Breves apuntes sobre las ecuaciones de grado superior al primero

POR EL PROFESOR

MANUEL T. SANCHEZ

I

Sea la ecuación de 2º grado

$$ax^2+bx+c=0.$$

Vamos a establecer la fórmula general que permita obtener la suma de dos potencias semejantes cualesquiera de las raíces de la ecuación del 2º grado.

En efecto, la ecuación

$$ax^2+bx+c=0.$$

dividiéndola por a, tendremos

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

multiplicando ambos miembros por x^{m-2} se obtiene

$$x^m+\frac{b}{a}x^{m-1}+\frac{a}{c}x^{m-2}=0$$

la ecuación así transformada debe ser satisfecha todavía para $x=x'$ y para $x=x''$; siendo x' y x'' las dos raíces.

Se tiene

$$x'^{m}+\frac{b}{a}x'^{m-1}+\frac{c}{a}x'^{m-2}=0$$

$$x''^{m}+\frac{b}{a}x''^{m-1}+\frac{c}{a}x''^{m-2}=0$$

Sumando estas dos ecuaciones y conservando en el primer miembro sólo la suma de los dos primeros términos, tendremos:

$$(1)\quad x'^{m}+x''^{m}=-\frac{b}{a}(x'^{m-1}+x''^{m-1})-\frac{a}{c}(x'^{m-2}+x''^{m-2})$$

Esta es la fórmula pedida; así pues siendo conocidas dos sumas consecutivas se puede determinar la suma siguiente:

En efecto hagamos $m=0$, tendremos

$$x'^{0}+x''^{0}=2$$

Por otra parte sabemos que

$$x'+x''=-\frac{b}{a};$$

Por consiguiente reemplazando *m* por los valores **2, 3, 4**, etc., en la (1) nos da:

$$x'^{2}+x''^{2}=-\frac{a}{b}(x'+x'')-\frac{a}{c}(x'^{0}+x''^{0})=-\frac{b}{a}\times-\frac{b}{a}-2\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$x'^{3}+x''^{3}=-\frac{b}{a}(x'^{2}+x''^{2})-\frac{a}{c}(x'+x'')=-\frac{b}{a}\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)+\frac{bc}{a^2}=\frac{-b^3+3abc}{a^3}$$

$$x'^{4}+x''^{4}=-\frac{b}{a}\left(\frac{b^3+3abc}{a^3}\right)-\frac{c}{a}\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$$

Ahora designado por S_0, S_1, S_2, S_3, etc., las sumas de las primeras, segundas, terceras, etc., potencias de las raíces, tendremos que,

$$S_\circ = 2;\ S_1 = -\frac{b}{a};\ S_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2};\ S_3 = \frac{-bS_2 + cS_1}{a};\ S_4 = \frac{-bS_3 + cS_2}{a}$$

en general se obtendrá S_m conociendo las sumas S_{m-1} y S_{m-2}.

Por consiguiente conociendo las dos primeras potencias sucesivas se pueden calcular, las siguientes.

II

ECUACIONES BICUADRADAS

Son de la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Prescindiendo de la resolución que es muy conocida, tratemos de la transformación de la expresión de la forma

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

en la suma o diferencia de dos radicales simples, que tiene mucha importancia.

Como sabemos, la resolución, de la ecuación bicuadrada conduce a la forma

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}};$$

es decir, que corresponde a la extracción de la raíz cuadrada de una cantidad en parte racional y en parte irracional. Se puede transformar estas expresiones en la suma o diferencia de dos radicales simples.

Para esto vamos a suponer que *a* y *b*, sean cantidades racionales y *b* cantidad positiva. Entonces podemos poner la siguiente igualdad:

$$(\alpha) \quad \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Siendo *x* i *y* desconocidas y con la condición de ser racionales. Elevemos al cuadrado

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy} = x + y + \sqrt{4xy}$$

Ahora aplicando el principio aquél: cuando en una identidad existe una parte racional y otra irracional, tenemos que las partes racionales son entre sí, como las irracionales; es decir

$$(1) \quad a=x+y$$

$$(2) \quad \sqrt{b}=\sqrt{4xy}$$

Elevando al cuadrado la (2)

$$b=4xy; \text{ de donde } xy=\frac{b}{4}$$

y como conocemos la suma y el producto, podemos formar la ecuación, que será:

$$X^2-aX+\frac{b}{4}=0; \text{ de donde}$$

$$(3) \quad \left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = X = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{b}{4}} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-b}}{2}$$

y tomaremos para x el signo más i para y el signo menos.

Ahora en el caso que a^2-b sea cuadrado perfecto, haremos $a^2-b=c^2$, o sea

$$\sqrt{a^2-b}=c;$$

luego reemplazando en (3), se tendrá

$$x=\frac{a+c}{2}, \text{ i } y=\frac{a+c}{2}$$

por último reemplazando estos valores en la ecuación (α)

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

Consideremos un ejemplo numérico; se trata de demostrar que

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$$

se puede poner

$$(\alpha) \quad \sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

en virtud de lo anterirmente visto.

Elevando al cuadrado nos da:

$$2-\sqrt{3} = x+y-\sqrt{2xy}$$

aplicando el principio anterior tendremos:

(1) $2=x+y$

(2) $\sqrt{3} = 2\sqrt{xy}$ elevando al cuadrado esta última

(3) $3=4xy$, elevando al cuadrado la (1)

(4) $4=x^2+y^2+2xy$, restemos de ésta la (3), tendremos

$-3=-4xy$ y nos da:

$1=x+y-2xy=(x-y)^2$

Ahora como lo (4) es igual a $(x+y)^2$ se puede poner

$(x+y)^2=4$

$(x-y)^2=1$; extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros obtenemos

$x+y=\sqrt{4}=2$

$x-y=\sqrt{1}=1$; sumando y restando estas dos ecuaciones nos da

$$2x=3;\ x=\frac{3}{2}$$

$$2y=1;\ y=\frac{1}{2}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (α), queda demostrada la igualdad.

III

Consideremos las otras ecuaciones.

La ecuación recíproca, su forma es $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$.

La binomia es $x^m \pm A=0$.

La trinomia es $ax^{2n}+bx^n+c=0$.

Y la ecuación cúbica da Kardán cuya forma es $x^3+ax+b=0$.

Todas estas ecuaciones son muy conocidas y como el objeto principal de estos breves apuntamientos, es encontrar una regla que sin el auxilio del cálculo superior, se pueda resolver ciertas ecuaciones de forma y grado diferentes a las enunciadas. Voy a servirme de algunos ejemplos para luego deducir la regla.

Principiemos por el caso más simple.

(1º) Sea la ecuación numérica

$$x^5-1=0$$

tenemos que entre las aplicaciones de la división, este binomio es divisible por $x-1$; puesto que al reemplazar **x** por **1** se anula; en efecto $1-1=0$; por lo tanto

$x^5-1: x-1=x^4+x^3+x^2+x+1$; es decir

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$; tenemos un producto de dos factores igual a cero; luego

(1) $x-1=0$, y

(2) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$; de la (1)

$x=1$; y de la (2)

$x^4+x^3+x^2+x+1=0$; es una ecuación completa del cuarto grado; pero como es recíproca ya se reduce a una de las formas conocidas, que sabemos resolver.

Como se ve, en este caso, para resolver esta ecuación hemos tenido necesidad de acudir a las aplicaciones de la división de un polinomio por un binomio de la forma $x-a$.

(2º) Sea la ecuación literal del tercer grado

(1) $ax^3+bx^2+bx+a=0$

Por definición: se dice que un polinomio es idénticamente nulo ($P=0$), cuando por cualquiera de los valores que se puede dar a la variable x se anula este polinomio.

Hagamos $x=-1$; reemplazando en (1) tendremos

$$-a+b-b+a=0.$$

Entonces anulándose el polinomio por este valor digo, que éste es divisible por el binomio $x+1$. En efecto:

$ax^3+bx^2+bx+a:\ x+1=ax^2-ax+a+bx$; luego

$$ax^3+bx^2+bx+a=(x+1)\ (ax^2-ax+bx+a)$$

Por lo tanto mediante este procedimiento he transformado la ecuación

ax^3+bx^2+bx+a, en el producto de dos factores

$$(x+1)\ (ax^2-ax+bx+a)=0$$

Ahora como este producto es igual a cero, entonces

$$x+1=0 \quad y$$

$$ax^2+x\ (b-a)+a=0.$$

Y hemos obtenido dos ecuaciones, la primera del primer grado y la segunda una ecuación completa del segundo grado que sabemos resolverla.

(3º) Sea la ecuación del cuarto grado

$$x^4-8x^3+2x^2+32x+21=0$$

Aplicando el procedimiento anterior, hagamos $x=-1$ y reemplazando este valor en (1), tendremos

$1+8+2-32+21=32-32=0$; luego el polinomio es divisible por el binomio $x+1$; en efecto

$x^4-8x^3+2x^2+32x+21:\ x+1=x^3-9x^2+11x+21$; o sea

$$x^4-8x^3+2x^2+32x+21=(x+1)\ (x^3-9x^2+11x+21)=0$$

por tanto esta ecuación se ha transformado en,

$(x+1)\ (x^3-9x^2+11x+21)=0$; de donde

(1) $\quad x+1=0$ y

(2) $\quad x^3-9x^2+11x+21=0$, de la (1)

$$x'=-1$$

En la segunda ecuación, hagamos asimismo $x=-1$ y sustituyamos en la (2), obtenemos

$-1-9\quad 11+21=21-21=0$; luego esta segunda ecuación es divisible por el binomio $x+1$; entonces

$$x^3-9x^2+11x+21:(x+1)=x^2-10x+21; \text{ de donde}$$

$$x^3-9x^2+11x+21=(x+1)\ (x^2-10x+21)=0; \text{ o sea}$$

$$(3)\qquad x+1=0, \text{ y}$$

$$(4)\qquad x^2-10x+21=0; \text{ de la (3) obtenemos}$$

$x''=-1$, y la (4) es una ecuación del segundo grado, resolviéndolo será:

$$x^2-10x+21=0$$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{100-84}}{2}=\frac{10\pm4}{2}$$

$$x''=7\quad x'''=3$$

y así hemos obtenido los cuatro valores de x.

Ahora bien: en este caso observamos que el polinomio

$$x^4-8x^3+2x^2+32x+21=0$$

según el resultado obtenido se puede dividir por los binomios $x+1$, por $x-3$ y también por $x-7$; luego según uno de los principios de los caracteres de divisilidad, este polinomio se podrá dividir por el producto de los dos binomios, o por el producto de los tres.

Dividamos el polinomio por el producto de los dos factores binomiales $(x+1)\ (x-3)=x^2-2x-3$

$$x^4-8x^3+2x^2+32x+21:\ x^2-2x-3=x^2-6x-7, \text{ o sea}$$

$$x^4-8x^3+2x^2+32x+21=(x^2-2x-3)\ (x^2-6x-7)=0$$

de donde

$$x^2-2x-3=0; \quad y$$

$x^2-6x-7=0$ y así hemos reducido a dos ecuaciones del segundo grado conocidas.

(4.º) Sea la ecuación del quinto grado

$$3x^5+5x^4-15{,}75x^3-15{,}75x^2+5x+3=0.$$

Según lo anteriormente visto, tenemos que esta ecuación se anula también por el valor $x=-1$; verifiquemos

$-3+5+15{,}75-15{,}75-5+3=0$, luego el polinomio es divisible por $x+1$; en efecto

$$3x^5+5x^4-15{,}75x^3-15{,}75x^2+5x+3:\ x+1=3x^4+2x^3-$$
$$17{,}75x+2x+3$$

$$3x^5+5x^4-15{,}75x^3-15{,}75x^2+5x+3=(x+1)\ (3x^4+2x^3-$$
$$17{,}75x^2+2x+3)=0.$$

Como este producto de dos factores es igual a cero tenemos

$x+1=0$ y

$3x^4+2x^3-17{,}75x^2+2x+3=0$; ésta como se ve es una ecuación recíproca que sabemos resolverla.

Con todos estos ejemplos que hemos visto podemos ya deducir la regla.

Para resolver esta clase de ecuaciones debemos buscar cuales son los valores que dados a la variable x anulan el polinomio; una vez encontrados éstos, se dividirá dicho polinomio por los binomios de la forma $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, etc.; o por el producto de estos factores binomiales, observando que los términos a, b, c, etc., pueden tomar los valores 1 ó -1, 2 ó -2, 3 ó -3, etc., y de esta manera habremos transformado esta clase de ecuaciones en las de forma conocida, que dejamos indicado anteriormente.