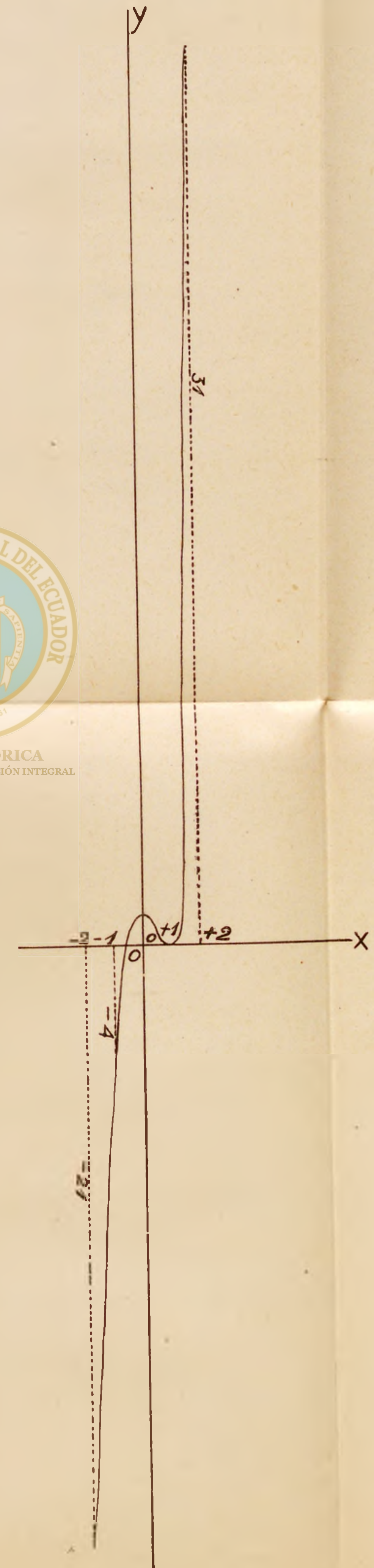


Fig. 2

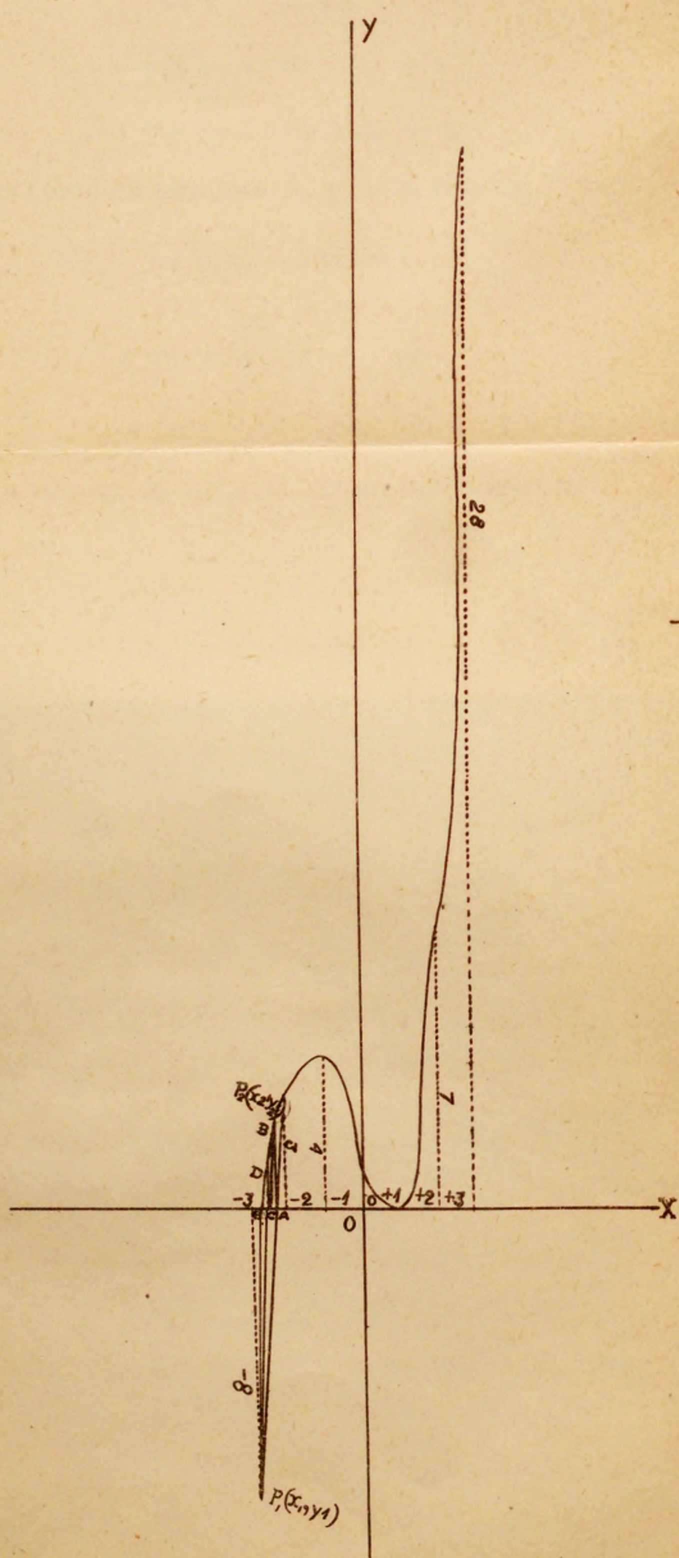
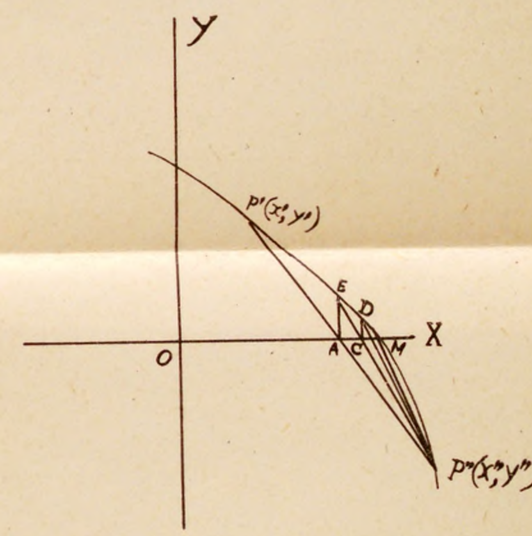


Fig. 5



tendremos entonces

$$y = -8;\ y=3;\ y=4;\ y=1;\ y=0;\ y=7;\ y=28$$

Construyendo la curva dada por estos puntos (fig. 2), vemos primeramente que, cuando $y = 0$, $x = 1$, luego una de las raíces es 1.

Para encontrar otra, unamos los puntos P_1 y P_2 y consideremos la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

y como

$$x_1 = -2;\ y_1 = 3;\ x_2 = -3;\ y_2 = -8$$

tendremos

$$\frac{x + 2}{-3 + 2} = \frac{y - 3}{-8 - 3}$$

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 3}{-11}$$

$$-11x - 22 = -y + 3$$

$$-11x - 22 - 3 = -y$$

Pero como en el punto A, $y = 0$, resulta

$$-11x - 25x = 0$$

$$x = -\frac{25}{11} = -2{,}27$$

que es el valor aproximado de la otra raíz.

Para conocer el valor del error, sustituyamos

$$x = -2{,}27$$

en la ecuación

$$x^3 + x^2 - 3y + 1 = 0$$

y tendremos que no resulta cero.

Pero si hacemos

$$x = -2{,}2795$$

se nota que el error es solamente en la tercera cifra decimal y así vemos que ya el dicho error no es sino más o menos, del 1 por ciento, es decir que se tiene una aproximación del 99 por ciento.

Sea ahora, la ecuación del cuarto grado

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0 = y$$

Para

$x = -3$	tendremos	$y = 31$
$x = -2$		$y = -1$
$x = -1$		$y = -1$
$x = 0$		$y = 1$
$x = 1$		$y = -1$
$x = 2$		$y = 11$
$x = 3$		$y = 19$

y haciendo una construcción análoga a la anterior, resultará la curva, (fig. 3), que nos permitirá encontrar el valor de las raíces.

Tomemos en efecto, los puntos P_1 y P_2; la ecuación de la recta que pasa por éstos, se da, como se sabe, por

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

y sustituyendo valores, tendremos

$$\frac{x + 3}{-2 + 3} = \frac{y - 31}{-1 - 31}$$

$$-32x - 96 + 31 = y$$

pero como se tiene en A, $y = 0$, resulta

$$-32x - 65 = 0$$

$$x = -2{,}03$$

Para encontrar el valor de la siguiente raíz, tomemos los puntos P_3 y P_4 y tendremos por lo mismo

$$\frac{x - x_3}{x_4 - x_3} = \frac{y - y_4}{y_4 - y_3}$$

y sustituyendo valores, resulta

$$\frac{x + 1}{0 + 1} = \frac{y + 1}{1 + 1}$$

$$2x + 1 = y$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

Para la siguiente raíz, tomemos los puntos P_4 y P_5 y tendremos como antes

$$x = -0{,}5$$

Para la última raíz, se tomarán los puntos P_5 y P_6 y se tendrá de igual manera

$$x = 1{,}083$$

Si se quiere encontrar la aproximación, se sustituye uno de los valores de x en la ecuación y haciendo iguales tanteos a los del caso anterior, se verá que hay una aproximación del 98 por ciento y con este dato, se pueden corregir las otras raíces.

Sea por fin, la ecuación del quinto grado

$$x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 = y$$

Tendremos para

$x = -3$	$y = -164$
$x = -2$	$y = -21$
$x = -1$	$y = -4$
$x = 0$	$y = 1$
$x = 1$	$y = 0$
$x = 2$	$y = 31$
$x = 3$	$y = 264$

La curva correspondiente será la de la fig. 4 a la cual podemos aplicar el método ya indicado, encontrándose las raíces 1; — 0, 2; etc.

Se han resuelto estas últimas ecuaciones, de un modo analítico; pero si se desean encontrar las raíces directamente, no hay sino que apreciar, a la escala, el valor de la parte del eje *ox*, que va desde el origen de las coordenadas al punto donde la curva corta al eje de abcisas. Se sabe que, los segmentos situados hacia la derecha del eje oy, son positivos; los situados a la izquierda, negativos, y, cuando la curva no corta al eje *ox*, las raíces son imaginarias, Valiéndonos de la Geometría Analítica, para evitar los tanteos que hemos hablado, puede aproximarse a la raíz verdadera, tanto como se pueda, después de dos o tres operaciones, así:

Sea $OM = a$, la raíz exacta (fig; 5), la raíz aproximada sea $OA = a'$. La ecuación de la recta $P' P''$ es

$$\frac{x'' - x'}{y'' - y'} = \frac{x - x'}{y - y'}$$

de lo cual resultará a',

Se traza la paralela AB al eje *oy*, entonces las coordenadas de B se encontrarán por la intersección de la recta AB, cuya ecuación es

$$x = a'$$

y la ecuación de la curva

$$y = f(x)$$

Es decir que, la ecuación

$$y = f(a')$$

dará la ordenada de B.

Así B tendrá por coordenadas a', y una cierta ordenada y_1

Se trazará BP'' cuya ecuación se conoce y se determina entonces la abcisa de *C*, etc., se procederá de igual manera, hasta que la curva se confunda con la última recta y se tendrá el valor de la raíz de un modo más exacto.

Con estos antecedentes, vamos a resolver el caso de la figura 2, que representa la ecuación

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = y$$

Por la recta $P_1 P_2$, se encuentra la raíz aproximada

OA = — 2,27. Tracemos, como se ha dicho, AB y sustituyamos el valor de la raíz en la ecuación de la curva, se encuentra así después de verificados los cálculos,

$$y = 1{,}27$$

Así B tiene por coordenadas — 2,27; 1,27 y como

P_1 (— 3, — 8), la recta BP_1 tiene por ecuación

$$\frac{-2{,}27+3}{1{,}27+8} = \frac{x+3}{y+8}$$

$$\frac{0{,}73}{9{,}27} = \frac{x+3}{y+8}$$

$$0{,}73y + 5{,}84 = 9{,}27x + 27{,}81$$

Pero en el punto *C*, y = 0; luego

$$-21{,}97 = 9{,}27x$$

$$x = -2{,}37$$

Trazando CD, para encontrar las coordenadas de D, se sustituye asimismo en la ecuación de la curva el valor — 2,37 y se encuentra y = 0,41; entonces

$$D\ (-2{,}37;\ 0{,}41)$$

Luego la recta DP_1 tiene por ecuación

$$\frac{-2{,}37+3}{0{,}41+8} = \frac{x+3}{y+8};$$

$$0{,}63y + 5{,}04 = 8{,}41x + 25{,}23$$

Pero en E, y = 0; luego

$$x = -2{,}4$$

Este valor en la ecuación propuesta, da

$$y = 0{,}14$$

que es muy inferior al encontrado anteriormente y cercano de cero; de modo que, — 2,4 podría ya tomarse como raíz.

Pero prosigamos por última vez; levantando en E, una recta EF, que no se ve en la figura, el punto F, tendría por coordenadas — 2,4; 0.14. Luego la recta P_1F tendría por ecuación

$$\frac{-2{,}4+3}{0{,}14+8} = \frac{x+3}{y+8}$$

$$0{,}6y + 4{,}8 = 8{,}14x + 24{,}42$$

En un punto G, sobre el eje ox, sería $y = 0$, luego

$$4{,}8 = 8{,}14x + 24{,}42$$

$$x = -2{,}41$$

Entonces se encuentra para *y*, el valor 0,04 y se puede asegurar que la raíz — 2;41 es suficientemente exacta.

RAEAEL ANDRADE RODRÍGUEZ,
Profesor de AnálisisMatemático.