e. b

REPUBLICA DEL ECUADOR

Tomo XXXIII | Julio-Dbre. de 1924 | Nº 250

ANALES

DE LA

UNIVERSIDAD CENTRAL

R. Andrade Rodriguez

Ensayo de estudio de Trigonometría Hiperbólica

Por tratarse de una materia relativamente nueva y cuyas aplicaciones van generalizándose cada vez más, nos hemos propuesto presentar a nuestros alumnos este pequeño trabajo, añadiendo algunos puntos originales de nuestra parte, con el objeto de que la materia se presente útil y en lo posible clara.

Para las funciones trigonométricas circulares, las fórmulas de Moivre dan:

$$\cos. x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\text{sen. } x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

siendo, como se sabe,

$$i = \sqrt{-1},$$

es decir la unidad imaginaria y e la base de los logaritmos neperianos o hiperbólicos y que vale

$$e = 2,718281828459045$$

Ahora bien, se sabe que la ecuación de la hipérbola, en coordenadas rectangulares es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y como se trata, para nuestro caso, de una hipérbola equilátera, se debe hacer $a = b$; entonces se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1;$$

$$x^2 - y^2 = a^2$$

que es la ecuación de dicha hipérbola equilátera.

Tratándose de las funciones hiperbólicas, ante todo, se representan así:

Seno hiperbólico de x,				sh. x
Coseno	,,	,,	,,	ch. x
Tangente	,,	,,	,,	th. x
Cotangente	,,	,,	,,	coth. x
Secante	,,	,,	,,	sech. x
Cosech	,,	,,	,,	cosech. x

Las funciones *sh. x*, *ch. x*, se definen por las relaciones:

$$\text{sh. } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (1)$$

$$\text{eh. } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (2)$$

que resultan de las fórmulas de Moivre, cuando se cambia ix en x. Elevemos al cuadrado las fórmulas (1) y (2) y restando (1) de (2), tenemos

$$ch^2x - sh^2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^xe^{-x} - e^{2x} - e^{-2x} + 2e^xe^{-x}}{4}$$

$$= \frac{4e^xe^{-x}}{4} = e^{x-x} = e^0 = 1$$

y por consiguiente, se tiene la fórmula importante

$$ch^2.x - sh^2.x = 1$$

relacionada a la fórmula ordinaria de la Trigonometría Rectilínea.

$$\cos.^2x + \text{sen}.^2x = 1$$

Si en la ecuación de la hipérbola equilátera

$$x^2 - y^2 = a^2$$

se pone

$$x = ach.\ x$$

$$y = ash.\ x$$

se tiene

$$a^2ch^2x - a^2sh^2x = a^2;$$

$$ch^2x - sh^2x = 1,$$

fórmula que la hemos encontrado de otra manera.

Hemos manifestado que la fórmula fundamental de la Trigonometría Rectilínea es

$$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$$

y si cambiamos x en ix, tenemos

$$\text{sen}^2ix + \cos^2ix = 1;$$

pero como $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$, se tiene

$$\operatorname{sen}^2(-x)+\cos^2(-x)=1$$

lo cual debe escribirse

$$ch^2\,x-sh^2\,x=1$$

y por todos estos procedimientos, se ve que se puede pasar de la una Trigonometría a la otra, introduciendo solamente el símbolo imaginario; ya que el eje no transverso de la hipérbola es como se sabe, un eje imaginario.

En las funcíones *sh.x*, *ch.x*, etc., la variable *x* se llama *el argumento* de la función hiperbólica y consideremos las funciones hiperbólicas análogas a las funciones circulares:

$$th.\ x=\frac{sh.\ x}{ch.\ x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};$$

$$coth.\ x=\frac{ch.\ x}{sh.\ x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}};$$

$$sec.\ h.\ x=\frac{1}{ch.\ x}=\frac{1}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=\frac{2}{e^x+e^{-x}};$$

$$cosech.\ x=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$$

Sabemos así mismo, por la Trigonometría ordinaria, que

$$\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x$$

$$\cos(-x)=\cos x$$

y se dirá, por consiguiente

$$sh\,(-x)=-sh.\ x$$

$$\text{ch}(-x) = \text{ch}.\, x$$

$$\text{tgh}(-x) = -\text{th}.\, x$$

$$\text{coth}(-x) = -\text{coth}.\, x$$

etc., etc.

En la Trigonometría Rectilínea, se tiene

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\, \alpha \cos \beta + \cos \alpha\, \text{sen}\, \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen}\, \alpha\, \text{sen}\, \beta$$

Veamos las fórmulas semejantes que resultan, para este caso, en la Trigonometría Hiperbólica: tenemos ya por definición

$$\text{ch}.\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{sh}.\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

luego

$$\text{ch}.\, x + \text{sh}.\, x = \frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x \qquad (3)$$

Así mismo

$$\text{ch}.\, x - \text{sh}.\, x = e^{-x} \qquad (4)$$

Si se reemplaza sncesivamente x por α y β, en la primera fórmula (3); multiplicando los dos resultados entre sí y haciendo otro tanto con la (4), se tiene

$$(\text{ch}.\alpha + \text{sh}.\alpha)\ (\text{ch}.\beta + \text{sh}.\beta)$$

$$= e^{\alpha+\beta} = \text{ch}(\alpha+\beta) + \text{sh}(\alpha+\beta);$$

$$(ch.\alpha - sh.\alpha)\ (ch.\beta - sh.\beta) = e^{-(\alpha+\beta)}$$

$$= ch.\ (\alpha+\beta) - sh.(\alpha+\beta);$$

Sumando y restando estas dos fórmulas, se obtiene

(5) $$2\ ch.\ (\alpha+\beta) = (ch.\ \alpha + sh.\alpha)\ (ch.\beta + sh.\beta)$$

$$+\ (ch.\alpha - sh.\alpha)\ (ch.\ \beta - sh.\ \beta)$$

Las fórmulas (5) y (6) se hacen

$$ch.\ (\alpha+\beta) = \frac{ch.\ \alpha\ ch.\ \beta + ch.\ \alpha\ sh.\ \beta + sh\ \alpha\ ch.\ \beta + sh.\ \alpha\ sh.\ \beta}{2}$$

$$+\ \frac{ch.\ \alpha\ ch.\ \beta - ch.\ \alpha\ sh.\ \beta - sh.\ \alpha\ ch\ \beta + sh.\ \alpha\ sh.\ \beta}{2}$$

$$= ch.\ \alpha\ ch.\ \beta + sh.\ \alpha\ sh.\ \beta;$$

$$sh.\ (\alpha + \beta = sh.\ \alpha\ ch.\ \beta + ch.\ \alpha\ sh.\ \beta$$

y se ve que, comparadas estas fórmulas con las otras, no difieren sino por el signo del segundo término en el segundo miembro de

$$\cos\ (\alpha + \beta)$$

Así, según los métodos que hemos empleado, todas las fórmulas de la Trigonometría Rectilínea, se pueden sacar en la Hiperbólica, con suma facilidad.

———

Hablemos ahora, de la variación de las funciones hiperbólicas:

Si e^x crece de o a $+\infty$, se tiene

$$e^0 = 1;\ e^\infty = \infty.$$

Para e^{-x}, se tienen los valores

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^0} = 1;\ e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^\infty} = 0$$

de lo cual se deduce que, por ejemplo,

$$\text{ch. } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ch. } x = \frac{e^\infty + e^{-\infty}}{2} = \frac{\infty + 0}{2} = \infty$$

Entonces: *sh. x* (función impar), crece indefinidamente de $-\infty$ a $+\infty$, cuando x crece de $-\infty$ a $+\infty$, y, de igual manera puede hacerse con las otras funciones, construyendo las curvas respectivas. La curva *ch. x* (función par), es lo que se llama *la catenaria*, que es una curva bien conocida.

Así como, si se tiene por ejemplo

$$y = \text{sen. } x$$

se encuentra

$$x = \text{arc. sen. } y,$$

se puede escribir

$$\text{sh. } y = x$$

que es la función inversa del seno hiperbólico o el argumento de la función hiperbólica y se escribe

$$y = \text{arg. sh. } x$$

Esta función se determina por la expresión

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x;$$

$$e^y - e^{-y} - 2x = 0$$

Si se multiplica esta ecuación por e^y, se tiene

$$e^{2y} - 1 - 2xe^y = 0;$$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

que es una ecuación del 2º grado; de donde

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

y como e^y es siempre positivo, se debe tomar solamente el signo +, y así

$$y = L\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Se tiene así mismo, partiendo de

$$\text{ch. } y = x; \quad y = \text{arg. ch. } x;$$

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = x;$$

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = L\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Por la tangente, tenemos:

$$\text{th. } y = x; \quad y = \text{arg. th. } x;$$

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x; \quad e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x};$$

$$y = \frac{1}{2} L \frac{1+x}{1-x}$$

Para la cotangente, tendremos

$$\text{coth. } y = x; \qquad y = \text{arg. coth. } x;$$

$$\frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = x; \qquad y = -\frac{1}{2} L \frac{1+x}{1-x}$$

y de igual manera puede hacerse respecto de *arg. scchx* y *arg. cosech. x.*

Para completar en parte esta materia, tratemos de una vez, de los derivadas de dichas funciones hiperbólicas: Sea

$$y = \text{sh. } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

se tendrá

$$y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch. } x$$

y así. la derivada del seno es el coseno.

Sea

$$y = \text{ch. } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

se tendrá

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh. } x;$$

luego, si

$$y = \text{th. } x = \frac{\text{sh. } x}{\text{ch. } x}$$

se tendrá

$$y' = \frac{\text{ch. } x\,(\text{sh. } x)' - \text{sh. } x\,(\text{ch. } x)'}{\text{ch.}^2\, x}$$

$$= \frac{\text{ch}^2\, x - \text{sh}^2\, x}{\text{ch.}^2 x} = \frac{1}{\text{ch}^2\, x}$$

y así se hará para las demás funciones.

Si consideramos la función inversa

$$y = \text{arg. sh. } x$$

se tendrá

$$x = \text{sh. } y;$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\text{ch. } y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Por la misma razón, si

$$y = \text{arg. ch. } x$$

$$x = \text{ch. } y$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

y así, en adelante, para las demás funciones

Para concluír, tratándose de diferenciales e integrales, podemos formar el cuadro siguiente:

FUNCIONES	DERIVADAS	DIFERENCIALES	INTEGRALES
$y = \text{sh. } x$	$y' = \text{ch. } x$	$d. \text{ sh. } x = \text{ch. } x \, dx$	$\int \text{ch. } x \, dx = \text{sh. } x + C$
$y = \text{ch. } x$	$y' = \text{sh. } x$	$d. \text{ ch. } x = \text{sh. } x \, dx$	,, $\text{sh. } x \, dx = \text{ch. } x + C$
$y = \text{th. } x$	$y' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$	$d\text{th. } x = \frac{dx}{\text{ch}^2 x}$	,, $\frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th. } x + C$
$y = \text{coth. } x$	$y' = \frac{1}{\text{sh}^2 x}$	$d\text{coth. } x = \frac{dx}{\text{sh}^2 x}$	,, $\frac{dx}{\text{sh}^2 x} = \text{coth. } x + C$
....	....	....	....
$y = \text{arg. sh. } x = L(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$d\,L(x + \sqrt{x^2+1}) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = L(x + \sqrt{x^2+1}) + C$
$y = \text{arg. ch. } x = L(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$	$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}$	$d\,L(x \pm \sqrt{x^2-1}) = \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2-1}} = L(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C$
$y = \text{arg. th. } x = \frac{1}{2} L \frac{1+x}{1-x}$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$	$d\,\frac{1}{2} L \frac{1+x}{1-x} = \frac{dx}{1-x^2}$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} L \frac{1+x}{1-x} + C$
....	....	....	....

Quito, diciembre de 1924.

R. Andrade Rodríguez.