Por el Profesor de Matemáticas Superiores e Hidráulica en la Universidad Central,

Sr. Dn. Rafael Aníbal Jarrín.

Teoría de la circulación del agua sobre un vertedero en pared delgada, deducida de la del orificio, y aplicaciones

Teoría de la circulación del agua sobre un vertedero en pared delgada, deducida de la del orificio, y aplicaciones

Sabemos que un vertedero puede considerarse como el caso límite de un orificio cuyo plano de carga ha ido descendiendo hasta dejar libre su borde superior. En consecuencia, se puede sacar la fórmula del gasto de un vertedero, deducida de la del orificio de grandes dimensiones con relación a su carga.

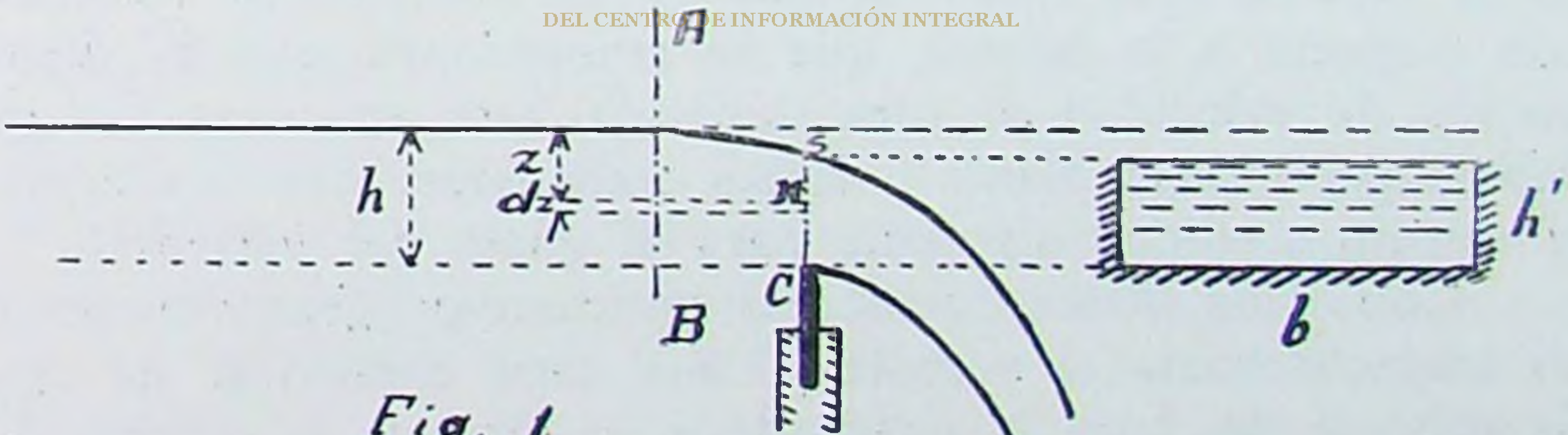

Fig. 1

Consideremos un vertedero dispuesto en pared delgada y en el cual la sección con un plano vertical que pase por la cresta horizontal C (Fig. 1) sea un rectángulo de base b y altura h'. Suponemos un estanque de alimentación directa, de grandes dimensiones superficiales con relación a las del vertedero, y cuyo plano horizontal libre se encuentra a una altura h sobre la cresta C. El teorema de Torricelli, aplicado a un líquido perfecto (carente de viscosidad), daría para la velocidad V de salida de la sección del vertedero de las moléculas n que se encuentren a la profundidad z bajo la superficie libre del estanque, la expresión general:

$V = \sqrt{2gz}$. (g = aceleración de la gravedad)

Según esta expresión el valor de V iría decreciendo desde las moléculas que atraviesan inmediatamente sobre la cresta C, para las cuales la velocidad sería $\sqrt{2gh}$, hasta las que se encuentran sobre el borde superior de la sección del vertedero, y para las cuales la velocidad sería $\sqrt{2g(h - h')}$.

En el caso de un líquido real, su viscosidad se opone a que las velocidades de salida de la sección del vertedero se realicen según la expresión teórica anterior, pues, por fuerza de dicha viscosidad, las moléculas n tienden a llevar consigo a las que se encuentran sobre ellas dotadas de menor impulso; y así es como esto se cumple sucesivamente hasta las moléculas superficiales s, cuya velocidad alcanza un valor mayor que $\sqrt{2g(h - h')}$. Inversamente, las moléculas n retardan a las inferiores, hasta el punto que las que se encuentran sobre la cresta C están dotadas de una velocidad inferior a $\sqrt{2gh}$. En consecuencia, a partir de cierto plano horizontal intermedio, que atraviese la sección Cs, habrá una compensación en el cambio de las velocidades, debido a la viscosidad del líquido, con respecto a la velocidad teórica. Una molécula que se encuentre por encima de dicho plano en la sección C S estará dotada de un aumento de velocidad con respecto a la teórica, que se compensará con la disminución de velocidad de otra molécula que atraviese C s por debajo del mismo plano. — Estas consideraciones justificarán el cálculo analítico siguiente para el gasto del vertedero.

Como los filetes líquidos se contraen progresivamente en su trayecto hacia el vertedero, una capa elemental de agua de espesor dz, bajo la ordenada z y antes de la sección AB desde donde empieza el descenso de la superficie libre, se reduce al llegar al punto n a un espesor m dz, siendo m un coeficiente de contracción, menor que la unidad y análogo al de los orificios. El débito correspondiente a dicha capa elemental de base b será:

$$dQ = mb\,dz\,\sqrt{2gz}$$

Integrando esta expresión entre los límites z = o y z = h, obtendremos el gasto total:

$$Q = \int_{0}^{h} m\, b\, \sqrt{2\, g\, z}\; dz$$

El valor del coeficiente m para orificios rectangulares en pared delgada vertical se ha fijado en los manuales y cursos de Hidráulica para varias alturas de orificio y varios valores de la carga de agua sobre su borde superior. Al resolver la integral anterior adoptaremos para m el término medio de los distintos valores fijados para un orificio rectangular de pequeña altura (por ejemplo 1 cm., 2 cm. o más, según h) y cuya carga de agua sobre el borde superior varíe en la misma cantidad pequeña desde un valor pequeño hasta h.

Resolvamos la integral y escribiremos:

$$Q = m\, b\, \sqrt{2g} \int_{0}^{h} \sqrt{z}\; d\, z$$

$$= m\, b\, \sqrt{2g} \left[\frac{2}{3}\, h^{\frac{3}{2}} \right];$$

o sea:

$$Q = \frac{2}{3}\, m\, b\, h\, \sqrt{2\, g\, h}. \qquad (\alpha)$$

Aplicaciones:

En la expresión anterior que nos da el gasto Q habrá que determinar para cada caso el valor numérico que corresponde al coeficiente m. Para que en este valor deje de influir la contracción lateral, siempre muy difícil de determinarse, es suficiente que la base b sea bastante mayor que la carga h. Además suponemos que la capa de agua del vertedero cae libremente como en la figura.

1°. Sea un vertedero de sección rectangular, dispuesto en pared delgada y con un estanque de alimentación como el considerado en el presente estudio. La carga h = 10 cm.

A esta carga h la descomponemos en 10 partes iguales y en un manual o curso de Hidráulica vemos los nueve valores siguientes del coeficiente m para orificios rectangulares de 1 cm. de altura, en pared delgada vertical y según la carga considerada sobre el borde superior del orificio:

Carga sobre el borde superior del orificio	Valor del coeficiente m
1 cm.	0.701
2 »	0.694
3 »	0.688
4 »	0.683
5 »	0.679
6 »	0.676
7 »	0.673
8 »	0.670
9 »	0.668
	Suma 6.132

El término medio de los nueve valores es:

$$m = \frac{6,132}{9} = 0,681$$

$$\frac{2}{3} m = 0,454$$

2º. La carga h = 20 cm.

También la descomponemos en diez partes iguales para la determinación del valor medio de m, y como en el caso anterior, vemos para orificios rectangulares de 2 cm. de altura los nueve valores siguientes:

Carga sobre el borde superior del orificio	Valor del coeficiente m
2 cm.	0,659
4 »	0,658
6 »	0,657
8 »	0,656
10 »	0,654
12 »	0,653
14 »	0,651
16 »	0,650
18 »	0,649
	Suma 5,887

El término medio de los nueve valores es:

$$m = \frac{5,887}{9} = 0,654$$

$$\frac{2}{3} m = 0,436.$$

3o.—La carga h = 1 metro.

También la descomponemos en diez partes iguales. Para orificios rectangulares de 10 cm. de altura vemos los nueve valores siguientes:

Carga sobre el borde superior del orificio	Valor del coeficiente m
10 cm.	0,611
20 »	0,615
30 »	0,616
40 »	0,617
50 »	0,617
60 »	0,617
70 »	0,618
80 »	0,616
90 »	0,615
	Suma 5,542

El término medio de los nueve valores es.

$$m = \frac{5,542}{9} = 0,616$$

$$\frac{2}{3}\ m = 0,411$$

Siguiendo el mismo procedimiento para cada valor de h podríamos formar una tabla que nos dé el correspondiente valor de $^2/_3$ m de la expresión (α) del gasto Q del vertedero.

Quito, Julio de 1930.