Por el Profesor de Ingeniería Civil,

SR. DN. RAFAEL ANÍBAL JARRIN.

COMPLEMENTO AL CURSO DE HIDRAULICA

(Continuación del estudio publicado en el No. 260 de los Anales de la Universidad Central.

DETERMINACION ECONOMICA DE LA PENDIENTE DE UN CANAL, O DE LA PERDIDA DE CARGA DE UNA TUBERIA, QUE DERIVE UN GASTO Q. DE UN RIO DE PENDIENTE I_1. HACIA UN LUGAR DE NIVEL DADO

Enunciamos uno de los problemas más importantes de aducción de aguas, el que se encuentra con frecuencia en los proyectos de su abastecimiento para la irrigación de una zona agrícola o para alimentación de las poblaciones, lo cual parece que en el Ecuador tendrá en breve amplia realización, pues, entre las garantías fundamentales que nuestra moderna Constitución nos concede, se ha fijado explícitamente una por la cual el Estado "atenderá, preferentemente, al saneamiento de las poblaciones y a proporcionarles agua potable." Justo, con esto se ha señalado un imperativo de la cultura, base primordial para un creciente progreso y civilización nacionales.

I

Examinemos el primer punto del problema enunciado, la determinación económica de la pendiente de un canal de derivación, considerando los diferentes casos que se presentan en la práctica.

A.—Para concretar, supongamos el caso de una población sentada a orillas de un río, del cual se proyecta llevar agua por medio de un canal al tanque alimentador de la tubería de distribución. El lugar y suficiente altura de este tanque se fijan según las condiciones locales. Sea H la diferencia de nivel entre la superficie del agua en el tanque y un punto más próximo sobre el perfil del río. (fig. 1). Sobre este, el punto de toma del agua debe encontrarse a superior nivel que el de la superficie del agua en el tanque, y dentro de esta condición, mientras más suba el punto de toma, mayor será la longitud del canal de derivación y también su pendiente. Para un mismo gasto Q, la sección ω de corriente en el canal es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su pendiente I, o sea:

$$\omega = \frac{Q}{C\sqrt{RI}} \qquad [1]$$

Ahora bien, en un mismo terreno, el costo de excavación de un canal, es proporcional a su volumen, o sea al producto de su longitud L por su sección ω [canal uniforme]; y si p es el costo de excavación de la unidad de volumen, la de todo el canal será.

$$P = p\,\omega\,L. \qquad [2]$$

En el caso considerado, a cada punto de toma corresponderá un valor para ω, otro para L y el consiguiente producto para P; pero como al subir el punto de toma sobre el río, aumenta L y disminuye ω, según la ecuación (1), puesto que I aumenta, se comprende que habrá un punto de toma que corresponda al menor valor del costo P, y este punto conveniente es el que a su vez determinará la pendiente más económica del canal.

Representemos el perfil vertical real del recorrido del río de pendiente I_1, desde el punto de toma M para el canal de derivación, hasta el que se encuentra próximo al tanque T y a un nivel H bajo de este, sea MR (Fig. 1)

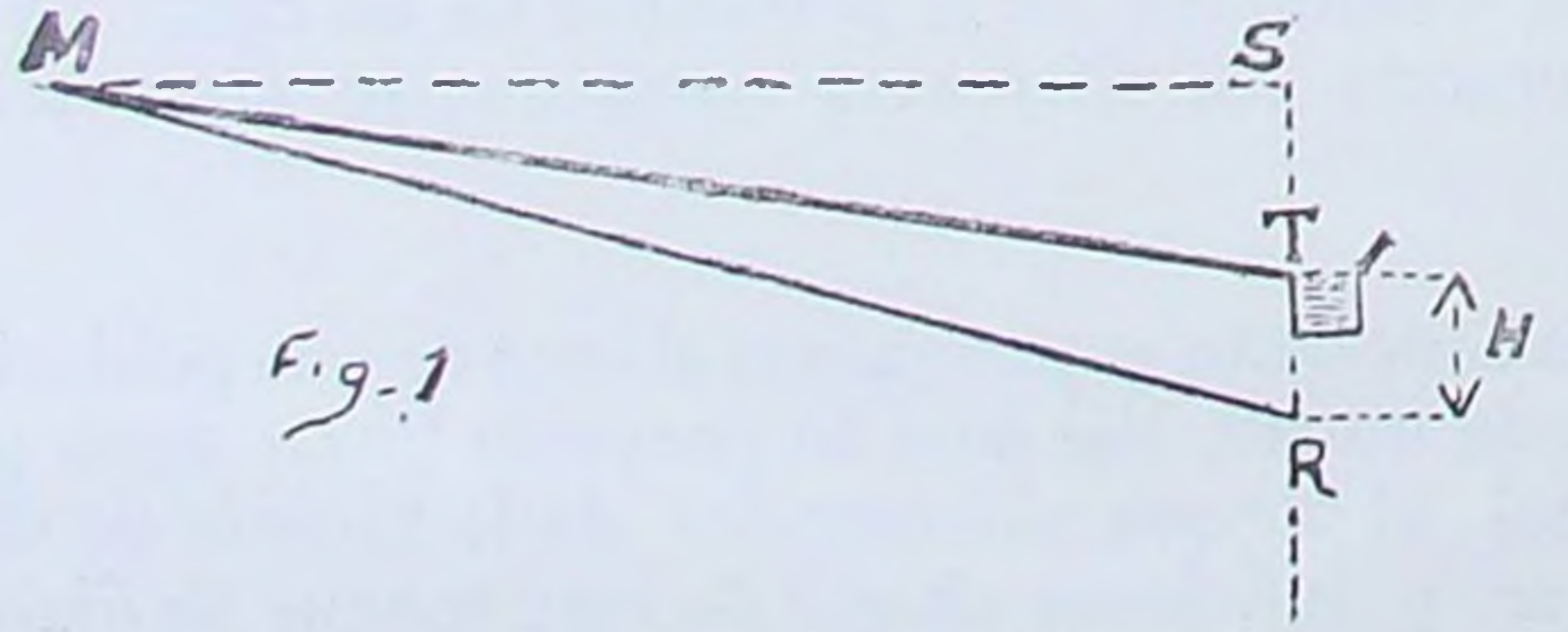

Fig. 1

También representemos el perfil vertical real del recorrido total del canal de derivación de pendiente I, y cuya longitud L es por lo regular muy poco diferente de la porción de río arriba considerada; sea MT.

En realidad, los ángulos SMR y SMT que forman las líneas de perfil real con la horizontal MS y cuyas tangentes son respectivamente I_1 e I, tienen un valor muy pequeño [a una pendiente de 0,01 corresponde un ángulo de $0^0-35'$]; luego, sin error apreciable se puede sustituir la tangente por el seno, y escribir:

$$\overline{SR} = L\,I_1,$$

$$\overline{SR} = LI,$$

$$\overline{SR} - ST = H = L\,[I_1 - I],$$

o sea:

$$L = \frac{H}{I_1 - I} \qquad [3]$$

Si, además, se quiere adoptar la sección trapezoidal más económica, o sea la de perímetro mojado mínimo, y si, según la naturaleza del terreno o de las paredes de la cuneta, se impone un valor conveniente θ para su ángulo de inclinación, sabemos que el radio medio R tiene por expresión:

$$R = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega \text{ sen } \theta}{2 - \cos \theta}} \quad ;$$

Este valor en la [1], elevada al cuadrado, nos dá.

$$\frac{Q^2}{C^2\ \omega^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega \text{ sen } \theta}{2 - \cos \omega}} \quad ;$$

o sea:

$$\omega^{5/2} = \frac{2Q^2\sqrt{2 - \cos \theta}}{C^2\, I\sqrt{\text{sen } \theta}}$$

$$\omega = \left[\frac{2Q^2\sqrt{2 - \cos \theta}}{C^2\sqrt{\text{sen}\theta}}\right]^{2/5} \times \frac{1}{I^{2/5}} = \frac{A}{I^{2/5}} \quad ; \qquad [4]$$

haciendo, para simplificar:

$$A = \left[\frac{2Q^2\sqrt{2-\cos\theta}}{C^2\sqrt{\operatorname{sen}\theta}} \right]^{2/5}$$

Sustituyamos en la ecuación [2] L y ω por sus valores respectivos en función de I que dan las ecuaciones [3] y [4]; se tiene:

$$P = \frac{PHA}{(I_1 - I)\, I^{2/5}}$$

Para que P tenga un valor mínimo se requiere que su derivada, con respecto a la variable I, sea igual a cero:

$$\frac{dP}{dI} = \frac{-pHA\left[\frac{2}{5} I^{-3/5}(I_1 - I) - I^{2/5}\right]}{\left[(I_1 - I)\, I^{2/5}\right]^2} = O$$

y para esto, es necesario que la cantidad que figura dentro del paréntesis rectangular del numerador sea igual a cero, o sea:

$$\frac{2}{5}\,\frac{I_1 - I}{I^{3/5}} = I^{2/5}$$

$$I = \frac{2}{7}\, I_1$$

Con esta pendiente I, el gasto Q dado y el ángulo θ, calcularemos la sección ω por medio de la ecuación (4), partiendo de un primer valor aproximado que se dé para el coeficiente C. Este primer resultado del cálculo de ω corresponderá a un valor de h y por consiguiente de

$$R = \frac{h}{2}\ ;$$

a su vez, este primer valor de R corresponderá en las tablas respectivas, según la naturaleza de las paredes del canal, a un cierto valor del coeficiente C que generalmente no será el mismo que el adoptado para el cálculo primero. Procederemos a calcular ω con este 2º valor de C, que será mucho más aproximado que el

1º al valor exacto, y de nuevo como en el caso anterior llegaremos al valor correspondiente de

$$R = \frac{h}{2},$$

y por medio de este veremos C en las tablas respectivas, al que compararemos con el que se empleó en el cálculo por segunda vez; si es igual o poco diferente, C queda determinado.

Pocas veces habrá que proceder a un tercer cálculo de ω.

Para estos cálculos por aproximaciones sucesivas se sirve comodamente de tablas que dan la potencia 5/2 de los valores ω.

Con esto tenemos ya el valor exacto de ω y de

$$h = \sqrt{\frac{\omega \text{ sen } \theta}{2-\cos\theta}};$$

el de la base inferior del trapecio nos dá la ecuación:

$$l = \frac{\omega}{h} - h \text{ cotg } \theta;$$

el de la velocidad media:

$$U = \frac{Q}{\omega}$$

No dejaremos de observar que habrán casos en los que la pendiente así determinada $I = 2/7\ I_1$, resulte excesiva, y en otros, deficiente; es decir que a la velocidad media U corresponderán valores excesivos con respecto a la consistencia de la cuneta, o deficientes en cuanto a que no evitarían la frecuente formación de depósitos en el canal que se proyecta. En consecuencia, habría que disminuir o que aumentar la pendiente. En este último caso, el aumento debe ser tal que la velocidad media sea mayor de 25 centímetros por segundo para aguas lodosas, y mayor de 50 centímetros por segundo para aguas arenosas, a fin de evitar frecuentes limpias del canal.

La represa del río, por medio de un dique dispuesto en el lugar de toma, encauza el agua hacia el canal, previa su decantación. Aún, fuera de este objeto, muchas veces será conveniente la construcción de tal dique en un lugar intermedio del recorrido MR del río, bien sea como regulador del gasto, bien, en especial, para elevar la toma al nivel que corresponda en dicho lugar a la pendiente I ya determinada, con lo cual se consigue disminuir la longitud del canal. Llamando *a* el aumento de altura del agua sobre el río, que ocasiona el dique, esta disminución de longitud será aproximadamente:

$$\frac{a}{H} L$$

Por ejemplo, en el punto medio del recorrido MR del río, el dique debería constituirse para un aumento de altura del agua

$$a = \frac{H}{2},$$

con lo cual la longitud del canal de derivación se reduciría aproximadamente a la mitad, y en consecuencia su costo. Habrá que comparar esta reducción de costo con el correspondiente al dique para decidir lo más conveniente.

Sin dique de represa para la toma del agua, la longitud del canal de derivación de pendiente $I = 2/7\ I_1$, sería según la ecuación (3):

$$L = \frac{7\ H}{5\ I_1},$$

y su costo total, si el costo unitario p permanece constante, sería según (2).

$$P = \frac{7\ H}{5\ I_1}\ p\ \omega.$$

En esta expresión de P vemos que su valor es proporcional a H; por consiguiente, siempre que se realicen las condiciones del presente estudio, u otras análogas, la localización de un estanque, en que termina un canal de derivación, tiene capital importancia. Por otra parte, hemos observado que para la misma pendiente I se consigue disminuir la longitud del canal adoptando un dique de represa para la toma del agua, y que esta disminución de longitud depende de la relación $\frac{a}{H}$.

B. — En el estudio que dejamos hecho se ha considerado exclusivamente el costo de excavación del canal, y proporcionalmente a su volumen. Ahora consideremos el caso del mismo canal que requiera revestimiento de espesor dado, según el material adoptado, para sus paredes. En este caso el costo del revestimiento P_r es proporcional a la superficie χ L revestida, y si p_r es el que corresponde a la unidad de superficie, el revestimiento total costará:

$$P_r = p_r \chi L . \qquad (5)$$

Como anteriormente, busquemos el punto de toma del agua y en consecuencia la pendiente I que corresponda exclusivamente al menor valor del costo P_r. En el caso actual, con mayor razón que en el 1º, suponemos también la sección trapezoidal de perímetro mojado χ mínimo, y sirviéndonos de las mismas ecuaciones anteriores podemos reemplazar en la (5) las variables χ y L por sus expresiones en función de la variable I. Se tiene primero, reemplazando L por su valor según la ecuación (3) y el perímetro mojado χ, por $\frac{\omega}{R}$:

$$P_r = p_r \frac{H}{I_1 - I} \frac{\omega}{R} .$$

En esta última, reemplacemos ω por su valor según la ecuación (4), y R por la expresión correspondientes a la sección trapezoidal de perímetro mojado mínimo:

$$R = \frac{h}{2} = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \operatorname{sen} \theta}{2 - \cos \theta}} ;$$

se tendrá:

$$P_r = p_r \frac{H \ A}{(I_1 - I) \ I^{2/5}} \times \frac{2 \sqrt{2 - \cos \theta}}{\sqrt{\omega \operatorname{sen} \theta}} = \frac{2 \ p_r \ H \ A \ \sqrt{2 \cos \theta}}{(I_1 - I) \ I^{2/5} \sqrt{A \operatorname{sen} \theta}} I^{1/5}$$

Hagamos:

$$B = \frac{2 \ p_r \ H \ A \ \sqrt{2 - \cos \theta}}{\sqrt{A \operatorname{sen} \theta}} ,$$

y escribiremos simplemente:

$$P_r = \frac{B}{(I_1 - I)\, I^{1/5}} \qquad (5')$$

Para el mínimo P_r, su derivada con respecto a la variable I debe ser igual a cero:

$$\frac{d\,P_r}{d\,I} = \frac{-B\left[\frac{1}{5}(I_1 - I)\, I^{-4/5} - I^{1/5}\right]}{\left[(I_1 - I)\, I^{1/5}\right]^2} = 0 \quad ;$$

y para esto se requiere que la cantidad que figura dentro del paréntesis rectangular del numerador sea igual a cero; o sea:

$$\frac{I_1 - I}{5\, I^{4/5}} = I^{1/5} \; ;$$

$$I = \frac{I_1}{6}.$$

Este resultado es inferior al de la pendiente que corresponde al caso A) En consecuencia, la pendiente más económica con respecto al costo total de excavación y revestimiento de un canal de derivación, dentro de las condiciones del presente estudio, tendrá un valor comprendido entre

$$I = {}^2/_7\, I_1 \text{ e } I = \frac{I_1}{6}$$

aproximándose tanto más a este último cuanto mayor sea el costo de revestimiento con respecto al de excavación. Esto sucederá especialmente en canales de pequeña sección sobre terrenos flojos que requieren revestimiento de mampostería. A este respecto, para la adopción más favorable de I, se estudiará cuidadosamente sobre el plano topográfico que se prepara para el proyecto, y tomando en cuenta cada una de las consideraciones expuestas, analíticas y prácticas, puntos más accesibles y adecuados para la toma sobre el río, obras adicionales que correspondan a cada pendiente, etc.

C.— SECCION SEMICIRCULAR REVESTIDA

Apliquemos a esta sección el mismo procedimiento y consideraciones del caso B).

Llamemos ρ al radio del semicírculo; los valores respectivos de la sección, del perímetro mojado y del radio medio son :

$$\omega = \frac{\pi \rho^2}{2}, \qquad \chi = \pi \rho, \qquad R = \frac{\rho}{2}$$

Con estos valores, la ecuación del gasto se escribe :

$$Q = C \omega \sqrt{RI} = C \frac{\rho^{5/2}}{2\sqrt{2}} \pi \sqrt{I} \; ;$$

de donde :

$$\rho^{5/2} = \frac{2\sqrt{2}\,Q}{C\pi\sqrt{I}}; \qquad \rho = \left[\frac{2\sqrt{2}\,Q}{C\,\pi\,\sqrt{I}}\right]^{2/5}$$

y la expresión (5) en función de I será :

$$P_r = p_r\,\chi\,L = p_r\,\pi\,\rho\,\frac{H}{I_1 - I} = \frac{p_r\,\pi\,H}{I_1 - I}\left[\frac{2\sqrt{2}\,Q}{C\,\pi}\right]^{2/5}\frac{1}{I^{1/5}};$$

y haciendo :

$$B_1 = p_r\,\pi\,H\left(\frac{2\sqrt{2}\,Q}{C\,\pi}\right)^{2/5} ,$$

escribiremos simplemente :

$$P_r = \frac{B_1}{(I_1 - I)\,I^{1/5}} ,$$

expresión que tiene la misma forma que en el caso anterior; luego para el mínimo de P_r también se requiere que

$$I = \frac{I_1}{6}$$

D.— Cuando el valor dado para Q es muy grande en el caso A), también lo es el que corresponde a ω, y no será conveniente la adopción del trapecio de perímetro mojado mínimo, puesto que convendrá más bien fijar el valor de h, y si este es relativamente pequeño con respecto a la base l, el radio medio R varía muy poco con respecto a las variaciones de I; de manera que en el estudio analítico del caso A), que consideramos de nuevo con las presentes modificaciones, podremos simplemente sustituir ω y L de la ecuación [2] por sus valores respectivos que figuran en las ecuaciones (1) y (3), y escribir:

$$P = \frac{pQH}{C\sqrt{R}\,(I_1 - I)\sqrt{I}} \quad ;$$

$$\frac{dP}{dI} = -\frac{pQh}{C\sqrt{R}}\left[\tfrac{1}{2}(I_1 - I)I^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{I}\right] = 0 \quad ;$$

luego, para el mínimo de P se requiere que

$$I = \frac{I_1}{3}$$

E.— Cuando la adquisición del terreno, que debe ocupar el canal de derivación, es de un costo apreciable, se la debe tomar en cuenta para la determinación económica de I. Como por lo menos a un borde del canal se añade una banqueta destinada a la circulación de un obrero, en toda su longitud, el área total ocupada por un canal descubierto es poco diferente de la superficie mojada χL. Si P es el costo medio de adquisición de la unidad de terreno, el costo del área ocupada será aproximadamente

$$P = p\chi L;$$

pero esta expresión tiene la misma forma que la ecuación [5] del caso B); luego, a la menor área de ocupación corresponderá la pendiente

$$I = \frac{I_1}{6}$$

Hemos considerado hasta aquí seis casos independientes. Cuando al mismo tiempo se deba considerar dos o más de ellos, la pendiente más económica corresponderá a un valor comprendido entre los resultados de los casos componentes.

II

Examinemos el 2º punto del problema enunciado, la determinación económica de la pérdida de carga de una tubería que derive un gasto Q, de un río de pendiente I_1, hacia un lugar de nivel dado.

También para concretar, suponemos como en el caso A) las primeras consideraciones hechas para un canal, y que hoy aplicamos a la tubería de derivación, cuya pérdida de carga J por unidad de longitud es análoga a la pendiente I del canal. Se tendrá igualmente que a cada punto de toma del agua sobre el río corresponderán valores respectivos para la longitud L de la tubería y su pérdida de carga J, y que mientras más suba el punto de toma, aumentarán dichos valores, pero disminuirá el diámetro necesario para un mismo gasto Q de la derivación.

Tomando en cuenta que el costo de una tubería ya instalada es proporcional a su longitud y aproximadamente a su diámetro D, y si p es el costo unitario, o sea por unidad de longitud y de diámetro, podremos escribir para la expresión del costo total:

$$P = p\,L\,D \qquad [6]$$

Utilicemos la misma figura [1] en la cual el perfil vertical que representa la línea MT corresponderá en el presente caso a la línea de los niveles piezométricos de la tubería. Según esto, en vez de la ecuación [3] obtendremos:

$$L = \frac{H}{I_1 - J} \qquad (7)$$

De la ecuación del gasto

$$Q = \pi \frac{D^2}{4} U \quad ,$$

y de la circulación

$$\frac{DJ}{4} = \beta U^2 \quad ,$$

eliminemos la velocidad media U, y obtendremos:

$$J = \frac{64\delta Q^2}{\pi^2 \ D^5} \quad ,$$

o sea:

$$D = \left(\frac{64\delta Q^2}{\pi^2 \ J} \right)^{1/5} \qquad [8]$$

Con los valores de L y D, según las ecuaciones [7] y [8], en la ecuación [6], se tiene la expresión de P en función de J:

$$P = \frac{p \ H}{I_1 \text{-} J} \left(\frac{64\delta Q^2}{\pi^2 \ J} \right)^{1/5}$$

y haciendo:

$$B_2 = pH \left(\frac{64\delta Q^2}{\pi^2} \right)^{1/5}$$

escribiremos simplemente:

$$P = \frac{B_2}{(I_1 - J) J^{1/5}}$$

expresión que tiene la misma forma que la de las ecuaciones [5], y [5''] de los casos B) y C); luego, para el mínimo de P también se requiere que:

$$J = \frac{I_1}{6}$$

Con este valor de J y el gasto Q dado, buscaremos en las tablas el diámetro correspondiente. La longitud de tubería según la ecuación [7], reemplazando J por $I_1/6$, sería:

$$L = \frac{6H}{5I_1}$$

y la velocidad media

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

Las últimas consideraciones expuestas en el caso A), relativas a la conveniencia de un dique de represa, se aplican de una manera análoga a la tubería de derivación.