×

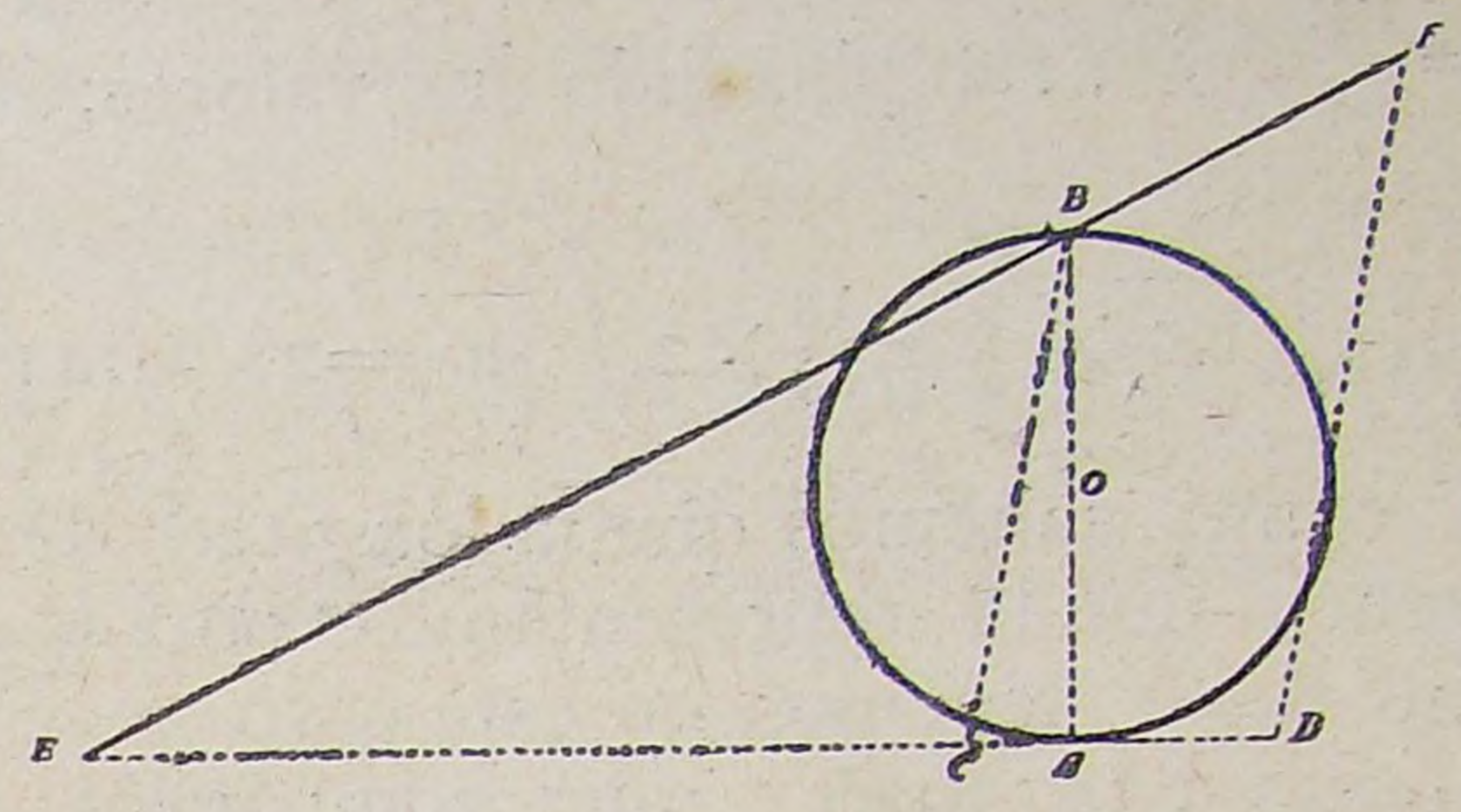
Rectificación de la circunferencia, semicircunferencia, cuadrante y sus aplicaciones

SANCHEZ P.

No siendo posible hallar gráficamente una recta que sea en rigor igual a la longitud de una circunferencia dada, por ser la relación entre ésta y su diámetro igual a un número inconmensurable que se representa por la letra griega π; nos proponemos resolver este problema con una aproximación suficiente para la práctica, y cuya aplicación es muy frecuente.

RECTIFICACION DE LA CIRCUNFERENCIA

Sea O el centro de una circunferencia propuesta (fig. 1), tomemos a su radio por unidad; tracemos el diámetro AB que lo dividimos en cinco partes iguales; sobre la tangente en A, póngase hacia la izquierda una longitud AC igual a una de dichas partes, en la prolongación de A C



(Fig. 1)

tomemos una longitud CE igual a diez partes de las mismas, y a la derecha de A una longitud AD igual a dos; únase el punto B con C y con E, tracemos del punto D una paralela DF a BC, digo que la recta EF es la circunferencia rectificada, es decir $EF=2\pi$.

En efecto de las construcciones hechas deducimos:

$$EC=2AB=4;\quad AE=2AB+\frac{AB}{5}=4+\frac{2}{5}=\frac{22}{5};$$

$$ED=\frac{22}{5}+\frac{4}{5}=\frac{26}{5}$$

Ahora en el triángulo rectángulo EAB obtendremos:

$$\overline{EB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=4+\left(\frac{22}{5}\right)^2;\quad EB=\sqrt{4+\left(\frac{22}{5}\right)^2}=\frac{2}{5}\sqrt{146}.$$

Consideremos los triángulos semejantes EDF y EBC nos dan: $\frac{EF}{EB}=\frac{ED}{EC}$ de donde

$EF = \frac{EB \times ED}{EC}$, remplazando sus valores;

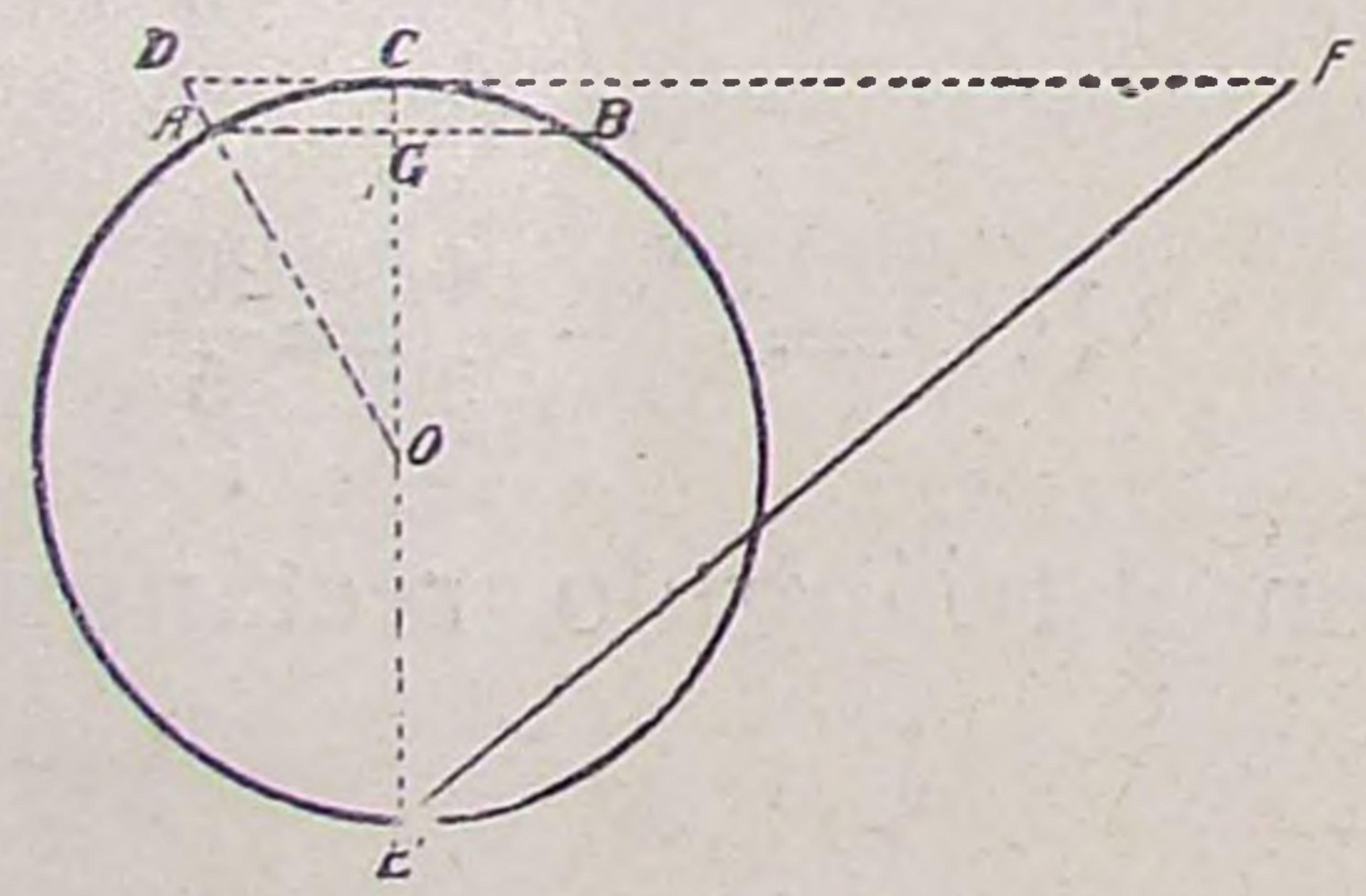
$$EF = \frac{2}{5}\sqrt{146} \times \frac{\frac{26}{5}}{4} = \frac{13}{50} \times 2\sqrt{146} = 2 \times 3{,}1415933\ldots$$

Y como sabemos que la longitud de la circunferencia que la representamos por $C = 2\pi R$, y como $R = 1$, tenemos en este caso.
$C = 2\pi = 2 \times 3{,}1415926\ldots$ que comparado con el valor obtenido para EF difiere desde la sexta cifra decimal; es decir con una aproximación suficiente.

RECTIFICACION DE LA SEMICIRCUNFERENCIA

Para este caso empleamos el procedimiento siguiente:

Sea O (fig. 2), el centro de una circunferencia dada, AB una cuerda igual al radio que se toma por unidad, sea EC el diámetro perpendicular a dicha cuerda, por el punto C tracemos



(Fig. 2)

una tangente limitada por el un extremo por el radio OA prolongado y cuya intersección determina el punto D, a partir de éste y sobre la tangente se toma una longitud $DF = 3$, unamos el punto E con F, y tenemos que la recta EF representa la semicircunferencia rectificada.

En efecto (1) $CF=DF-DC$; $DF=3$

En el triángulo rectángulo OGA se tiene:

$$\overline{OG}^2=\overline{OA}^2-\overline{AG}^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}, \text{ o sea}$$

$$OG=\sqrt{1-\frac{1}{4}};\quad AG=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}$$

Consideremos los triángulos semejantes ODC y OAG nos dan,

$$\frac{DC}{AG}=\frac{OC}{OG}, \text{ o } DC=\frac{AG\times OC}{OG}$$

$$DC=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

reemplazando en la ecuación (1) tendremos,

$$CF=3-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{9-\sqrt{3}}{3}$$

Ahora en el triángulo rectángulo EFC

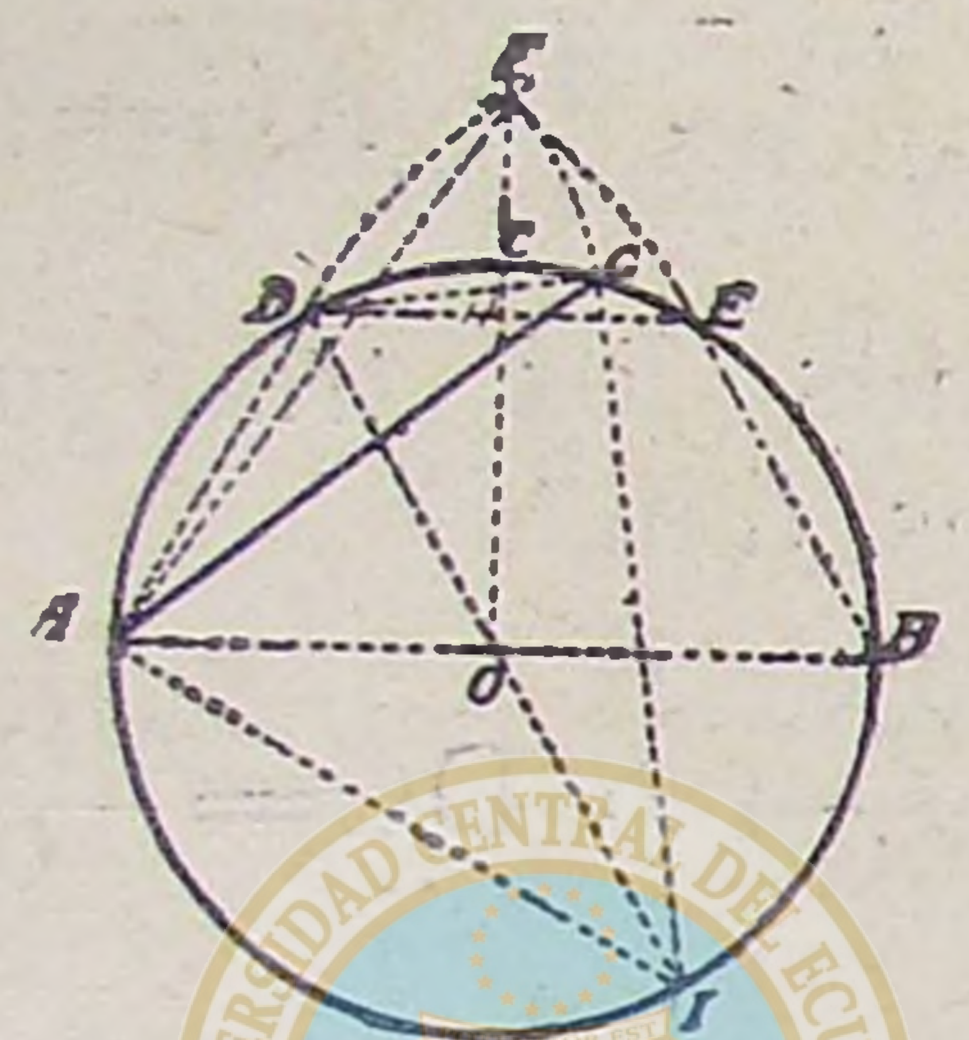
$$\overline{EF}^2=\overline{EC}^2+\overline{CF}^2=4+\left(\frac{9-\sqrt{3}}{3}\right), \text{ o}$$

$$EF=\sqrt{4+\left(\frac{9-\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{120-18\sqrt{3}}{9}}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{120-18\sqrt{3}}=3{,}141533\ldots=\pi$$

RECTIFICACION DE UN CUADRANTE

Sea una circunferencia de centro O (fig 3), y de radio R igual a la unidad, tracemos el diámetro AB, construyamos el semiexágono regular ADEB, haciendo centro sucesivamente en los puntos A y B con los radios AE y BD, trácense



(Fig. 3)

dos arcos que se cortarán en F sobre la prolongación del radio OC perpendicular a AB.

Hagamos centro en D y con una abertura de compás igual a DF rebátase este punto en G sobre la circunferencia, digo que AG es la magnitud pedida.

Tracemos el diámetro DI, unamos G con D y con I, además el punto A con F y con I y por último D con F.

Consideremos el cuadrilátero inscrito ADGI y aplicando el teorema de Ptolomeo que dice: "En todo cuadrilátero inscriptible a una circunferencia el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos".

Es decir (1) $DI \times AG = DG \times AI + AD \times GI$

y como $AI=\sqrt{3}$, $AD=1$, y $DI=2$ tendremos,

$$(2)\quad 2AG=DG\times\sqrt{3}+1\times CI$$

En el triángulo rectángulo DGI nos da:

$$\overline{GI}^2=\overline{DI}^2-\overline{DG}^2=4-\overline{DG}^2,\ \text{o}\ GI=\sqrt{4-\overline{DG}^2}$$

Reemplazando este valor en la ecuación (2)

$$(3)\quad 2AG=DG\times\sqrt{3}+\sqrt{4-\overline{DG}^2}.$$

pero según la figura $DG=DF$, debemos calcular DF en el triángulo rectángulo DFH.

$$\overline{DF}^2=\overline{DH}^2+\overline{FH}^2,\ \text{o}\ DF=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{FH}^2}$$

Por otra parte $DH=\frac{1}{2}$; además en el triángulo rectángulo OFA

$$\overline{OF}^2=\overline{AF}^2-\overline{AO}^2,\ \text{o sea}\ \overline{OF}^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-1$$

$$FH=OF-OH\left\{\begin{array}{l} OF=\sqrt{3-1}=\sqrt{2} \\ \\ OH=\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right\}FH=\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Luego } DG=DF=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{3-\sqrt{6}}$$

Por consiguiente reemplazando este valor en (3) obtendremos;

$$2\,AG = \sqrt{3 - \sqrt{6}} \times \sqrt{3} + \sqrt{4 - 3 + \sqrt{6}}$$

$$2\,AG = \sqrt{9 - 3\sqrt{6}} + \sqrt{1 + \sqrt{6}} = 3{,}142398.....$$

$$AG = \frac{3{,}142398}{2} = 1{,}571199.$$

APLICACIONES

LONGITUD DE UN ARCO DE CIRCULO

Supongamos que en una circunferencia de radio R (fig. 4) se haya tomado un arco de amplitud o valor gradual igual a n, llamemos l la longitud del mismo.

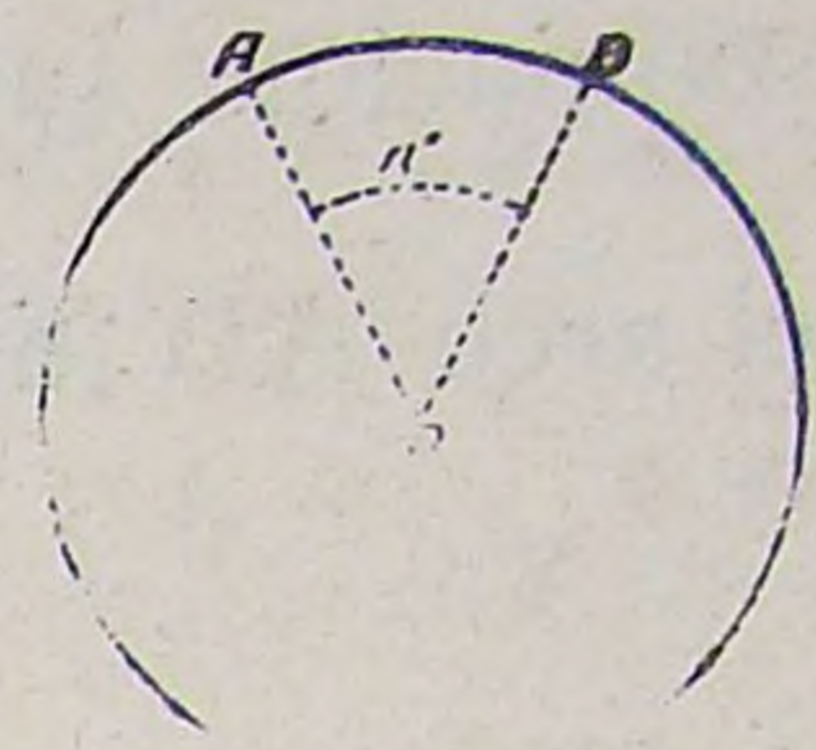
Sabemos que en una misma circunferencia los arcos son proporcionales a los ángulos al centro que los interceptan.

Si observamos que la circunferencia entera corresponde a 360°, tendremos:

$$\frac{\text{arco AB}}{\text{circunf.}} = \frac{n}{360^\circ} \text{ es decir;}$$

$$\frac{l}{2\,\pi\,R} = \frac{n}{360^\circ}; \text{ luego}$$

$$l = \frac{R\,n}{180} \quad (1)$$



(Fig. 4)

Ahora consideremos el caso de que el ángulo AOB es dado en grados, minutos y segundos, se convertirá este ángulo en grados y fracciones de grado, n es entonces un número fraccionario

Así pues un arco de n grados, n minutos y n segundos corresponde a una circunferencia de radio R que tiene por longitud

$$l = \frac{\pi R}{180}\left(n^{\circ} + \frac{n'}{60} + \frac{n''}{60}\right)$$

Ahora si en la fórmula (1) se hace $l = R$ se encuentra $R = \frac{\pi R n}{180}$ de donde obtenemos el valor de $n = 180 \times \frac{1}{\pi}$ reemplazando $\frac{1}{\pi}$ por su valor 0,318309886.........., se obtiene

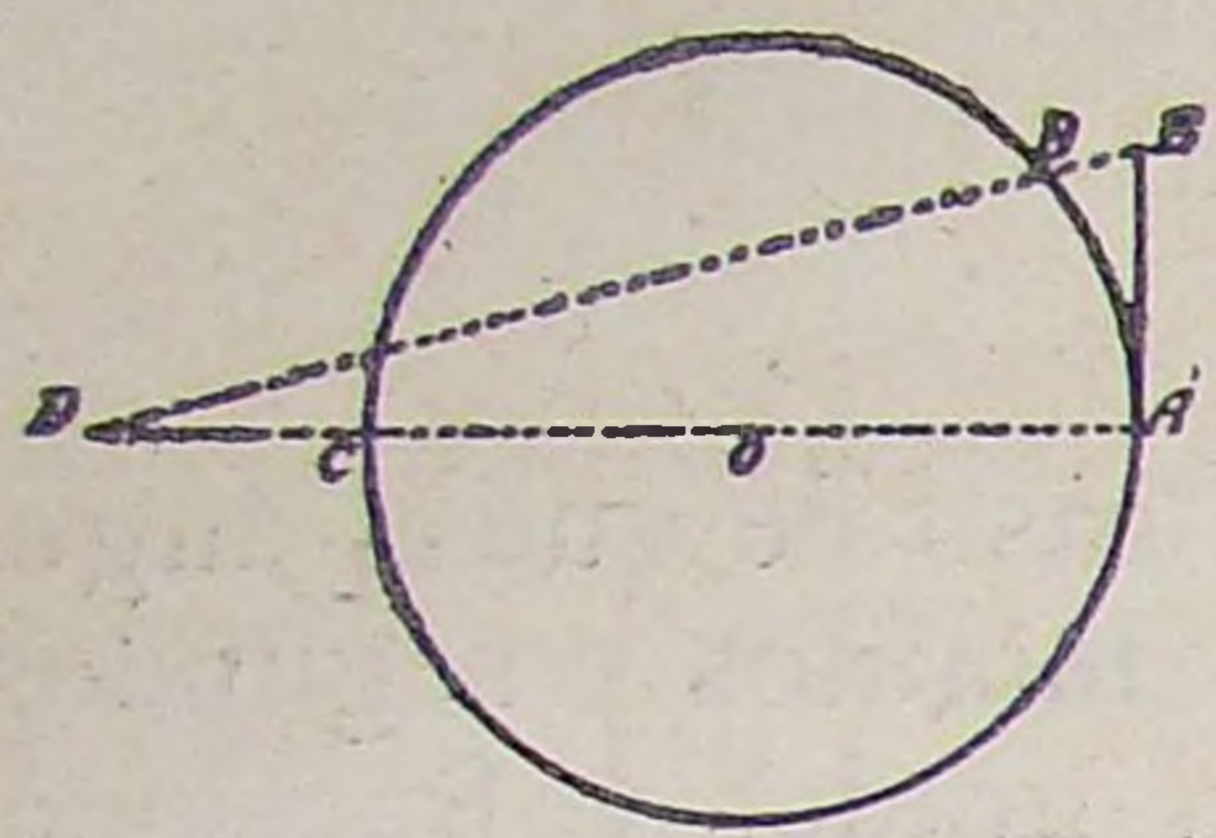
$$n = 57^{\circ}\ 17'\ 44''\ldots\ldots$$

Por tanto, el ángulo al centro que intercepta un arco igual al radio en una circunferencia cualquiera, es independiente del radio de la circunferencia.

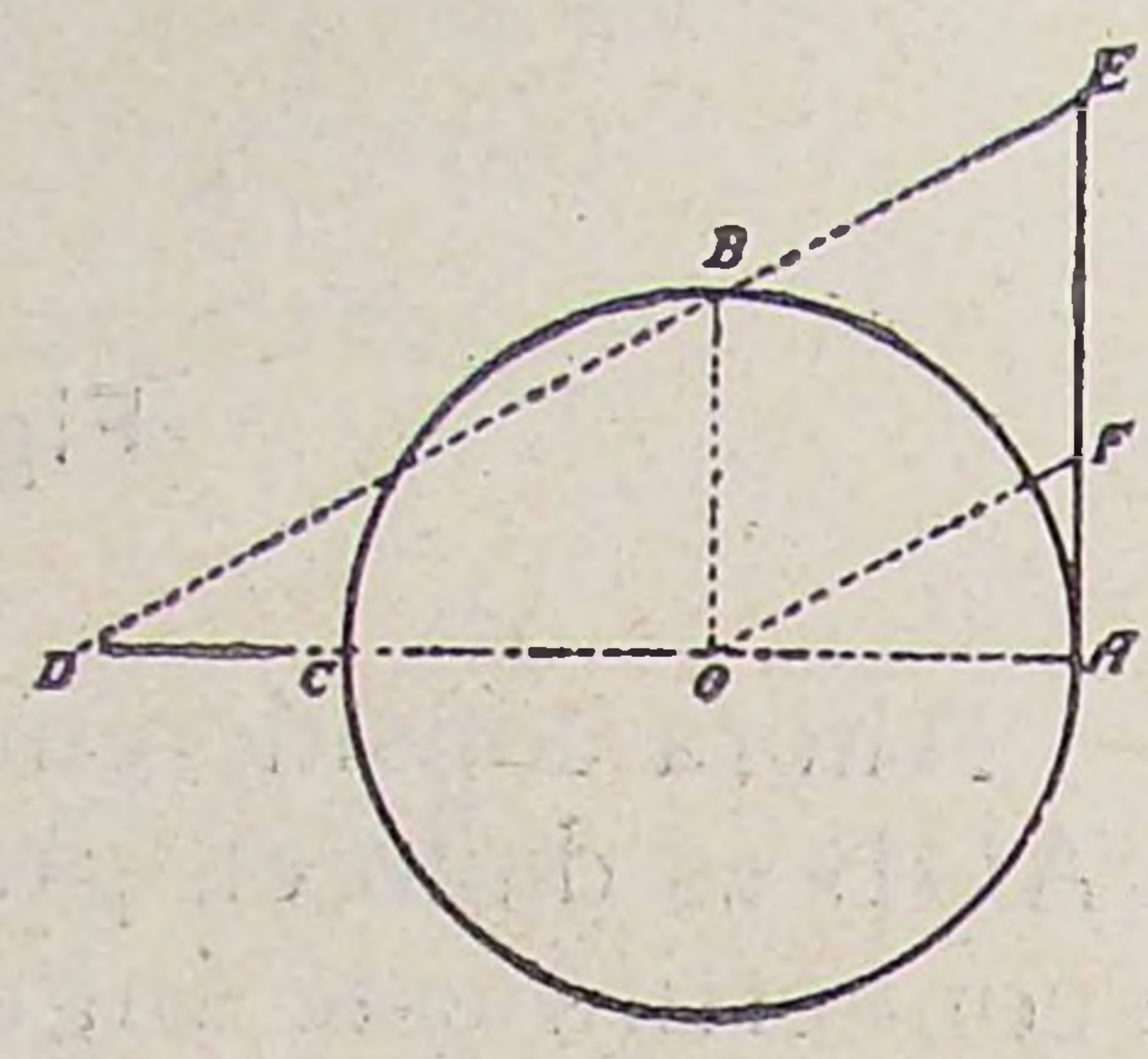
Este ángulo constante es la unidad del ángulo adoptado en Trigonometría.

Gráficamente también se puede rectificar un arco con una aproximación suficiente para la práctica.

Supongamos el arco AB (fig 5) menor que



(Fig. 5)



(Fig. 6)

un cuadrante y tomemos por unidad el radio de la circunferencia a que pertenece.

Prolonguemos AC tomando CD$=\frac{3}{4}$ del radio, o sea 0,750 unamos D con B y prolónguese esta recta hasta encontrar a la tangente trazada en A digo que la parte AE de dicha tangente, representa la longitud del arco propuesto.

Comprobemos la aproximación que resulta con este procedimiento aplicándolo a un cuadrante AB (fig. 6), que es el caso más desfavorable.

En este caso AE representa también la longitud de dicho cuadrante, que ha de ser

$$AE = \frac{\pi}{2} = 1{,}570796$$

Si trazamos por la O la recta OF paralela a DE, tendremos EF$=1$, y por consiguiente

$$AF = AE - EF \quad \text{o}$$

(1) $AF = 1{,}570796 \ldots\ldots - 1 = 0{,}570796 \ldots\ldots$

Ahora consideremos los triángulos semejantes OAF y DOB nos dan

$$\frac{AF}{OB} = \frac{OA}{DO}; \quad AF = \frac{OB \times OA}{DO}$$

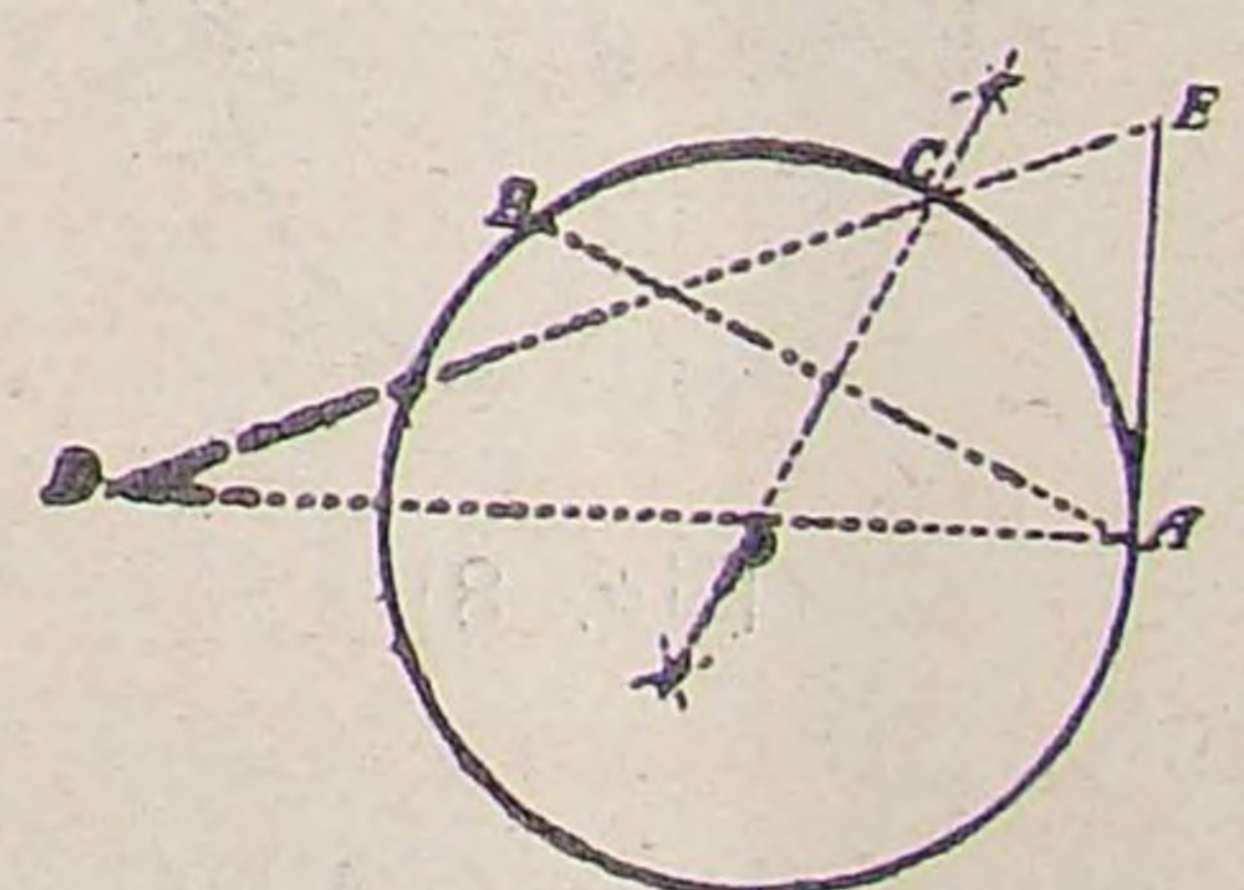
pero $DO = DC + CO$; luego

$$AF = \frac{OB \times OA}{CD + CO} = \frac{1}{1{,}750} = 0{,}571428 \ldots\ldots$$

Así pues comparando este valor con el de (1) tenemos una diferencia de 0,000632......en el caso más desfavorable.

Ahora si el arco fuese mayor que una cuadrante (fig. 7).

Consideremos el arco AB y su respectiva cuerda dividida en dos partes iguales por la perpendicular trazada en su punto medio, tenemos que se ha dividido también el arco en dos partes iguales que nos representan los arcos AC y CB,



(Fig. 7.)

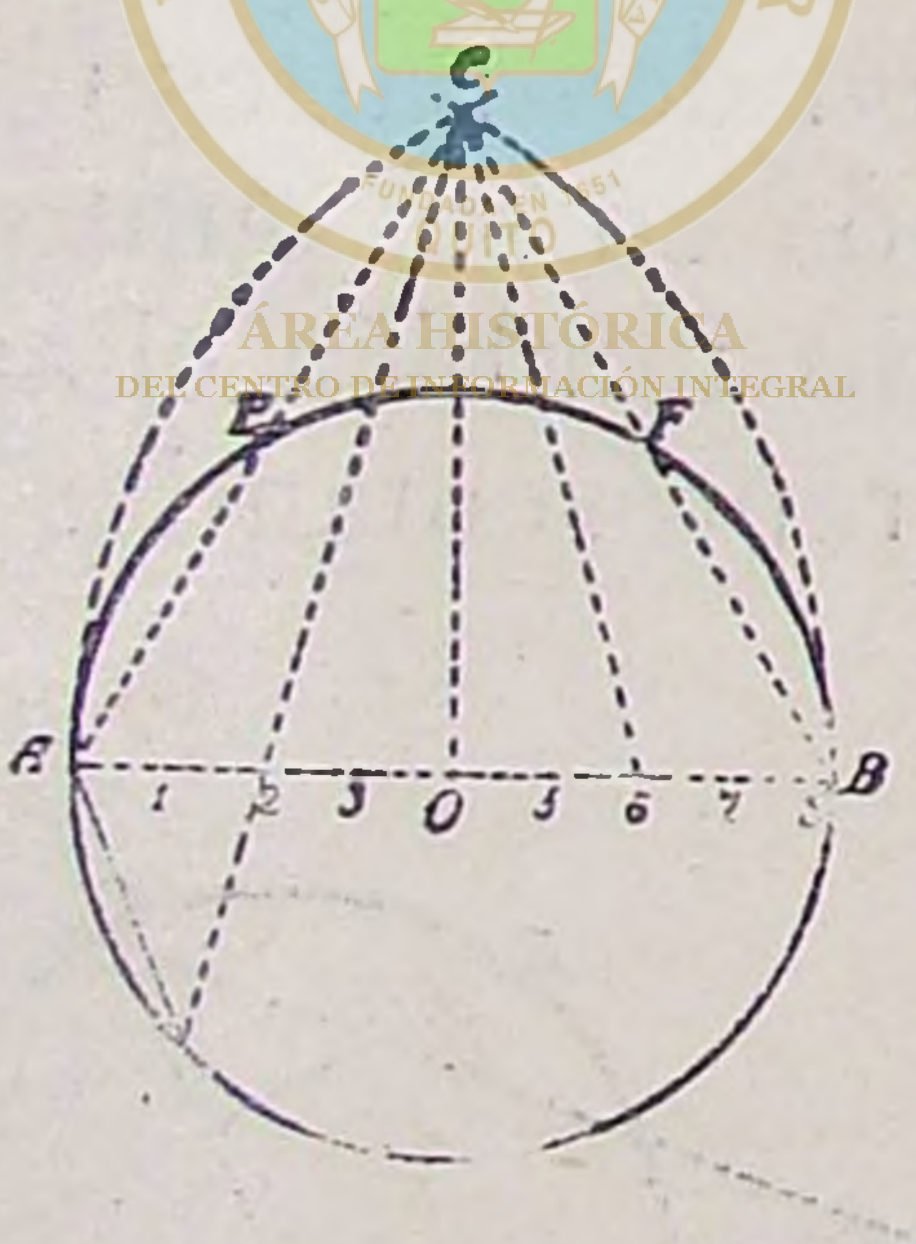
aplicando el procedimiento anterior operamos sobre el arco AC y obtenemos la recta AE que representa la rectificación del arco AC, este valor lo duplicamos y tendremos por último la rectificación del arco pedido.

Si el arco es mayor que dos o tres cuadrantes se operará sobre la cuarta parte del arco, siguiendo el mismo procedimiento de los casos anteriores que venimos considerando y se cuadruplicará el resultado.

De esta manera hemos encontrado un procedimiento general para rectificar un arco cualquiera de una circunferencia y de mucha aplicación en la práctica.

Veamos ahora la manera de dividir una circunferencia en un número cualquiera de partes iguales aproximadamente.

Sea la circunferencia de centro O [fig. 8] tracemos el diámetro AB, y sobre él construya-



(Fig. 8)

mos el triángulo equilátero ABC; dividamos dieho diámetro en n partes iguales por ejemplo y uniendo el segundo punto de división, a contar desde A con el punto C, esta recta determinará un arco AC, que es aproximadamente la enésima parte de la circunferencia.

Observemos en primer lugar que el arco $EF=60^\circ$; pues el ángulo ACB que vale 60° tiene por medida arco $\frac{AB}{2}-\frac{EF}{2}=90-\frac{EF}{2}$; de modo que

$$60^\circ=90^\circ-\frac{EF}{2};\ \text{luego}\ 60^\circ=\frac{180^\circ-EF}{2}$$

$$120^\circ=180^\circ-EF;\ EF=180^\circ-120^\circ=60^\circ$$

Si suponemos ahora que las rectas C 2, C 4, C 6, ... dividen en partes iguales al ángulo C y al arco EF, lo cual no es rigurosamente exacto, se verificará que

$$[1]\ ACD=\frac{AD}{2}-\frac{EG}{2}$$

pero $ACD=\frac{\frac{60^\circ}{n}}{2}=\frac{120^\circ}{n}$ [por la hipótesis]

$$EG=\frac{\frac{60^\circ}{n}}{2}=\frac{120^\circ}{n}$$

y sustituyendo en [1] tendremos,

$$\frac{120^\circ}{n}=\frac{AD}{2}-\frac{120^\circ}{2n}$$

$$\frac{AD}{2}=\frac{120^\circ}{2n}+\frac{120^\circ}{n}=\frac{120^\circ+240^\circ}{2n},\ \text{y}\ AD=\frac{2\times 360^\circ}{2n}$$

$$=\frac{360^\circ}{n}$$

Sin embargo para el cuadrado y algún otro polígono es rigurosamente exacto.

Ahora bien, sabemos que con la regla y el compás se puede inscribir en una circunferencia únicamente los polígonos regulares cuyo número de lados sea algún término cualquiera de las progresiones geométricas siguientes:

$$\div\, 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : \ldots\ldots : 3 \times 2^n$$

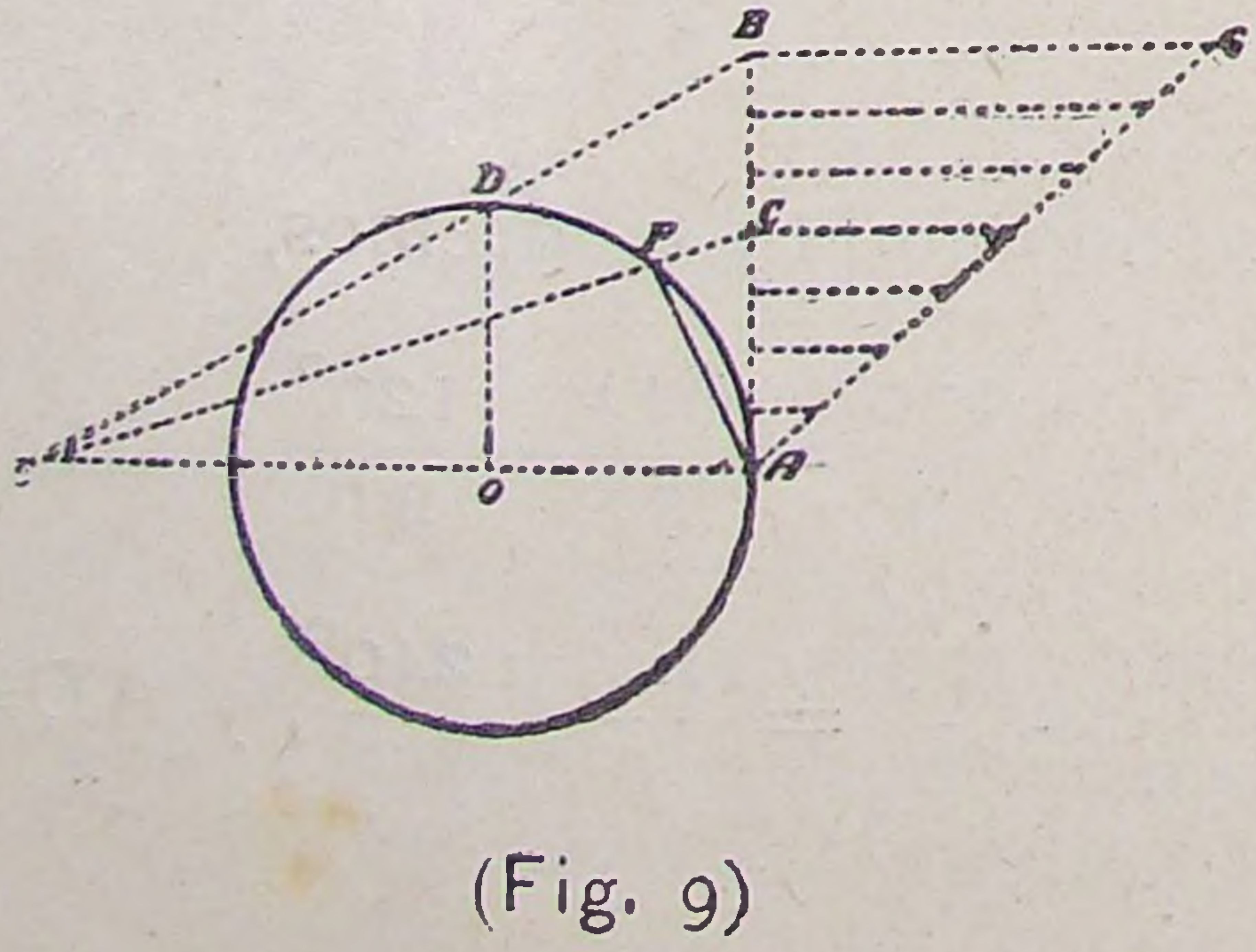
$$\div\, 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : \ldots\ldots : 15 \times 2^n$$

$$\div\, 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : \ldots\ldots : 4 \times 2^n$$

$$\div\, 15 : 30 : 60 : 120 : 240 : \ldots\ldots : 5 \times 2^n$$

Con este objeto nos proponemos dar otro procedimiento para dividir la circunferencia en un número cualquiera de partes iguales con mayor aproximación.

Se rectifica el cuadrante con el procedimiento anteriormente visto, se divide la recta AB [fig. 9] que nos representa el cuadrante rectificado en



(Fig. 9)

n partes iguales, y tomando las cuatro enésimas partes primeras, a partir del punto A, se encuentra el arco de la misma longitud que será a su vez la enésima parte de la circunferencia; pues se toman las cuatro enésimas partes por dividirse la circunferencia en cuatro cuadrantes.

Sea por ejemplo la recta AB dividida en siete partes iguales, tomemos como hemos dicho las cuatro partes y unamos el punto E con C, tenemos que la recta EC corta a la circunferencia en el punto F, pues la longitud AF en este caso nos representa el caso del eptágono inscrito; de esta manera encontraremos los lados de cualquier polígono inscrito y con una aproximación suficiente.

M. SANCHEZ P.