Por el Profesor de Estática Gráfica de la Universidad Central,

Sr. Ingeniero Dn. Abel S. Troya.

Curso de Estática Gráfica

PROLOGO

En todos los tiempos y lugares, ahorrar trabajo y simplificar el proceso de las actividades del hombre, ha sido aspiración constante y universal. Hé aquí por qué la Estática Gráfica, simple en sus métodos y desenvolviéndose cada vez más, ha ensanchado el radio de sus aplicaciones geométricas como el medio más sencillo y más claro para el conocimiento de la Ciencia: medio por el cual las construcciones gráficas sustituyen al análisis, y cuyo carácter intuitivo y concreto facilita la rápida comprensión de los principios en que se basan y de los resultados obtenidos.

Esta cualidad permite al estudiante e ingeniero conservar conocimientos indispensables en la práctica profesional, los cuales, esencialmente abstractos y complejos, fácilmente se borran del entendimiento humano.

De otra parte, en la Estática Gráfica, saltan a la vista errores que es dable corregir inmediatamente; en tanto que en el método analítico esos errores pasan inadvertidos.

Deseoso, pues, de facilitar a mis alumnos el estudio del Arte de las Construcciones y de divulgar los principios que la Estática Gráfica resuelve con todo rigor científico, he puesto manos a la obra de recopilar mis conferencias pronunciadas en la Universidad Central, en más de dos lustros que me ha cabido la honra de enseñar la asignatura, materia de este trabajo.

Juzgo, además, que estas páginas llenarán siquiera en parte, el vacío que todos notan en nuestra bibliografía, en orden a la falta de obras de esta clase en lengua castellana y convenientemente adaptadas a las necesidades de nuestra enseñanza; de manera que sean un auxilio poderoso para la solución de todos los problemas que se presentan en el ejercicio profesional.

Listo estoy a acoger con verdadera complacencia las indicaciones que mis lectores quieran hacerme.

Entre tanto, si de alguna manera he contribuido a hacer una obra útil, no obstante las imperfecciones que encierra, quedarán suficientemente recompensados mis desvelos.

A. S. Troya.

Curso de Estática Gráfica

CAPITULO I

Definiciones

1.—Se denomina *Estática* a la parte de la mecánica que trata del equilibrio de los cuerpos, sometidos a la acción de fuerzas.

Estática gráfica o grafoestática es, por consiguiente, la parte de la mecánica que tiene por objeto resolver los problemas de la *Estática* por medio de construcciones geométricas; los resultados se obtienen directamente de la escala del dibujo.

2.—*Fuerza* se llama, toda causa capaz de producir o modificar el estado de movimiento o reposo de un cuerpo. Estas se manifiestan por su acción; así fuerzas son por ejemplo: la de la gravedad, la inercia, la elasticidad, la cohesión, la eléctrica, la térmica, etc.

Una fuerza está definida por:

1º. La magnitud de la fuerza, que es la medida de su eficacia y cuya unidad de medida es el kilogramo.

2º. El sentido o dirección de la fuerza, que es la línea recta según la cual tiende ella a mover el cuerpo sobre el cual actúa.

3º. El punto de aplicación de la fuerza, que es el punto de un cuerpo sobre el cual obra directamente la fuerza.

Para representar gráficamente una fuerza se lo hace por medio de un segmento, haciendo uso de una escala de fuerzas, cuya unidad corresponde a un peso determinado. Por ejemplo si se pone que 1 cm. = 100 kg., un segmento de 5 cm. representará una fuerza de 500 kg.

La dirección de una fuerza se determina por medio de una

fig. 1

flecha, como en la fig. 1 o por la sucesión de letras que denotan el origen y el extremo de un segmento; así la fuerza de la figura denota que actúa de *a* hacia *b.*

El vector *ab* se puede prolongar por los dos extremos, obteniendo una línea indefinida que se llama *línea de acción de la fuerza,* y en cualquiera de los puntos se puede considerar que está el de aplicación; puesto que, el equilibrio de un cuerpo no está afectado por el transporte del punto de aplicación de la fuerza a otro cualquiera de su línea de acción.

3.—*Axiomas.*—Las fuerzas son *iguales* cuando tienen la misma magnitud.

Dos fuerzas son *equivalentes* cuando se pueden substituir la una fuerza con la otra, sin modificar el estado mecánico del cuerpo sobre el cual actúa.

A varias fuerzas que forman un *sistema en equilibrio,* se puede añadir o suprimir su acción total sobre un cuerpo, sin modificar el estado mecánico del cuerpo. La suma geométrica de varias fuerzas que forman un sistema en equilibrio es igual a cero.

4.—*Resultante,* es la fuerza única equivalente a la suma geométrica de varias fuerzas; éstas reciben entonces el nombre de componentes: La operación por la que se determina la resultante de un sistema de fuerzas dadas se denomina *composición* de fuerzas. La representación gráfica de todas las fuerzas que obran sobre un cuerpo constituye una figura llamada *diagrama de fuerzas.*

Equilibrante es la fuerza que forma con la resultante un sistema en equilibrio.

5.—La mecánica se funda esencialmente en los principios experimentales que le sirven de base, y los más importantes son:

1º. La condición necesaria y suficiente, para que dos fuerzas aplicadas en un mismo punto estén en equilibrio, es que sean iguales y directamente opuestas.

2º. Si a dos sistemas de fuerzas en equilibrio, se añade un tercer sistema, la suma de los tres sistemas es igual al tercer sistema añadido.

3º. Dos fuerzas desiguales y no directamente opuestas, admiten, como resultante, la fuerza que, en magnitud y dirección, está representada por la suma geométrica de las magnitudes de estas fuerzas.

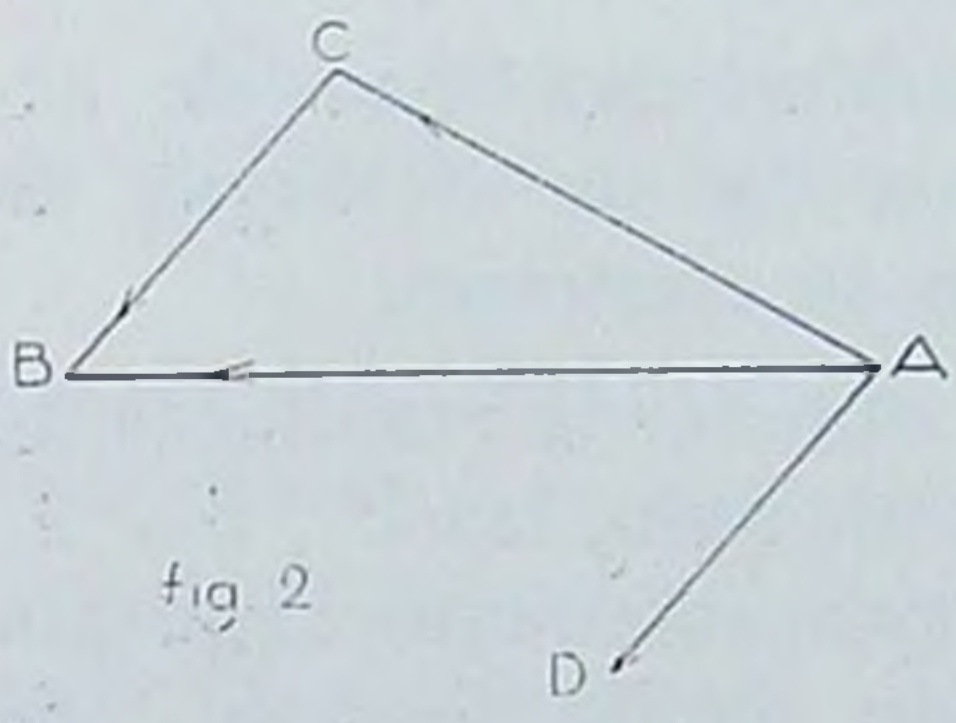

fig. 2

Sea AC y AD las dos fuerzas desiguales, con las que hacemos la suma geométrica, trazando CB = AD, poniéndola cabo a cabo y siguiendo un mismo sentido y entonces se une A y B y se tiene: fig. 2.

$$AC + CB = AB$$

$$AC + AD = AB$$

AB es la resultante del sistema de fuerzas AC y AD.

4º. La resultante de dos fuerzas desiguales y del mismo sentido y de la misma línea de acción, es igual a la suma aritmética de estas fuerzas.

Siguiendo la regla de trazar las fuerzas cabo a cabo una a continuación de otras y siguiendo el mismo sentido la suma geométrica es a la vez aritmética.

5º. La resultante de dos fuerzas desiguales y de sentido contrario, pero de la misma línea de acción, es igual a la diferencia aritmética de las fuerzas.

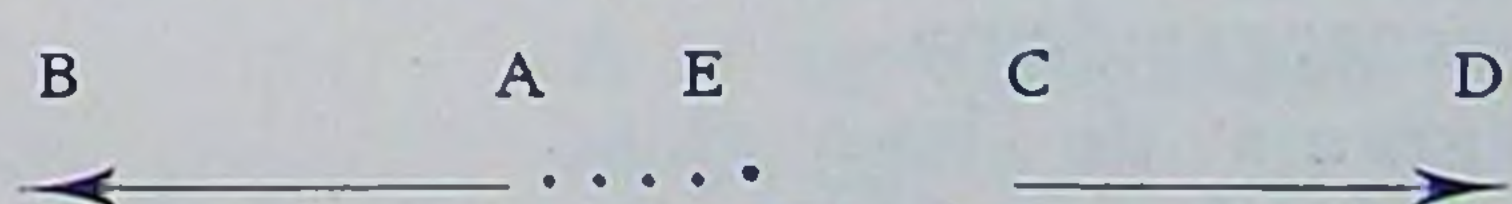

Fig. 3

Sean AB y CD las dos fuerzas dadas, fig. 3; se hace la suma geométrica, llevando a partir de la extremidad B, la magnitud CD, hasta E. AE es a la vez diferencia aritmética y suma geométrica y por consecuencia es la resultante del sistema de fuerzas AB y CD. Esto se puede hacer con dos o más fuerzas.

6.—*Composición de fuerzas concurrentes.* Según hemos visto en el numeral 3o., dos fuerzas se pueden componer formando el triángulo ACB, que se llama el triángulo de las fuerzas.

Si en la fig. 2 se cambia el sentido de AB, se obtiene una nueva fuerza BA, que determina un solo sentido del triángulo de las fuerzas, pues el origen y la extremidad se superponen, y además anula la acción de las fuerzas dadas. Recorriendo el contorno ACBA determinan un mismo sentido. Esta propiedad puede enunciarse así:

Si tres fuerzas concurrentes, con diferentes líneas de acción, se equilibran, se pueden componer en un triángulo de fuerzas y tienen un sentido constante en su contorno.

De aquí que, cuando se trata de obtener la resultante de varias fuerzas que concurren en A, por ejemplo, las F_1, F_2, F_3 y F_4, fig. 4, basta aplicar tres veces el procedimiento expuesto del triángulo de las fuerzas. Se compone primero las dos fuerzas F_1 y F_2 que da la resultante AC; luego ésta con la F_3 se obtiene la resultante AD y, finalmente AD con F_4 lo que da la resultante buscada R. Este método se simplifica trazando en orden a todas las fuerzas dadas cabo a cabo, paralelamente y siguiendo un sentido de manera de formar un contorno poligonal ABCDE y la línea que une el origen con la extremidad es la resultante del sistema, o sea la suma geométrica de los vectores que la representan, y pasa por el punto de concurso.

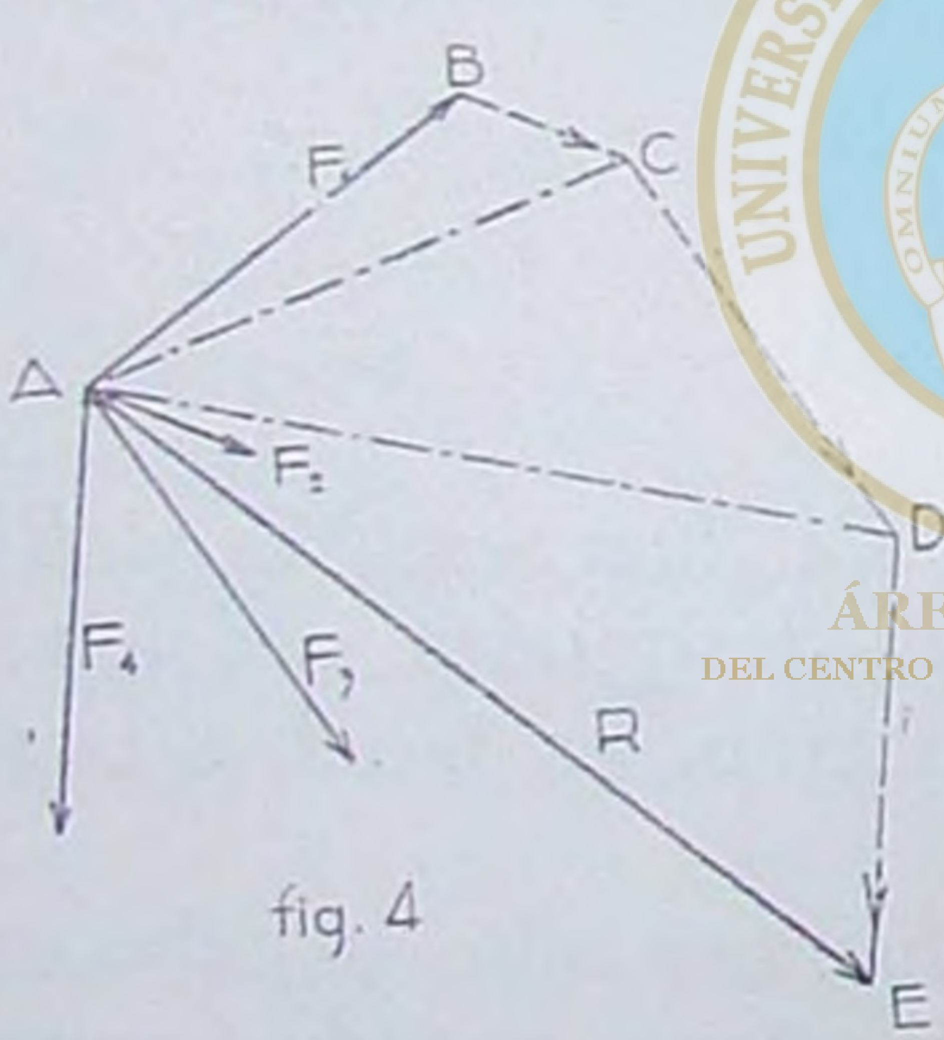

fig. 4

Para no recargar demasiado el diagrama de las fuerzas se puede hacer la composición, en una figura especial; partiendo de un punto arbitrario A, fig. 5, se van llevando sucesivamente las diferentes fuerzas dadas de modo que formen un contorno poligonal recorriendo en un solo sentido; el lado AE que cierra al polígo-

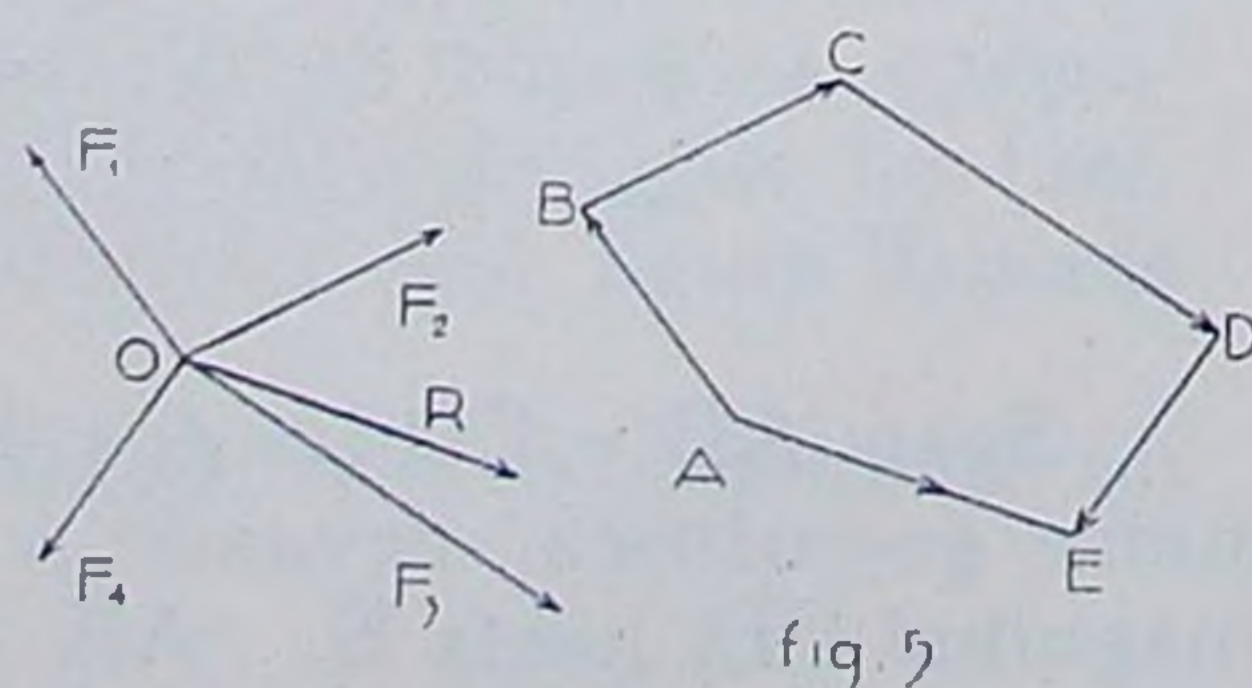

fig. 5

no, representa, entonces, la resultante buscada, R, en magnitud, dirección y sentido.

La línea poligonal ABCDE de la fig. 5, lado derecho, se llama el *polígono de las fuerzas* o también *dinámico.*

Si el extremo E del polígono, coincide con el origen A, el polígono se dice que se cierra y la resultante se anula; es decir, las fuerzas que actúan en O están en equilibrio. Si en la fig. 5 se reemplaza la resultante, R, por otra fuerza igual pero de sentido contrario, el dinámico se cierra y el sistema está en equilibrio; entonces se puede establecer que:

Si al componer todas las fuerzas, que obran en un punto, se obtiene un polígono cerrado, las fuerzas se equilibran.

Téngase en cuenta que si se dice que un polígono de fuerzas o dinámico es cerrado, se sobreentiende que en su contorno no se encuentran dos flechas de sentidos contrarios; por consiguiente, los sentidos de sus lados determinarán uno solo en el contorno.

Por esto, se saca la consecuencia inmediata, de que si en un dinámico cerrado se cambia el sentido de una de las fuerzas, ésta representará la resultante de todas las demás.

7.—*Corolarios.*—1º. Las dos condiciones necesarias y suficientes para que dos fuerzas aplicadas en un mismo cuerpo, estén en equilibrio son, que ellas sean iguales y directamente opuestas.

Conforme hemos dicho ya, el dinámico se cierra y el sistema está en equilibrio.

2º. Se puede desplazar, a lo largo de su línea de acción, una fuerza que actúa sobre un cuerpo, sin cambiar en nada el estado mecánico del cuerpo.

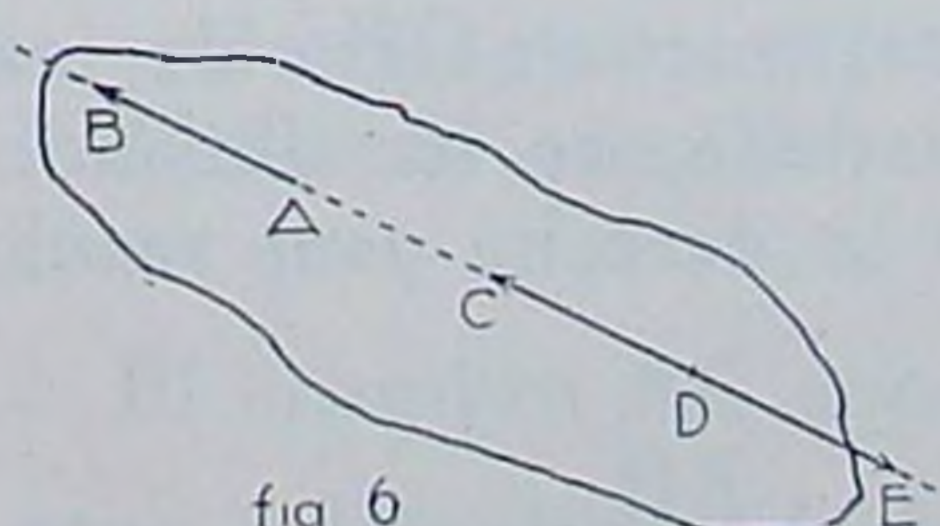

fig 6

Sea la fuerza AB que actúa en A y su equilibrante DE que actúa en D; fig. 6.

Si se aplica en D una fuerza DC equivalente a la AB, tendrá también por equilibrante la fuerza DE; entonces se puede pues reemplazar AB por su equivalente DC y suprimir AB y DE que están en equilibrio. Queda DC que actúa sobre el cuerpo considerado con la misma intensidad y en la misma dirección que la AB.

8.—*Descomponer una fuerza dada en magnitud, sentido y dirección, en otras dos, cuyas líneas de acción se conocen.*— Sea AD una fuerza dada en magnitud, dirección y sentido, que la vamos a descomponer según las dos líneas de acción AB y AC fig. 7.

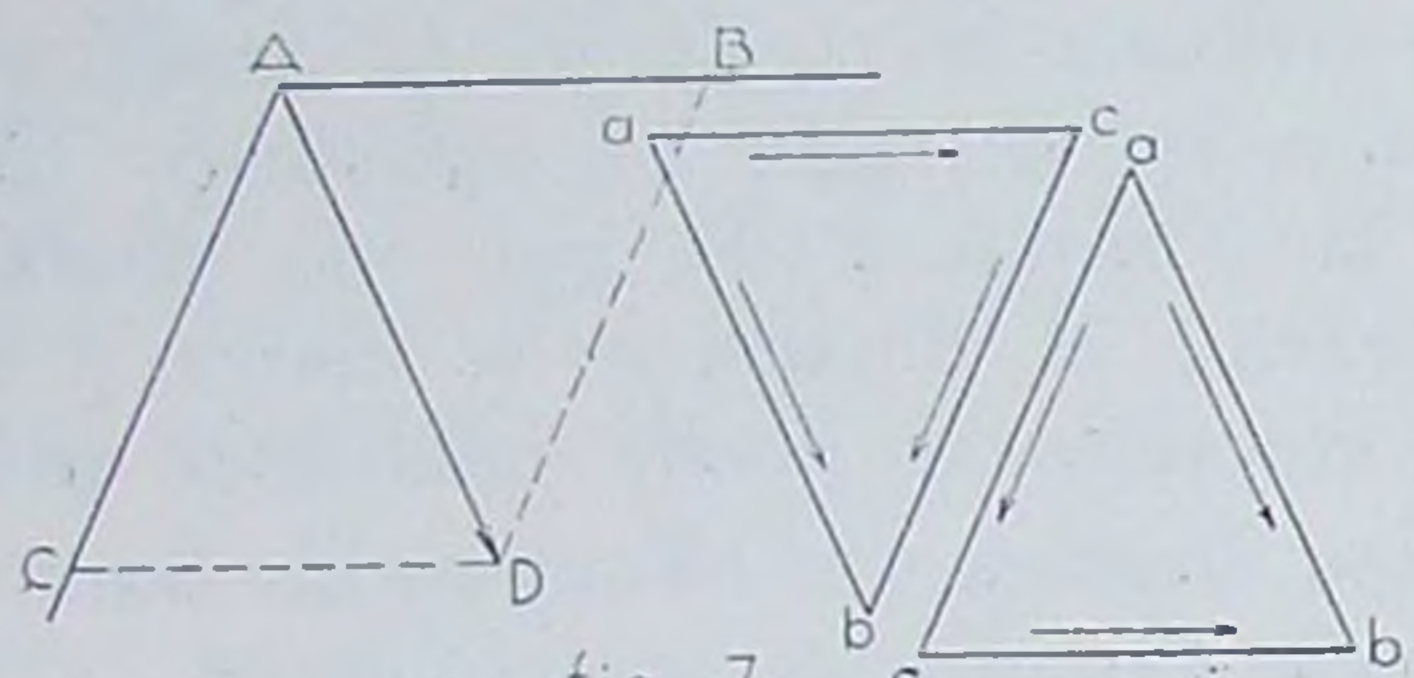
fig 7

Según el teorema conocido del paralelogramo de las fuerzas o del triángulo de fuerzas que ya hemos visto: la resultante de dos fuerzas debe ser la diagonal del paralelogramo construido con las dos componentes. Pero para lo que nosotros intentamos es el problema inverso.

Por consecuencia, es suficiente, trazar por los extremos de la fuerza dada AD las paralelas a AB y AC, de manera de construir el paralelogramo ABDC. Se obtiene así los vectores AC y AB, que a la escala del dibujo nos dan las magnitudes de las dos componentes.

Para no recargar de líneas el diagrama de fuerzas, es mejor operar fuera de éste, haciendo otra figura. Para esto, se traza una recta *ab* paralela e igual en magnitud a la fuerza dada AD; entonces por los extremos se dibujan paralelas a las líneas de acción dadas, y su punto de intersección *c* determina las magnitudes de las dos componentes, *ac* y *cb*.

En el triángulo *abc*, la línea *ab* es la suma geométrica de los dos vectores *ac* y *cb*. Para conocer el sentido de las componentes, se recorre el contorno *acb*, yendo del origen *a* a la extremidad *b* pasando por *c*.

Para indicar que es indiferente trazar cualquiera de las paralelas por los extremos de la fuerza dada, se ha dibujado el otro triángulo de fuerzas que está a la derecha y el resultado es el mismo.

9.—Ejemplo. Como aplicación de los principios anteriores, vamos a determinar gráficamente los esfuerzos en cada una de las piezas que compone una grúa, indicada en la fig. 8, a causa de un peso P = 1.800 kilos, que actúa en la cima. El miembro AB se llama tirante, el AC aguilón, el BC poste y el BD puntal. El poste es vertical y su longitud es de 5 metros.

La longitud del tirante es 6,80 m., del aguilón es 9 m. y del puntal es 6,50 m.; con estas dimensiones se dibuja la armazón de la grúa.

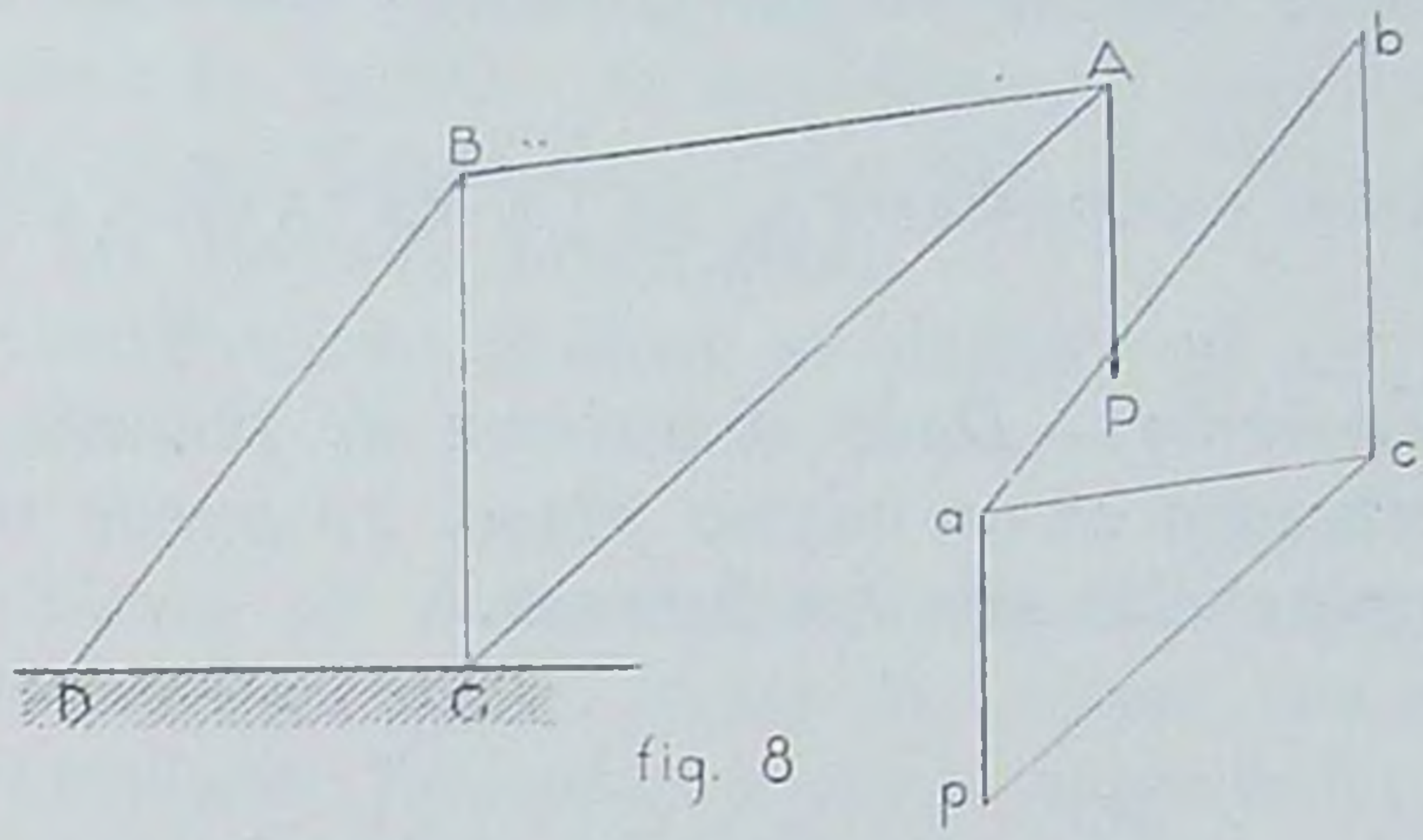

fig. 8

Se pone el valor del peso P = 1.800 k. a una escala conveniente, por ejemplo, 1 cm = 1.200 k. y se dibuja el dinámico ap = P; ahora esta fuerza hay que descomponer en otras dos según las líneas de acción AB y AC; entonces se dibuja por los extremos de *ap* paralelas a esas líneas: *ac* paralela a AB y *pc* paralela a AC y se tiene el triángulo de las fuerzas *apc;* la longitud *ac* a la escala de las fuerzas dá el esfuerzo que soporta el miembro AB, y la magnitud *pc* dá el de AC. Pasemos al vértice B en el que ya conocemos el esfuerzo del miembro AB, y vamos a determinar los esfuerzos de los miembros BD y BC, a causa del esfuerzo que trasmite el miembro AB; entonces de los extremos de la fuerza *ac* se dibujan paralelas a BD y BC y se cortan en el punto *b*, lo que determina *cb* como esfuerzo de la barra BC y *ab* el de la barra BD.

Como veremos después, el carácter de los esfuerzos es: de AC es compresión, de AB es tracción, de BC es compresión y de BD es tracción.

Midiendo a escala en el diagrama de los esfuerzos se encuentra que:

El miembro	AC	soporta	....	3.210 k.	comp.
» »	BA	»	....	2.430 k.	tracción.
» »	BC	»	....	2.610	comp.
» »	BD	»	....	3.810	tracción.

Si el peso *P* fuera el doble, entonces los esfuerzos en cada uno de los miembros serían también el doble de valor.

CAPITULO II

Composición de fuerzas no concurrentes situadas en un plano

Teorema fundamental de la Estática grafica

10.—*Teorema.—Dado un sistema de fuerzas, en número cualquiera, situadas en un mismo plano, se puede sin excepción alguna, reemplazarlas por dos fuerzas.*

Fig 9

Sea un sistema de tres fuerzas F, F_1, F_2; las magnitudes están representadas por los segmentos AB, BC, CD, respectivamente. Construyamos el dinámico ABCD y tomemos un punto arbitrario P, y tracemos las líneas radiales PA, PB, PC y PD. De un punto cualquiera M sobre la línea de acción de F, dibujemos ML y MN paralelas a PA y PB respectivamente. Desde N, donde MN intercepta la línea de acción de F_1, tracemos NO paralela a PC; de igual manera tracemos OQ paralela a PD y entonces queda formada la línea quebrada LMNOQ.

Según lo visto anteriormente, se puede considerar AP y PB como fuerzas y cuya suma geométrica o resultante es AB = F. Las líneas de acción de estas componentes son LM y MN. Las tres fuerzas F, LM y MN son concurrentes en M. Para que F sea la resultante de las otras dos, necesita que las componentes tengan el sentido indicado con las flechas marcadas con 1; entonces la resultante de las fuerzas AP y PB es AB; de manera que podemos reemplazar la resultante por sus dos componentes. De una manera semejante BP y

PC, que tienen como líneas de acción NM y NO, se pueden tomar como componentes de F_1; y CP y PD, cuyas líneas de acción son ON y OQ, se toman como componentes de F_2. Entonces, MN es la línea de acción de dos fuerzas iguales y directamente opuestas, PB y BP, y NO también línea de acción de dos fuerzas iguales y opuestas que son PC y CP. Estos dos pares de fuerzas se equilibran, y quedan sólo AP y PD, teniendo como líneas de acción ML y OQ, y son equivalentes de las fuerzas originarias.

De la construcción gráfica se deduce el siguiente enunciado del teorema:

Todo sistema de fuerzas, sin excepción alguna, se puede reducir a dos fuerzas, cuyas líneas de acción son los dos lados extremos del polígono funicular y cuyas magnitudes son los radios polares correspondientes, yendo del origen a la extremidad pasando por el polo.

La línea quebrada de LMNOQ se llama *polígono funicular.* Se dá este nombre porque corresponde a la forma de una cuerda suspendida por sus extremos, en la que actúan pesos. Esta forma se indica en el polígono dibujados por trazos que corresponde al polo P'.

El punto P o el P' se llama polo; las líneas PA, PB,...... etc. son los radios polares; las líneas paralelas del polígono funicular son los lados del funicular.

La distancia perpendicular del polo a cualquier fuerza es la distancia polar de esa fuerza.

11.—*Corolarios.* Las siguientes consecuencias se deducen del trazado anterior:

1º. Cuando en un sistema de fuerzas el dinámico no se cierra admite resultante.

Así en la fig. 10 la resultante de las cinco fuerzas, está dada en magnitud y dirección, por la suma geométrica de las fuerzas, o sea, por la línea que une el origen con la extremidad del dinámico; y su línea de acción pasa por la intersección de los lados extremos del funicular, trazada paralelamente a la línea que representa la magnitud de la resultante fig. 10. Esto es cierto, por cuanto, todo sistema de fuerzas se puede reducir a dos, que tienen como líneas de acción los lados extremos del funicular: luego necesariamente la resultante de estas dos debe pasar por su intersección, que es a la vez resultante de todo el sistema.

La resultante queda así completamente determinada; y, en general, la línea de acción R de la resultante de cualquier sistema de fuerzas, pasa por el punto de intersección de los lados extremos del funicular. En la fig. 10 *ab* y *gf* se intersectan en *h* por donde se traza la paralela a 05.

Si se quiere encontrar la línea de acción de la resultante de una parte del sistema, cuyas fuerzas están tomadas consecutivamente, es suficiente interceptar los lados del funicular entre los cuales se encuentran estas fuerzas.

Así en la fig. 10 si queremos encontrar la resultante R'

fig. 10

de las fuerzas 2, 3 y 4, se une en el dinámico los puntos 1 y 4 que es la magnitud de la resultante R', que está en línea de trazos; la línea de acción pasa, prolongando los lados *bc* y *ef* del funicular, por su punto de intersección *i*.

2°. Cuando en un sistema de fuerzas el dinámico se cierra, como también el funicular, las fuerzas se encuentran en equilibrio; es decir la suma geométrica es igual a cero.

Sea el sistema de cinco fuerzas. 1, 2, 3, 4 y 5 dadas en magnitud y sentido, fig. 11. Tomemos el punto P como polo arbitrario y tracemos el funicular, que está en la figura en línea de puntos.

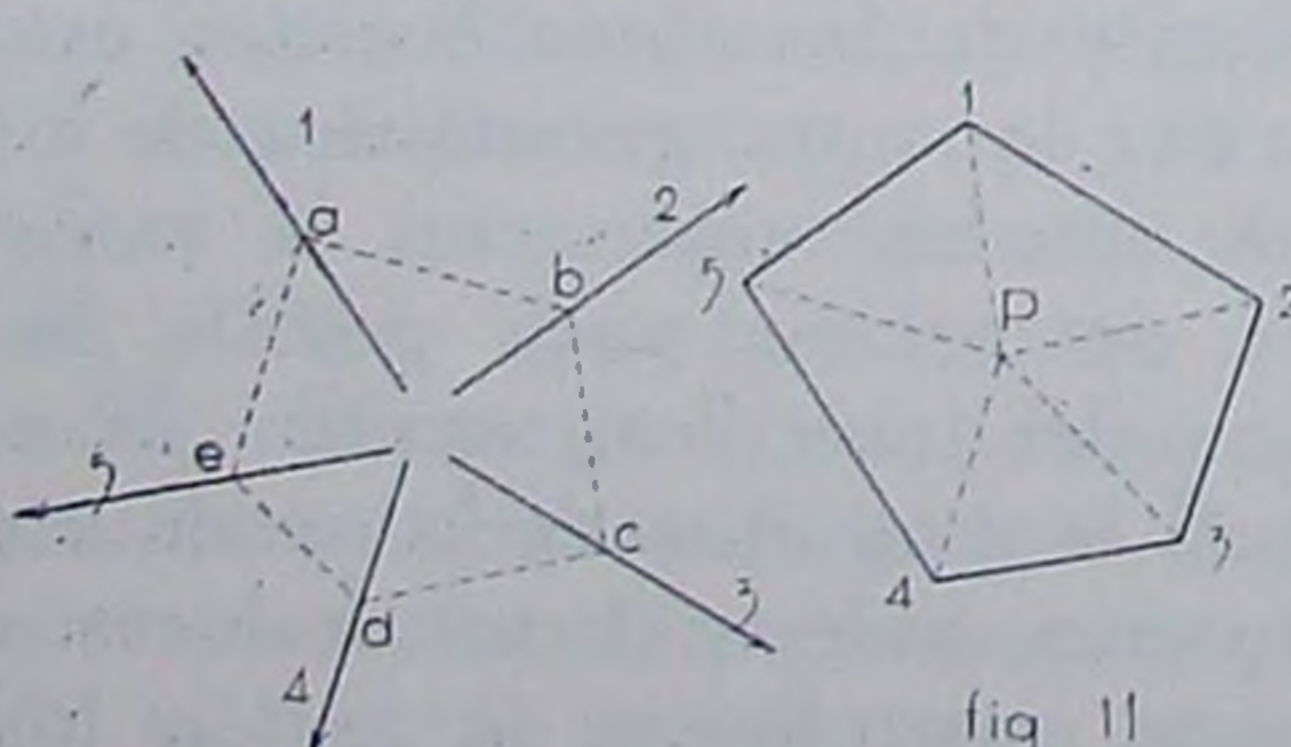
fig 11

Como se ve el dinámico se cierra; el punto 1 que es el origen viene a superponerse con el extremo; luego los dos radios polares extremos se confunden que son

1P y P1. Trazando el polígono funicular nos encontramos con que el primer lado *ea* se confunde con el último y resulta el funicular cerrado *abcde*.

De manera que la condición gráfica para que un sistema de fuerzas no concurrentes esté en equilibrio, es de que el dinámico y el funicular sean polígonos cerrados.

3º. El sistema de fuerzas cuyo dinámico se cierra y el funicular no se cierra, se convierte en un par de fuerzas.

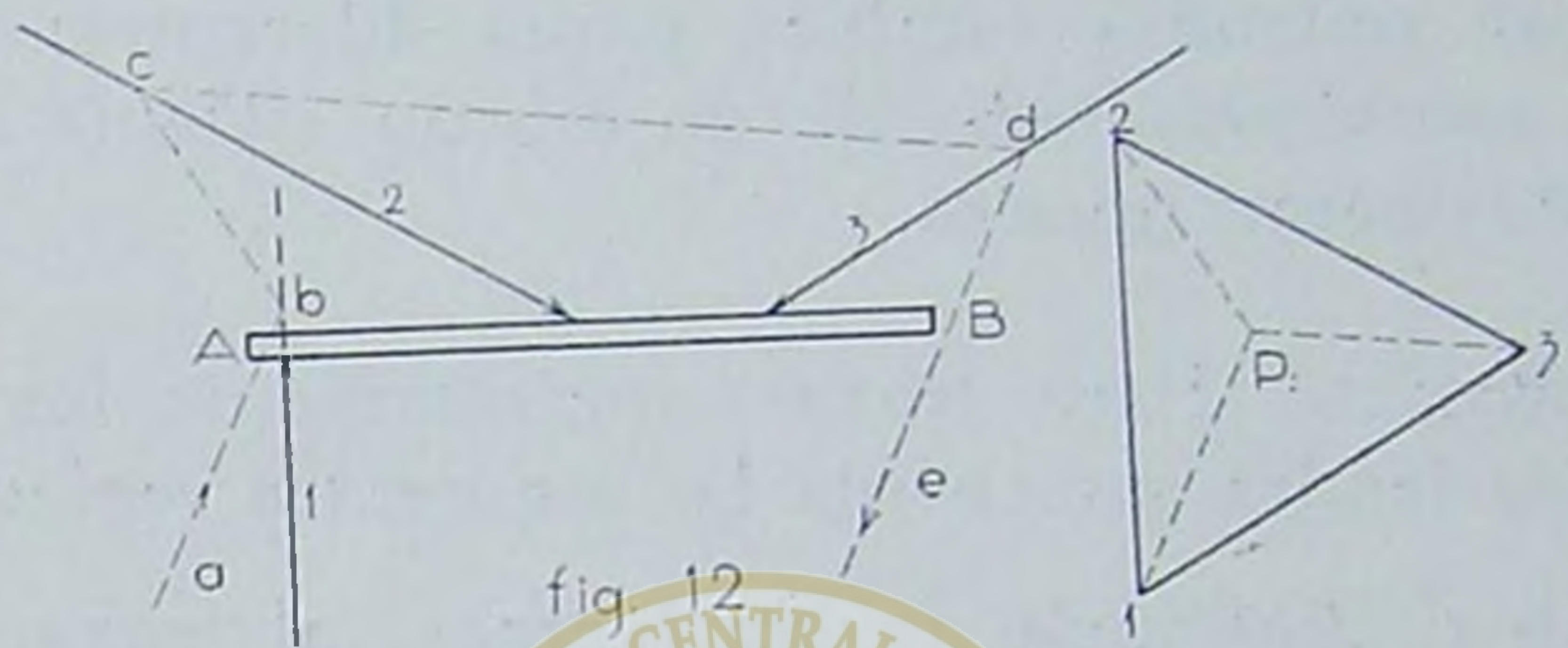

fig. 12

Para mayor claridad y para que de una mirada darse cuenta de que no puede haber equilibrio en un sistema de fuerzas cuyo dinámico se cierra pero el funicular no se cierra: consideramos una viga o madero cualquiera AB, sobre la que actúan tres fuerzas iguales 1, 2 y 3 cuyo sentido se indica con las flechas. Las fuerzas 2 y 3 hacen un ángulo con la horizontal de 30º y la fuerza 1 es vertical. Es claro que observando el diagrama de fuerzas, el equilibrio es imposible, por más que el dinámico se cierre. Tomemos el polo P arbitrario y tracemos el funicular en líneas de puntos, *abcde;* por cuanto se cierra el dinámico, el origen se confunde con la extremidad y entonces al vértice 1 concurren dos radios polares, que se confunden; puesto que el funicular no se cierra los lados extremos son paralelos, por ser paralelos a una misma línea. Según el teorema fundamental, todo el sistema se puede reducir a estos lados extremos *ab* y *de*, que tienen como magnitud común el mismo radio polar 1P, pero el sentido es opuesto, que es lo que constituye un par de fuerzas, el sentido del par se indica con las flechas en las líneas de puntos *ab* y *de*. El momento queda determinado al multiplicar la magnitud P1 y 1P por la distancia entre las paralelas *ab* y *de*.

Este caso podemos enunciarlo así:

En un sistema de fuerzas cualesquiera, situadas en el mismo plano, si el dinámico se cierra y el funicular no se cierra, el sistema no tiene resultante, sino que se reduce a un par de fuerzas, cuyas líneas de acción son los lados extremos del funicular y sus magnitudes los radios polares correspondientes, que se encuentran superpuestos y son por lo tanto iguales.

4°. Para un mismo sistema de fuerzas se puede trazar un infinito número de funiculares, usando diferentes polos y principiando el funicular en diferentes puntos. Así, en el caso de que el dinámico se cierre y el funicular no, al usar polos diferentes, se obtendrá también pares diferentes; pero como estos pares son el resultado de un mismo sistema de fuerzas, sus momentos serán iguales.

12.—*Reglas.* Para trazar correctamente los polígonos funiculares se tendrá en cuenta las siguientes reglas:

1°. En el diagrama de las fuerzas, al trazar el funicular, se hará vértice sólo en las líneas de acción de las fuerzas.

2°. Cada lado del funicular debe ser paralelo al radio polar que parte de la unión de las dos fuerzas, entre las cuales está comprendido dicho lado.

Propiedades geométricas de los polígonos funiculares

13.—*Notación de Bow.* Para ilustrar la manera de usar esta notación, explicaremos en conexión con un caso especial del trazado de los funiculares.

Vamos a hallar la resultante de las cuatro fuerzas indicadas en el diagrama cuyas magnitudes son AB, BC, CD y DE, fig. 13. Las líneas de acción de las fuerzas se designan por las dos letras adyacentes; así, *ab* representa la línea de acción de la primera fuerza, *bc* de la segunda fuerza, etc. En el dinámico, se indica con las mismas letras, pero mayúsculas, que se colocan en los extremos de las líneas que representan las magnitudes de las fuerzas. Al trazar el dinámico, las fuerzas y las letras deben tomarse en el orden que se encuentran en el diagrama de las fuerzas, de izquier-

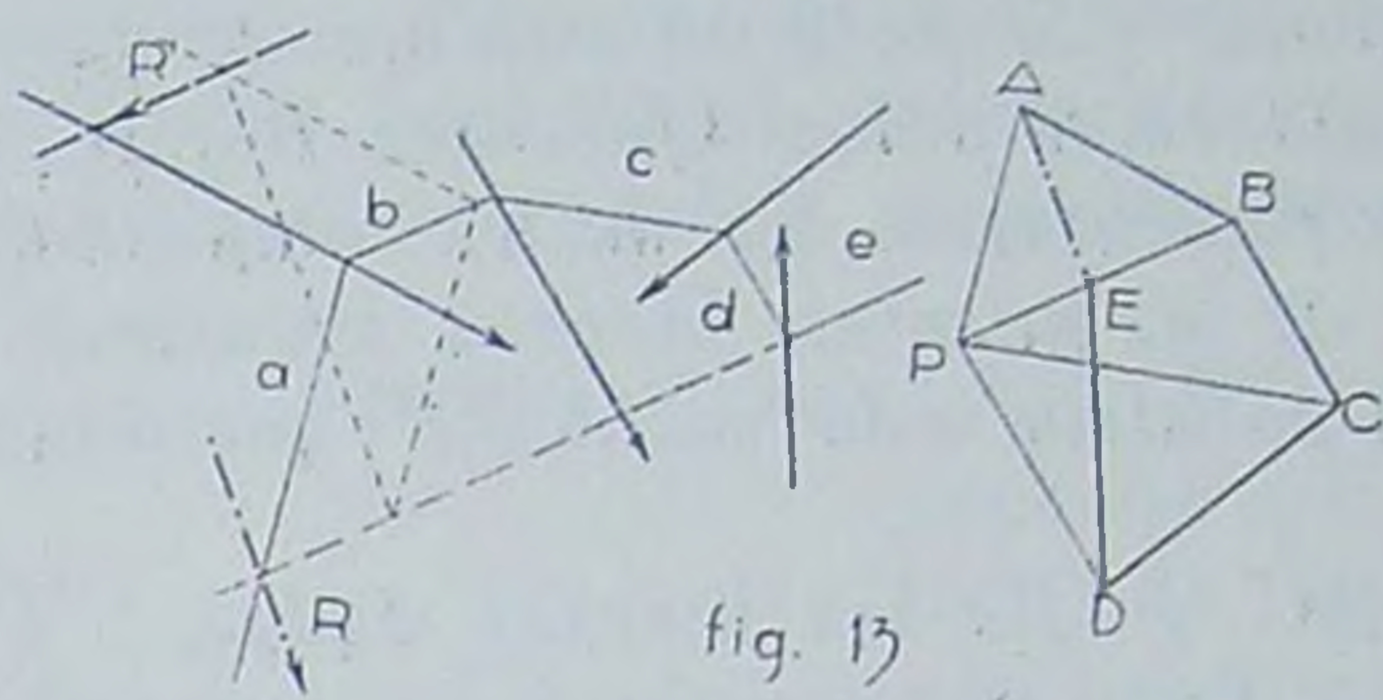

fig. 13

da a derecha; hecho esto, la simple lectura de las letras en el dinámico nos indicará el sentido de las fuerzas. Hay que advertir también, que el lado del funicular correspondiente al radio PA está en el espacio denominado con la *a;* el que corresponde a PB en el espacio *b,* etc. Estos lados que se los llama *a, b,* etc. corresponden a los radios que se les denomina A, B, etc.

Habiendo construido ya el dinámico y el funicular, la magnitud y dirección de la resultante da el segmento AE, que es la suma geométrica, y un punto de la línea de acción está determinada por la intersección de los lados extremos, que están con las mismas letras, *a* y *e.*

Caso especial.—Al hallar la resultante de un sistema de fuerzas puede suceder que los lados extremos del funicular sean paralelos, sin que el sistema se convierta en un par, o que la intersección de esos dos lados se haga fuera de los límites del dibujo. En este caso la resultante se determina así: Sea de encontrar la resultante de las fuerzas BC, CD, y DE fig. 13. Esta resultante es BE, su línea de acción pasa por la intersección de los lados *b* y *e* los que son paralelos. Sabemos que el sistema de fuerzas tiene como equivalentes a las dos fuerzas representadas por los lados extremos *b* y *e* y los radios correspondientes, BP y PE. Entonces el problema se reduce a hallar la resultante de estas dos fuerzas por medio de un segundo funicular, así: Tomemos el punto to A como polo y tracemos un nuevo funicular, indicado por puntos, para las fuerzas BP y PE. La intersección de los lados extremos en R' localiza la resultante que se ha trazado paralelamente a BE.

14.—*Teorema.—Si para un sistema de fuerzas dado, se trazan dos funiculares de polos diferentes P y P', los lados homólogos de estos funiculares, es decir, comprendidos entre las líneas de acción de las mismas fuerzas sucesivas, se cortan en una misma línea paralela a la recta PP' que une los dos polos.*

Sean AB, BC y CD las fuerzas dadas. Tomemos dos puntos arbitrarios P y P' como polos y tracemos los dos funiculares el uno en líneas llenas y el otro en punteadas.

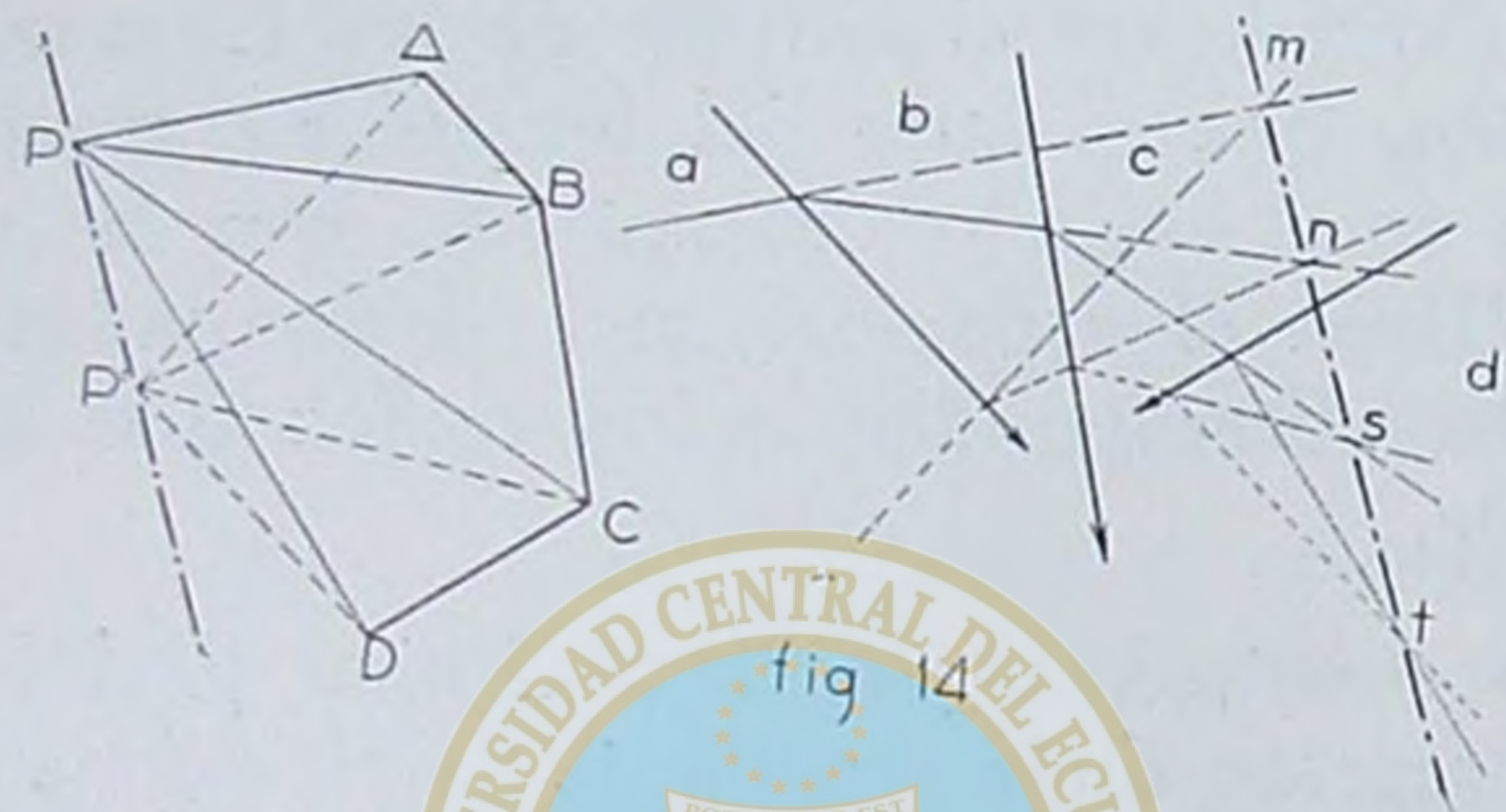

fig 14

La resultante de PA y AP' es PP'; su línea de acción *mn* es paralela a PP' y pasa por *m* que es el punto de intersección de los lados *a* y *a'*, líneas de acción de las fuerzas PA y AP'. De una manera semejante, la resultante de PB y BP' es PP', su línea de acción *nt* pasa por la intersección de los lados *b* y *b'*, etc.

Ahora, PB es la resultante de PA y AB, también BP' es la resultante de BA y AP'.

Puesto que, AB y BA fuerzas iguales y directamente opuestas, se equilibran, la resultante de PB y BP' es la misma de las fuerzas PA y AP'; luego las líneas de acción *mt* y *nt* deben coincidir. A las intersecciones de los otros lados del funicular se aplica el mismo razonamiento. Por esta razón los puntos *m, n, s, t,* están sobre la misma línea *mt,* paralela a PP', que es la línea de acción de las resultantes de las dos fuerzas correspondientes, PA y AP'; PB y BP'; PC y CP', etc.

Advertencia.—El estudiante debe recordar a cada instante que en el diagrama de fuerzas, el orden de las letras en el texto indica la dirección de las fuerzas.

15.—*Teorema.—El lugar de los polos de todos los funiculares, cuyos lados homólogos deben pasar por dos puntos dados, es una línea recta paralela a la que une los dos puntos.*

Sean las tres fuerzas dadas, AB, BC y CD fig. 15 se necesita que los lados extremos de un funicular pase por los puntos dados *m* y *n*. Para lo cual primero trazamos un funicular cualquiera de polo arbitrario P. Dibujando paralelas a la suma geométrica AD, por los puntos dados *m* y *n* hasta que corten los dos lados extremos *a* y *d* se obtienen los puntos *r* y *s*; se une *r* y *s*.

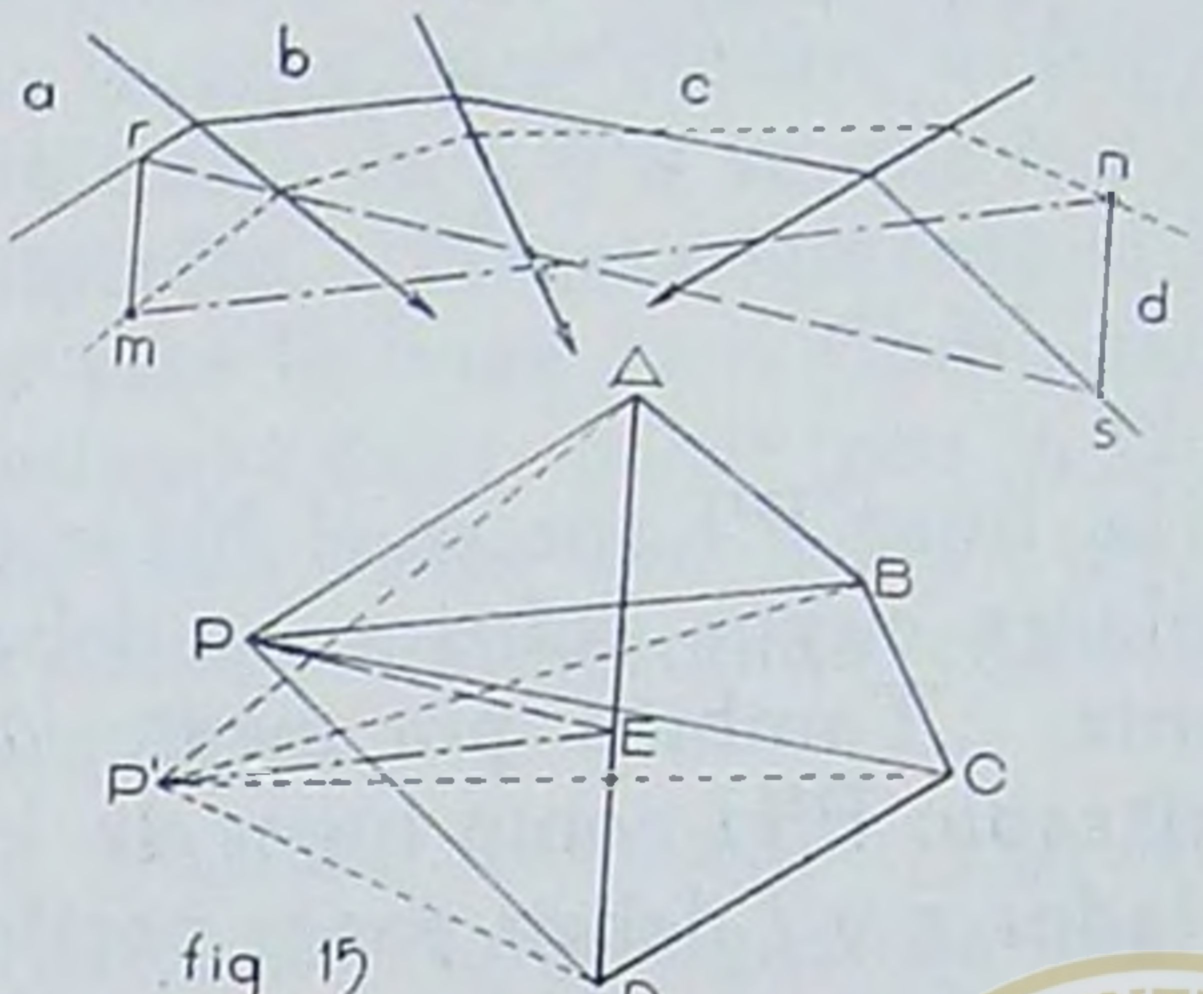

fig 15

Por el polo P se traza una paralela a *rs* que corta a la resultante AD en el punto E; por este último punto se dibuja una paralela a la línea *mn;* la recta indefinida P'E es el lugar de los polos de los funiculares que trazando el primer lado por *m* debe pasar el último por el punto *n*.

En virtud del teorema precedente la línea *mn* que une las intersecciones de los lados homólogos de dos funiculares es paralela a P'E.

16.—*Problema.—Dibujar un polígono funicular, para un sistema dado de fuerzas, de manera que tres de sus lados pase por tres puntos dados en el plano.*

El problema se reduce a determinar, en el dinámico un polo que permita trazar el funicular que goce de esta propiedad.

Sea un sistema de cinco fuerzas, AB, BC, CD, DE y EF, y los tres puntos dados *x*, *y*, *z* en el diagrama de las fuerzas. Fig. 16.

Vamos a encontrar el polo, de suerte que el lado *a* del funicular pase por el punto *x*, el lado *c* por el punto *y* el lado *f* por el punto *z*.

Tomando un polo cualquiera P, tracemos también el funicular que se deduce; este funicular está en líneas de puntos, *uv*. Por medio de la construcción indicada en el teore-

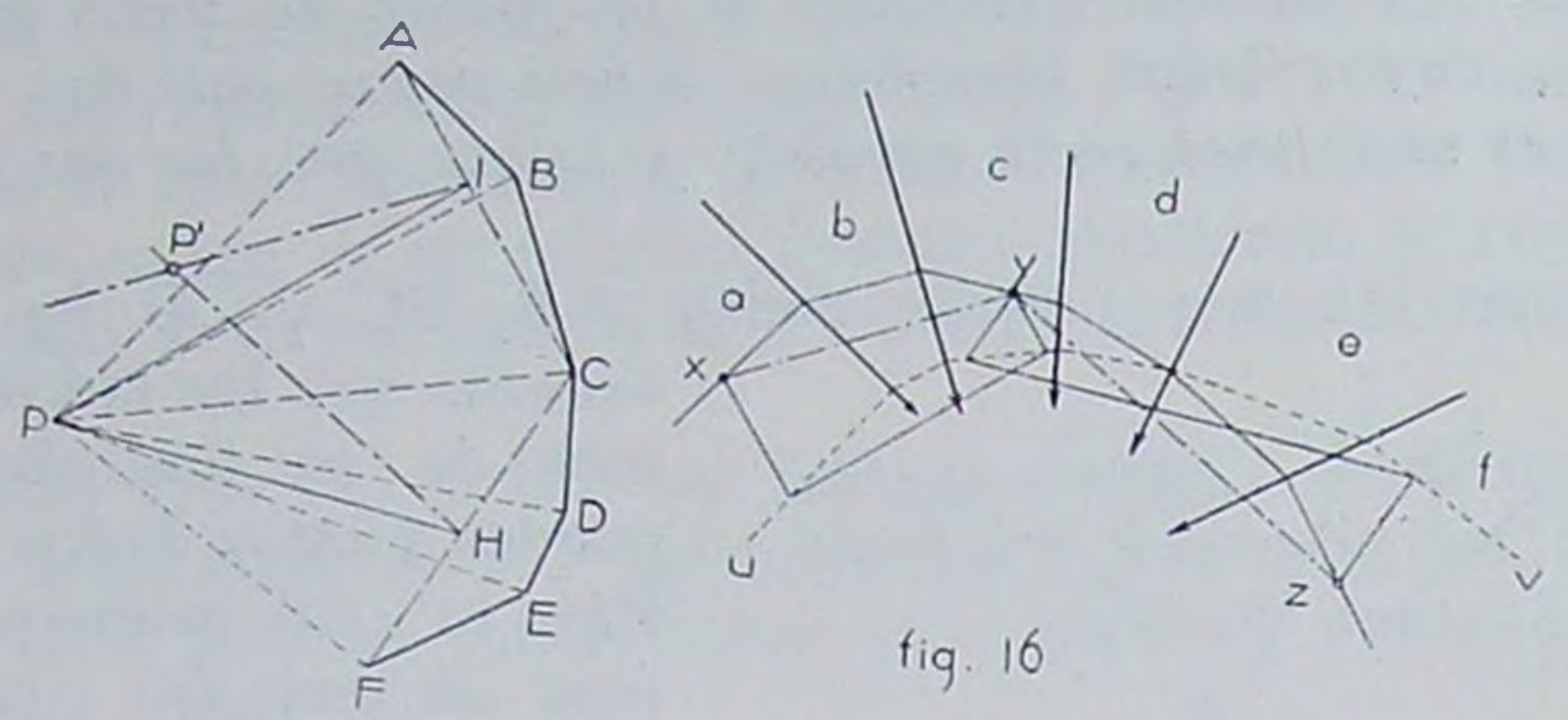

fig. 16

ma del párrafo 15 se determina la línea P'I que es el lugar de los polos de los polígonos funiculares cuyos lados *a* y *c* deben pasar por *x* y *y* respectivamente. También por medio del mismo teorema se determina el radio P'H como lugar de los polos de los funiculares cuyos lados *c* y *f* deben pasar por los puntos *y* y *z*. Luego, para que ambas condiciones se cumplan, el polo debe estar en ambas líneas P'I y P'H, es decir, estará en su intersección.

Este funicular de polo P' está dibujada en líneas llenas.

17.— *Problema.— Dibujar un funicular de manera que cualesquiera de los tres lados pase también por tres puntos dados. Las fuerzas son todas paralelas.*

Para el caso de fuerzas paralelas se puede dar una solución más corta.

Con fuerzas paralelas se notará que el dinámico se reduce a una sola línea paralela a ellas; y como son las que generalmente se presentan en la práctica: tiene este caso, de fuerzas paralelas, mayor importancia.

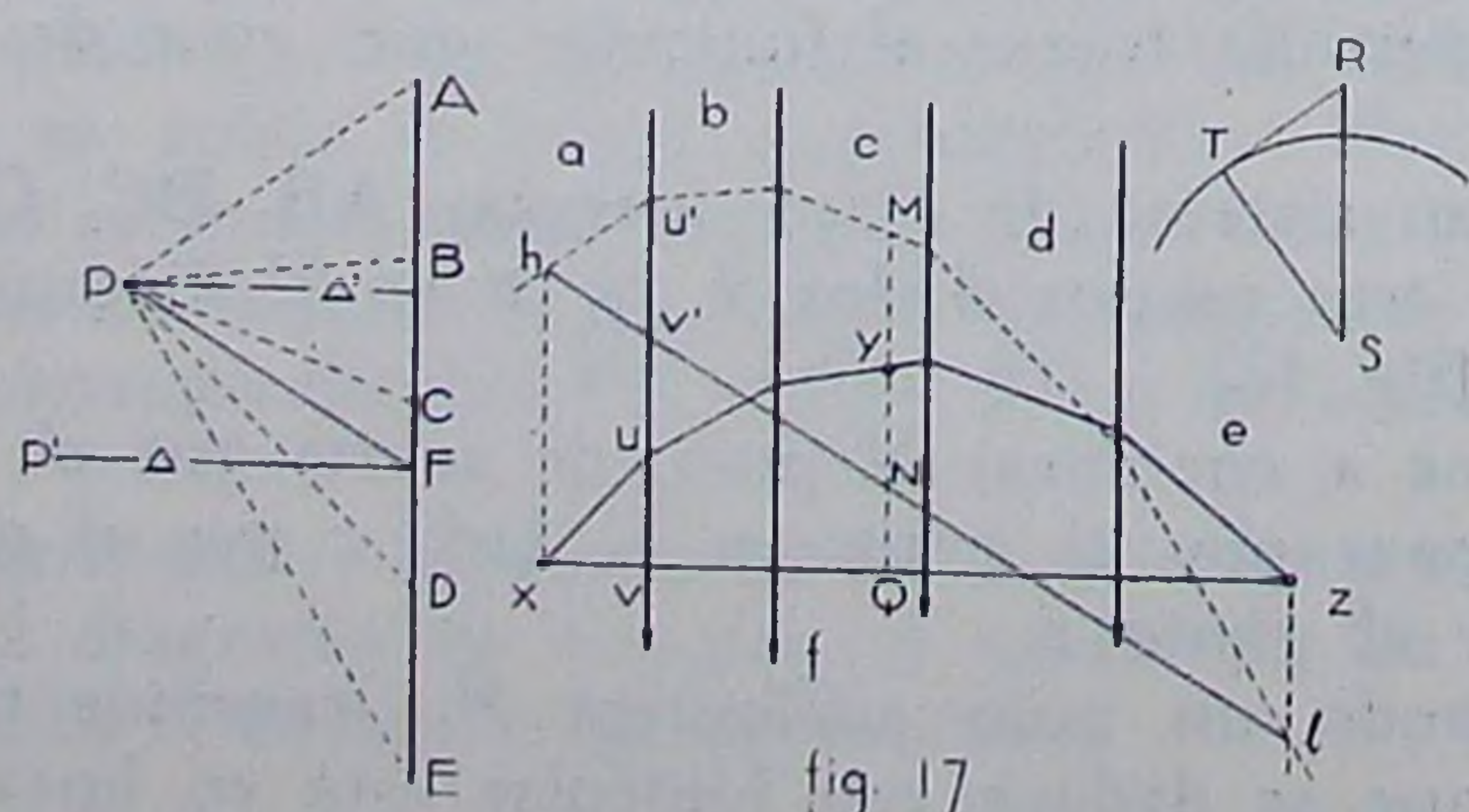

fig. 17

Sea un sistema de cuatro fuerzas paralelas, AB, BC, CD y DE de las que se conocen todos sus elementos fig. 17. Se quiere dibujar un funicular, de manera que el lado *a* pase por el punto *x*, el lado *c* por el punto *y* y el *e* por el punto *z*. Para esto con un polo arbitrario P se dibuja el funicular *hl*, línea de puntos. Por los puntos dados, se trazan líneas paralelas a las fuerzas, que cortan a los lados homólogos del funicular arbitrario en *h* y *l*; se une *h* y *l* y se tiene el lado de cierre del funicular. Necesariamente el lado de cierre del nuevo funicular será la línea *xz*. Como sabemos que el lado *c* del nuevo funicular debe pasar por *y*, la ordenada trazada por *y* y comprendida entre los lados *c* y *f* será *yQ*; la ordenada correspondiente comprendida entre los lados del funicular arbitrario será MN.

Ahora la relación yQ/MN es constante para todas las ordenadas homólogas de los dos funiculares, como probaremos más adelante; por esta razón, los vértices del funicular buscado se pueden determinar así: Tracemos RS = MN. Del punto S se describe un arco de radio ST = *yQ* y se dibuja la tangente RT. Entonces, para determinar cualquier ordenada, por ejemplo la *uv*, se toma en un compás la ordenada *u'v'* y se le transporta a la línea RS a partir de R. La distancia de este punto así localizado a RT es la magnitud de la ordenada deseada. Obtenido de esta manera todos vértices se une con líneas y se tiene así el funicular buscado, que en nuestra figura está en líneas llenas.

Para el caso de que la ordenada MN sea más corta que *yQ*, se puede modificar haciendo que RS = n. MN, donde *n* puede ser igual a dos o más veces. En este caso la proporción será:

$$\frac{u\,v}{y\,a} = \frac{n.\ u'\ v'}{n.\ M\ N}$$

El polo P' del funicular buscado, se encuentra poniendo sobre la línea FP' la magnitud Δ que es la distancia polar y se deduce de la proposición:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{M\ N}{y\ Q}$$

Veremos luego que las distancias polares de un mismo sistema de fuerzas, cuando se toma puntos diferentes como polos para varios funiculares, están en relación inversa de las ordenadas homólogas de los funiculares.

Fuerzas paralelas

18.—*Teorema.—Dos fuerzas paralelas y del mismo sentido tienen una resultante que le es paralela, del mismo sentido, de magnitud igual a su suma aritmética, situada entre las fuerzas y en su plano común.*

Este teorema y los que siguen son de mucha importancia, cuando se trata de determinar las reacciones de los apoyos de una viga y en muchas otras aplicaciones.

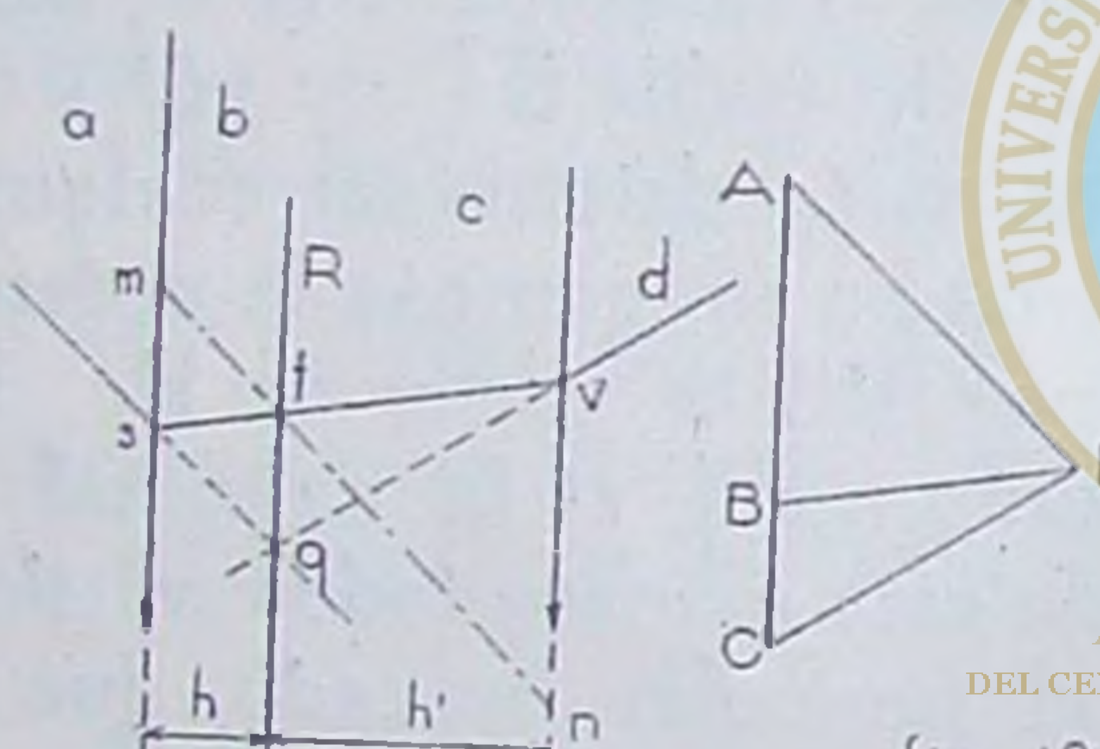

fig. 18

Sean las dos fuerzas paralelas *ab* y *cd* que tienen el mismo sentido, fig. 18, cuyo dinámico es ABC y el funicular correspondiente es *abd*. Según el método conocido, la resultante está en la intersección de los lados extremos *a* y *d* y su magnitud es AC o sea la suma aritmética; también vemos que se encuentra la resultante entre las dos fuerzas dadas.

Si trazamos una línea *mn* de tal manera que *vn* sea igual a AB y *ms* igual a BC; es decir las magnitudes cambiadas de líneas de acción: se tiene los dos triángulos semejantes *mts* y *tvn*, y se sabe que las bases son proporcionales a sus alturas, se tiene:

$$\frac{m\,s}{v\,n} = \frac{h}{h'} = \frac{B\,C}{A\,B}$$

o

$$\frac{A\,B}{h'} = \frac{B\,C}{h} \qquad (1)$$

por lo tanto: $AB \times H = BC \times h'$

llamando h y h' a las alturas de los dos triángulos.

De la ecuación (1) se deduce que la línea de acción de la resultante es tal, que sus distancias a las líneas de acción de las dos componentes están en razón inversa de las magnitudes de estas últimas.

De los mismos triángulos se tiene esta proporción:

$$\frac{ms}{mt} = \frac{vn}{tn} \quad \text{o} \quad \frac{BC}{mt} = \frac{AB}{tn}$$

esta última proporción se puede poner bajo la forma:

$$\frac{BC + AB}{mt + tn} = \frac{AC}{mn} = \frac{BC}{mt} = \frac{AB}{tn}$$

Esta proporción se interpreta diciendo, que si consideramos dos fuerzas paralelas y su resultante, y una recta cualquiera *mn* no paralela a las fuerzas; la intensidad de cada una de las tres fuerzas, es proporcional a la porción de recta comprendida entre las otras dos.

La fig. 18 nos enseña otra solución para encontrar la resultante de dos fuerzas paralelas. Basta con llevar, la magnitud de la una fuerza sobre la línea de acción de la otra y unir los extremos en cruz, la intersección, *t*, de estas líneas es el punto por donde pasa la resultante.

19.—*Teorema.—Dos fuerzas paralelas, pero de sentidos contrarios y de magnitudes diferentes, tienen su resultante que le es paralela, del mismo sentido que la mayor componente, de intensidad igual a su diferencia aritmética, situada fuera del sistema y del lado de la mayor.*

Sean las dos fuerzas *ab* y *bc* de sentidos contrarios e intensidades diferentes, cuyo dinámico es ABC y el funicular 1-2-3. Se ha numerado los radios polares para mayor claridad en el orden del trazado. La intersección de los lados extremos determina la línea de acción de la resultante y su magnitud es igual a la diferencia aritmética de las dos componentes, a AC.

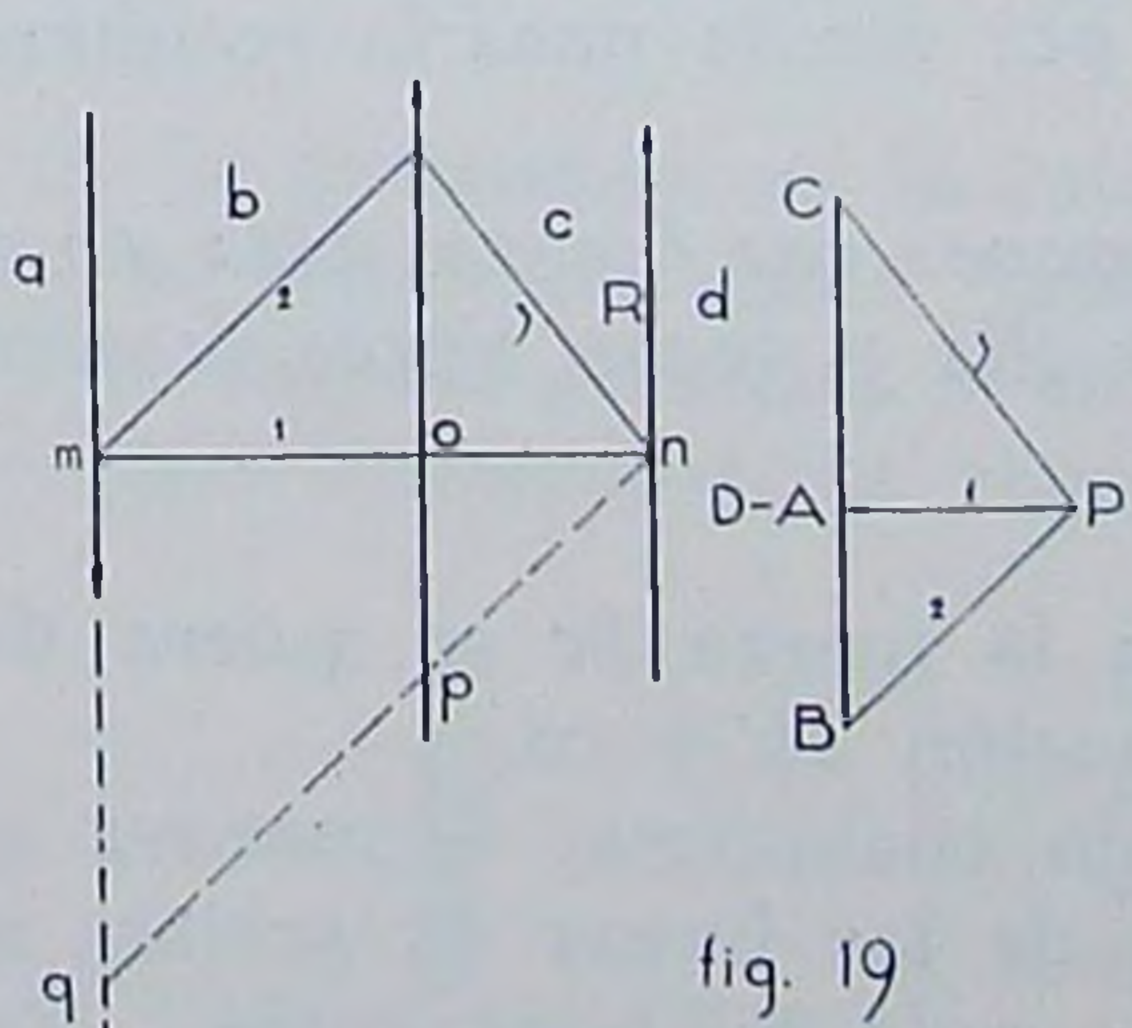

fig. 19

De los dos triángulos semejantes *mnq* y *opn*, formados de manera que $mq = BC$ y $op = AB$, se tiene:

$$\frac{mq}{mn} = \frac{op}{on}$$

o

$$\frac{BC}{mn} = \frac{AB}{on}$$

y también

$$\frac{BC + (-AB)}{mn + (-on} = \frac{AC}{om}$$

y por fin

$$\frac{AC}{om} = \frac{AB}{on} = \frac{BC}{mn}$$

De donde se deduce que: si se considera un sistema de dos fuerzas paralelas, pero de sentidos contrarios y de intensidades diferentes, y su resultante, y una recta cualquiera *mn* no paralela a las fuerzas, la intensidad de cada una de las tres fuerzas es proporcional a la porción de recta comprendida entre las dos otras.

Por la inspección de la fig. 19 se observa que para determinar la línea de acción de la resultante es suficiente trasladar la magnitud de la una fuerza sobre la línea de acción de la otra *(mq* y *op)* y unir los extremos, la intersección de estas líneas determina el punto, por donde pasa la resultante.

20.—*Problema I.—Descomponer una fuerza dada en dos otras, de la misma dirección que ella y según líneas de acción dadas.*

En la fig. 18 hagamos que la fuerza *bc* se quiera descomponer según las líneas de acción *ab* y *cd*.

Primero se traza un triángulo cualquiera, de manera que tenga sus vértices en cada una de las líneas de acción, sea el *sqv*, que es el funicular cuyo polo no conocemos. Para lo cual se traza el dinámico AC igual a la fuerza dada; por los extremos se trazan paralelas a *sq* y *qv*, la intersección determina el polo P; luego por P se traza una paralela a *sv* que determina en el dinámico el punto B que nos dá las magnitudes de las dos componentes.

Problema II.—Descomponer una fuerza dada en dos otras de la misma dirección que ella, dando ademas la una en magnitud, su línea de acción y sentido.

Sea la fuerza dada R cuya magnitud es AC, además se conoce la línea de acción *ab* y la magnitud AB de la una componente; vamos adeterminar la línea de acción de la otra.

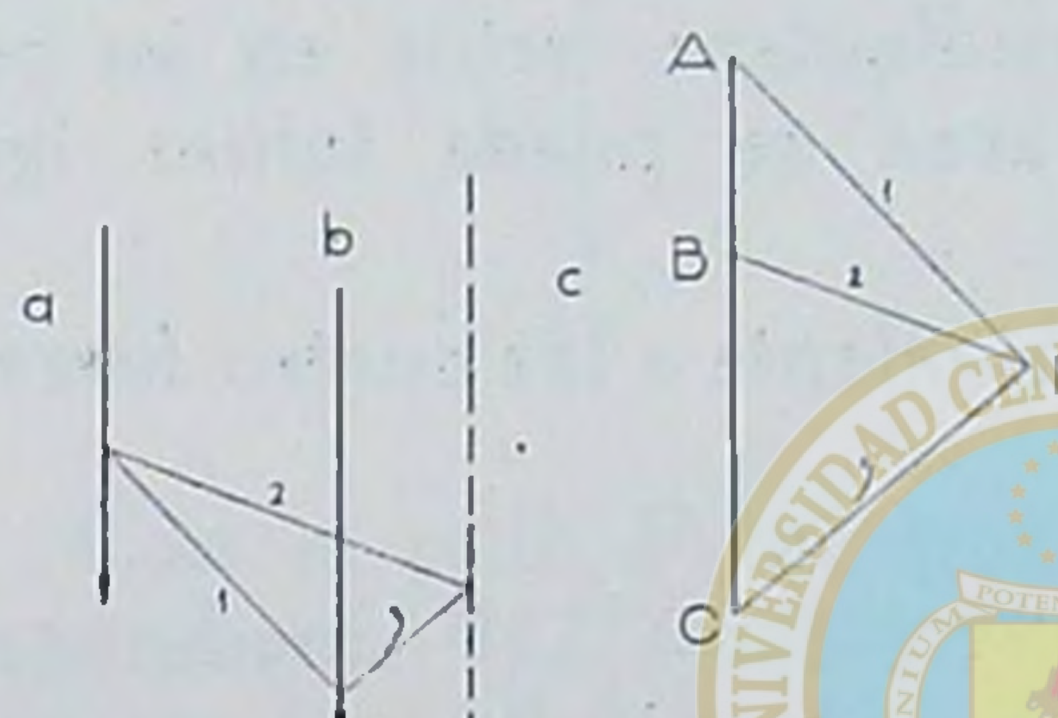

fig. 20

Se traza el dinámico AC y también la magnitud conocida AB; necesariamente la magnitud de la fuerza desconocida será BC. Se toma un polo arbitrario P y se dibuja los radios polares. Entre las dos líneas de acción conocidas se traza el lado del funicular 1, por los puntos de encuentro con las fuerzas se dibuja paralelas a los radios polares 2 y 3, la intersección nos dá un punto de la línea de acción de la componente buscada.

21.—*Fuerzas distribuidas.*—Se llaman fuerzas distribuídas a las que están representadas en términos de la intensidad por unidad de longitud, área o volumen. La gravedad y la presión del agua son casos muy frecuentes de esta clase de fuerzas.

Si la intensidad es la misma en todos sus puntos, la fuerza se denomina como «uniformemente distribuida».

Las fuerzas paralelas y en el mismo plano, que son las únicas que trataremos, se representan así:

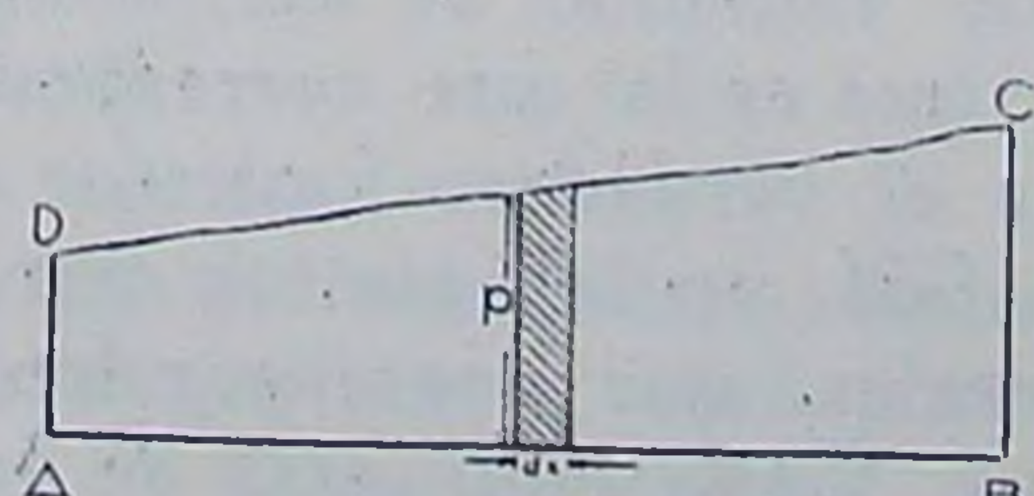

fig 21

La línea AB es perpendicular a la dirección de las fuerzas, *dx* es una parte infinitesimal de AB, y hagamos que la ordenada *p* represente la intensidad de la fuerza en el punto en el cual se ha trazado fig. 21. La superficie sombreada, *pdx* representa la magnitud de la fuerza que actúa sobre la longitud *dx*.

Entonces el diagrama se interpreta diciendo, que la longitud de la ordenada en un punto cualesquiera de la línea AB, representa la intensidad de la fuerza en ese punto, y el área comprendida entre dos ordenadas, representa la magnitud de la fuerza que actúa en la porción correspondiente de AB.

22.—*Polígono funicular para una carga distribuida.*—La superficie MN QO representa una carga distribuída. Dividamos MN en un número de partes iguales, suficientemente pequeñas de manera que pueda aceptarse que la fuerza que está representada por una área cualquiera, actúe en su punto medio *n* de la división y el área se puede tomar igual a UV $\times$ *mn*.

Entonces la carga total es equivalente a las cuatro fuerzas.

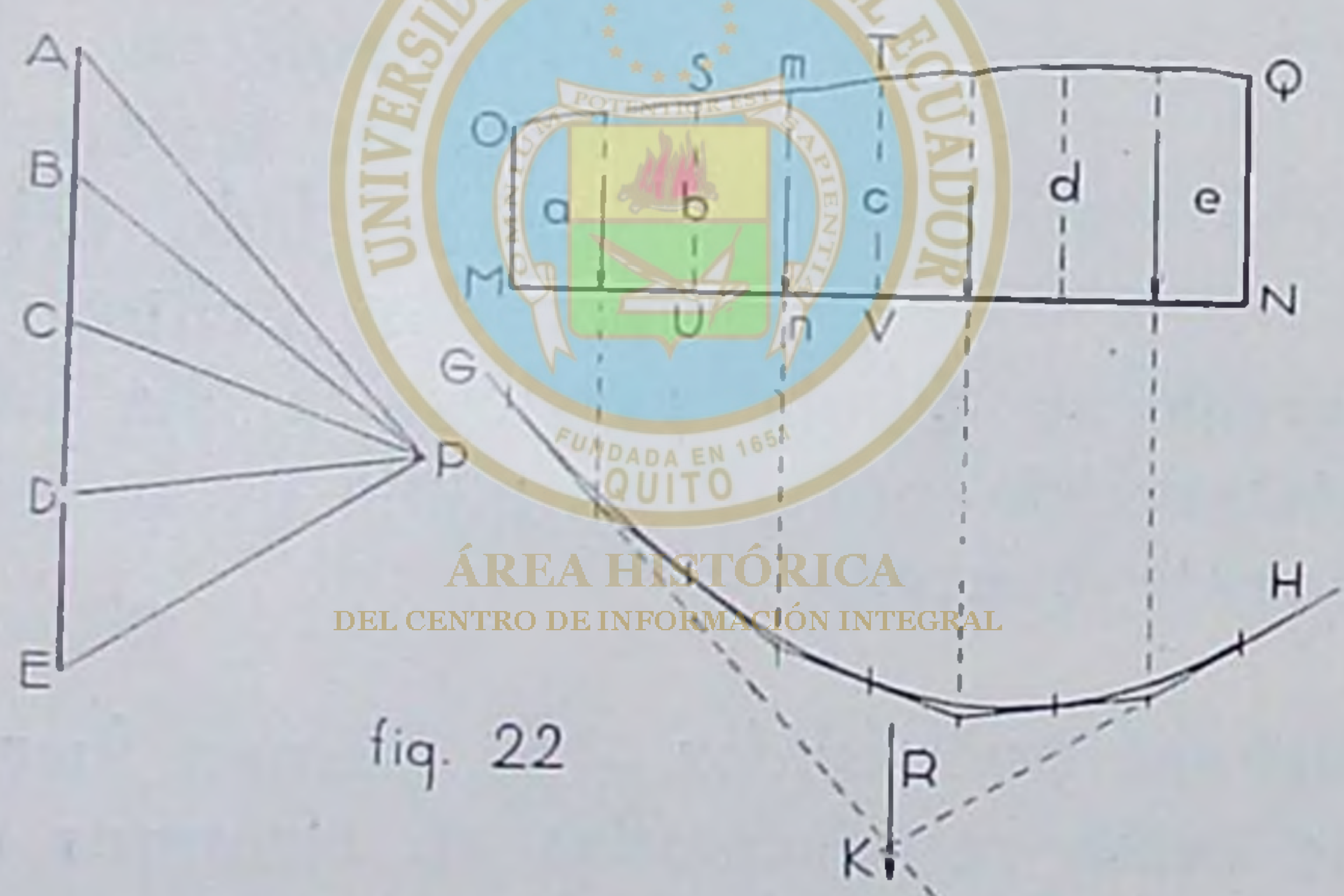

fig. 22

AB, BC, CD y DE, sus magnitudes son proporcionales a las longitudes de las ordenadas correspondientes, como *mn* por ejemplo.

El funicular GH pertenece a este sistema de fuerzas. Es evidente que si las divisiones de la línea MN se hacen infinitamente pequeñas, el polígono funicular se aproximará cada vez más a la curva funicular que es la que corresponde a una carga distribuida. Entonces el verdadero funicular será una curva tangente al polígono GH, en los puntos marcados con pequeñas líneas transversales, que corresponden a los puntos de división de la carga. Cada lado será de longitud infinitesimal y tendrá la dirección de la tangente a la curva.

23.—*Polígono funicular para cargo uniformemente distribuída.*—Es muy conocido, en Geometría Analítica, la manera de trazar la parábola con eje vertical, fig. 23. Que consiste en dividir la línea 1-8 en partes iguales y dibujar un cierto número de líneas verticales y equidistantes, como se ve en la fig. 23.

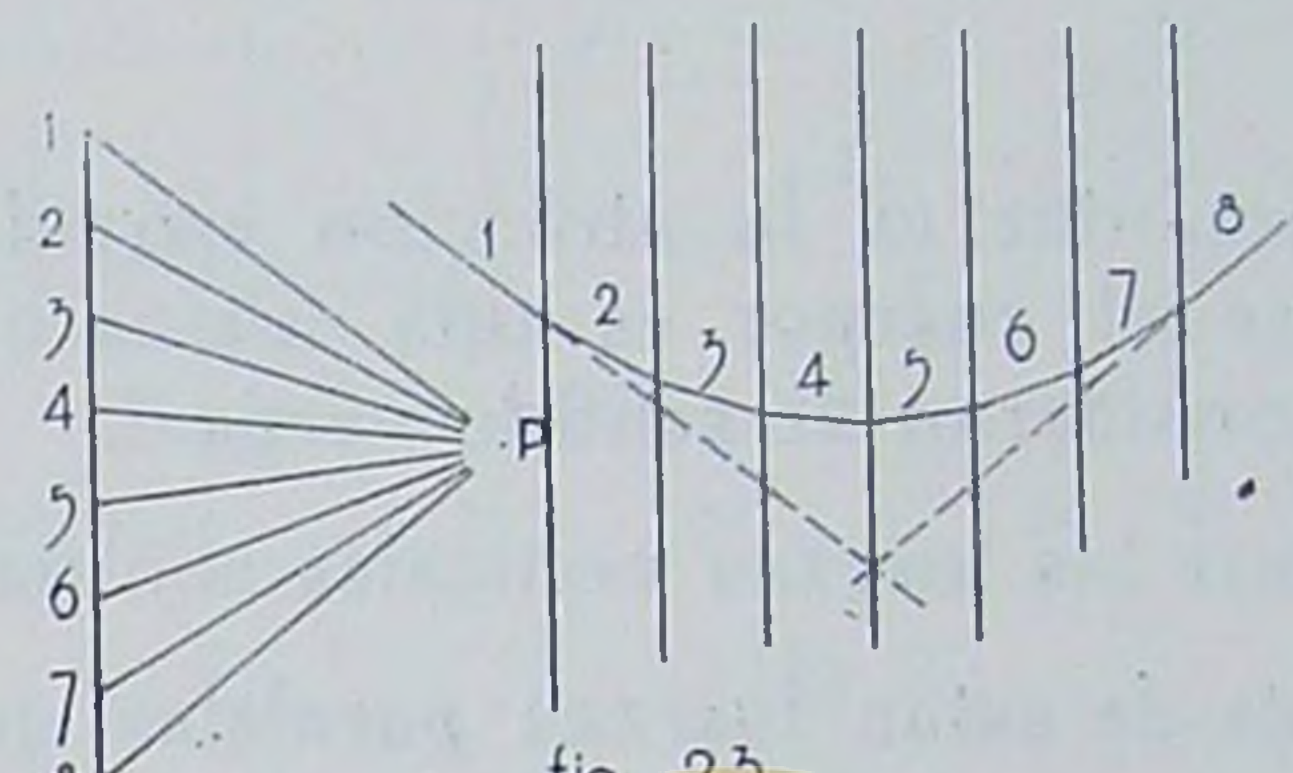

fig. 23

Con el polo P. se trazan los radios y el funicular correspondiente 1-2-3-4-5-6-7 y 8. Una curva tangente a este polígono funicular en los puntos medios, de cada uno de sus lados es una parábola de eje vertical.

Si comparamos las construcciones de las figuras 22 y 23 se ve que son idénticos los trazados, de donde se deduce que: «El funicular para una carga uniformemente distribuída es una parábola, cuyo eje es paralelo a la fuerza».

Podemos, entonces recomendar ésta constrncción muy sencilla: Hagamos que MNOQ sea la carga uniformemente repartida, la curva funicular será por lo tanto una parábola, de eje vertical, tangente a los lados KG y KH. Esta porábola se construye así:

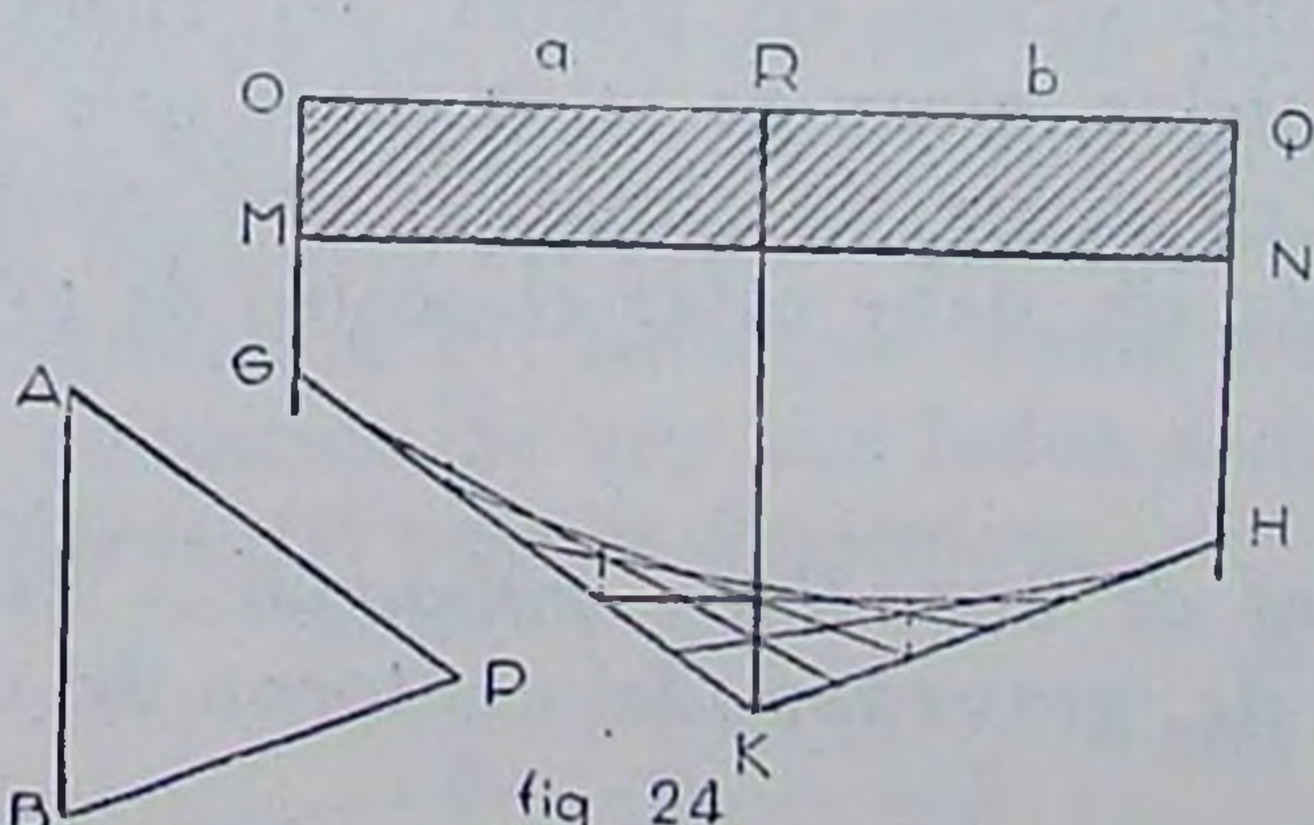

fig 24

Se divide KG y KH, que son paralelos a AP y BP, en un igual número de partes. Se une estos puntos de división alternadamente como se ve en la fig. 24. Las líneas que unen estos puntos son tangentes a la curva. Los puntos de tangencia se determinan trazando paralelas a R por los puntos de división tomados alternadamente.

CAPITULO III

Centros de gravedad

24.—La pesantez es la atracción ejercida por el centro de la tierra sobre el cuerpo; es una fuerza o un conjunto de fuerzas que se consideran de sentido vertical.

Prácticamente las fuerzas verticales son paralelas.

La resultante de estas fuerzas paralelas que actúan sobre un cuerpo es el peso.

Se dice a un cuerpo homogéneo cuando todos sus puntos materiales tienen la misma densidad.

Centros de gravedad de áreas planas.

25.—*Línea recta.*—Un segmento rectilíneo es simétrico respecto de su punto medio, luego éste es un centro de gravedad.

Puesto que si una figura homogénea tiene un plano o un centro de figura, siempre se podrá suponer que los pesos parciales obtenidos por la descomposición en partes del cuerpo, que obran como fuerzas paralelas, giran de tal manera que su resultante esté en el plano o en el eje de simetría; por consigüieste, en este plano o en este eje, debe estar el centro de gravedad.

26.—*Centro de gravedad de una línea poligonal.*—Tratemos de encontrar el centro de gravedad del contorno de un pentágono irregular, *abcde.*

Los segmentos *ab, bc, cd, de* y *ea* que forman el contorno del pentágono se pueden considerar como fuerzas aplicadas en sus puntos medios, que son los centros de gravedad respectivos y proporcionales a su longitud. Estas fuerzas segmentos representan un sistema de fuerzas paralelas cuyo centro es el centro de gravedad del contorno poligonal, fig. 25.

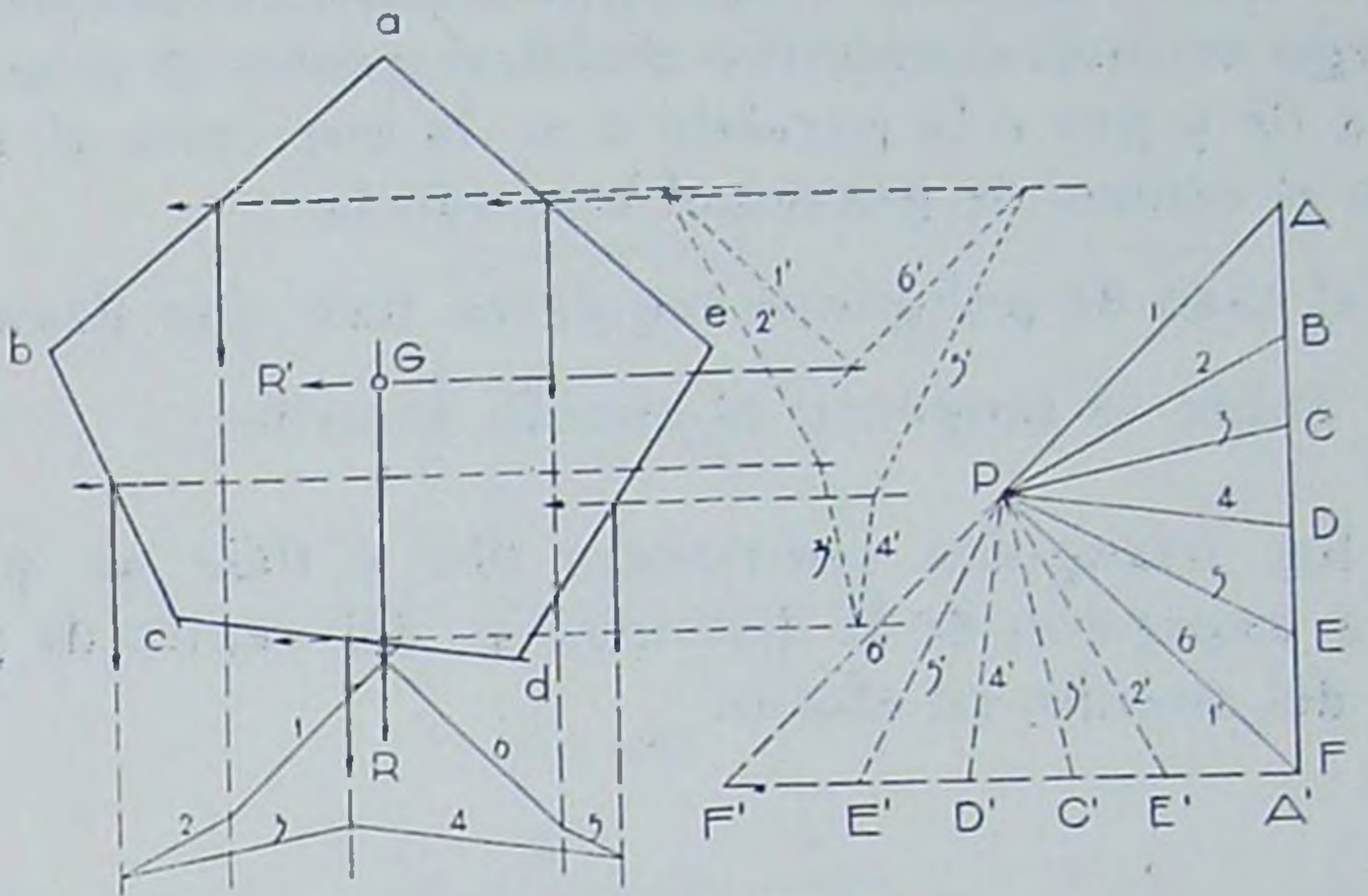

fig. 25

Se forma primero el dinámico de estas fuerzas y el funicular correspondiente; entonces, se determina la línea de acción de la resultante R, en la que debe estar el centro de gravedad buscado. Después se ha hecho girar a las fuerzas un ángulo de 90°, con lo que el dinámico AF toma la posición A'F', y utilizando el mismo polo P se ha trazado un nuevo funicular, que se indica en línea de puntos, el cual determina la línea de acción R', que corta a la R, antes hallada en el punto G, que es el centro de gravedad de la línea poligonal *abcde.*

Al observar la fig. 25 podemos hacer una importante simplificación. Como de la línea AF se pasa a la A'F' por medio de un giro de 90° en torno del polo P, los radios polares del dinámico A'F' son perpendiculas a los homólogos del dinámico AF; por consiguiente no hace falta construir el dinámico A'F', sino que basta trazar el segundo funicular con la condición de que sus lados sean perpendiculares a los radios polares del primer dinámico.

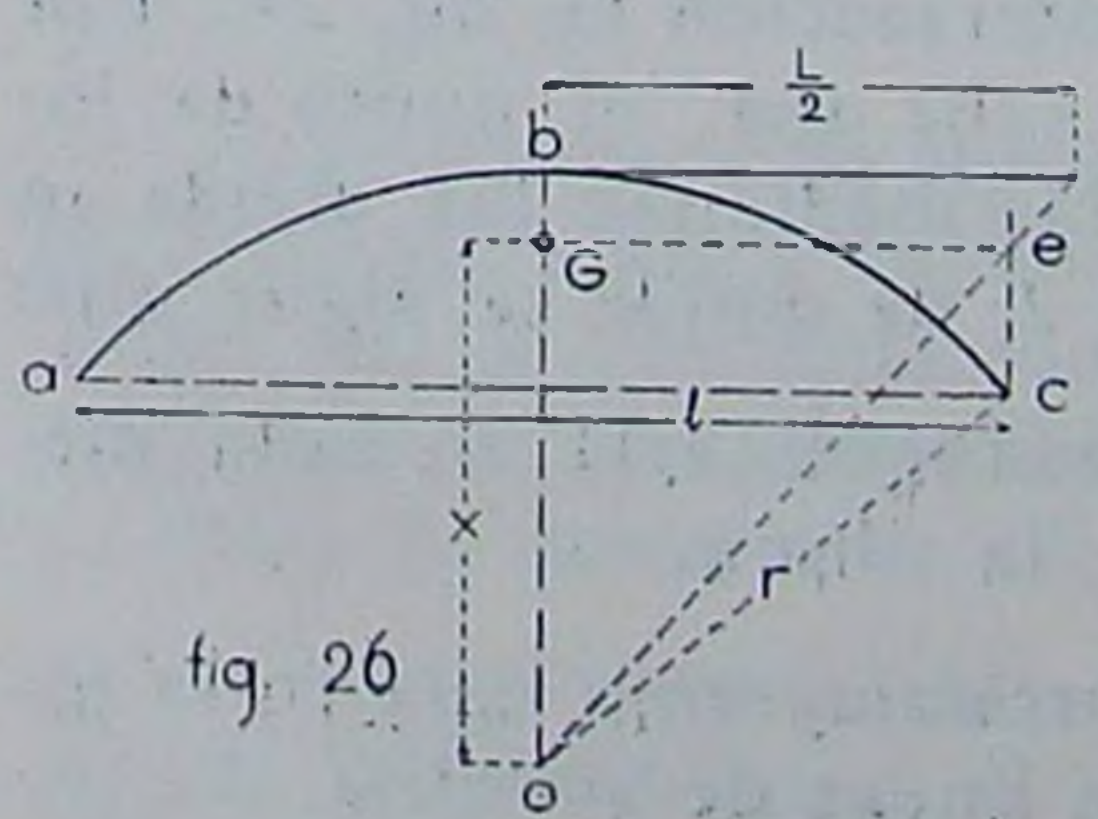

fig. 26

27.—*Centro de gravedad de una línea poligonal regular y de un arco de círculo.*—Vamos a determinar el centro de gravedad del arco de círculo *abc* de centro *O.* Se toma sobre la tangente en *b* la magnitud $bd = \frac{L}{2}$, representando L la longitud del arco o el perímetro de la línea poligonal para el caso de un polígono; luego se une el extremo *d* con el centro *0* y se traza *ce* paralela a *0b* y por *e* la paralela a *ac* la que corta al eje de simetría en el centro de gravedad buscado G.

En el caso de polígonos regulares hay que llevar la longitud $\frac{L}{2}$ sobre la tangente al círculo inscrito.

De los triángulos semejantes *0bd* y *0Ge* se puede encontrar la expresión de la distancia *x*, del centro de gravedad al centro del círculo; en efecto:

$$\frac{r}{L/2} = \frac{x}{l/2}$$

de donde:

$$x = \frac{r.\, l}{L}$$

en la que *l* es la cuerda del arco y *r* el radio del círculo.

Centros de gravedad de áreas planas

28.—*Centro de gravedad de un triángulo.*—Tracemos las medianas *cd* y *be* y se observa que estas líneas forman una línea de simetría, luego las medianas *be* y *cd* pasan por el centro de gravedad de la figura y como debe estar a la vez en las tres medianas, estará en su intersección G, fig. 27. Por Geometría se sabe que, el punto de intersección de las medianas las divide en la razón de 1: 2; de donde se sigue que:

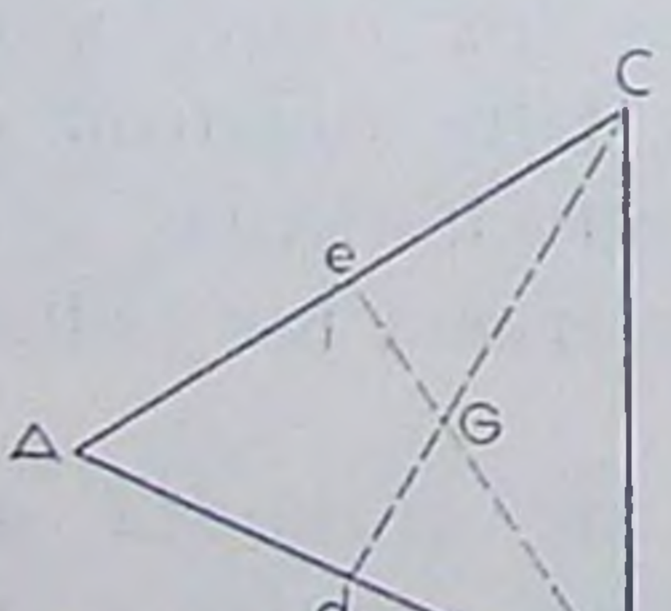

fig 27

El centro de gravedad de un triángulo está en cada mediana y dista de la base el tercio de la altura.

El centro de gravedad de un paralelogramo está en la intersección de las diagonales, que son líneas de simetría.

29.—*Centro de gravedad de un trapecio.*—Sea el trapecio *abcd* de lados *dc* y *ab* paralelos. Unamos el punto *f*, mitad de

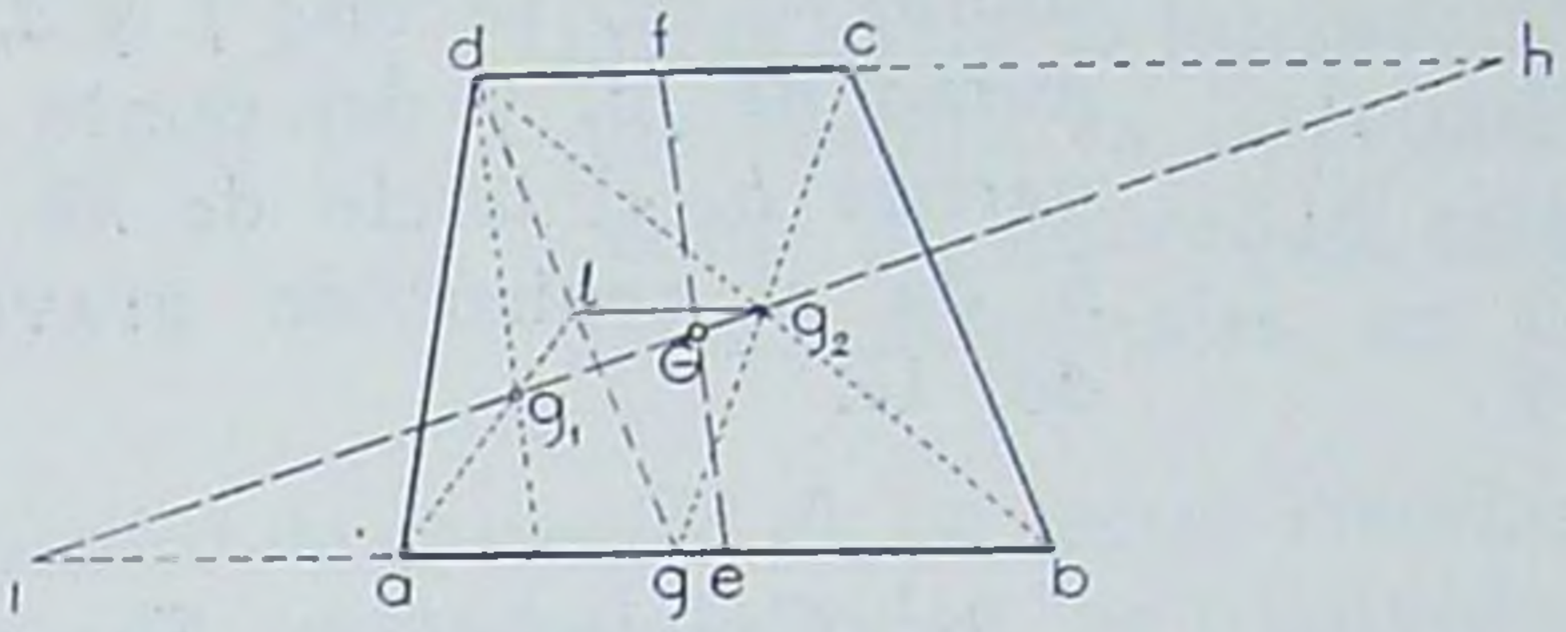

fig. 28

ac, con el punto *e*, mitad de *ab*. La línea *fe* es una línea de simetría; por tanto, sobre ésta estará el centro de gravedad. Tracemos la línea *dg* paralela a *cb;* el trapecio queda dividido en un triángulo *adg* y en un rectángulo *bcdg*, que tienen sus centros de gravedad en g_1 y g_2 respectivamente. La recta que une los dos centros de gravedad g_1, g_2, es también un eje de simetría, que corta el otro eje, *fe*, en el centro de gravedad buscado G. Si prolongamos la línea $g_1\ g_2$ corta a las bases prolongadas en los puntos *i* y *h*, y la semejanza de los triángulos $g_1\ g_2\ l$ y $ag_1 i$, que se obtienen al trazar $g_2 l$ paralela a *dh*, dá:

$$\frac{l\,g_1}{g_1\,a} = \frac{l\,g_2}{i\,a}$$

pero como $2\,l\,g_1 = g_1 a$, se tiene:

$$2\,l\,g_2 = ia = cd$$

Además como los triangulos $bg_2 i$ y $g_2 dh$ son iguales, se deduce que $dh = bi$ y, por ser $ia = cd$, también es $ch = ab$.

La construcción anterior, se puede entonces simplificar así: Se unen los puntos medios de las bases *e* y *f*, y se lleva la magnitud *ab*, a continuación de la base menor, hasta *h*, y la magnitud *dc* a continuación de la *ab*, en sentido contrario; la línea *hi* corta a la *ef* en el centro de gravedad buscado.

A veces esta construcción se sale fuera de los límites del dibujo, y por lo cual se recomiendan las siguientes:

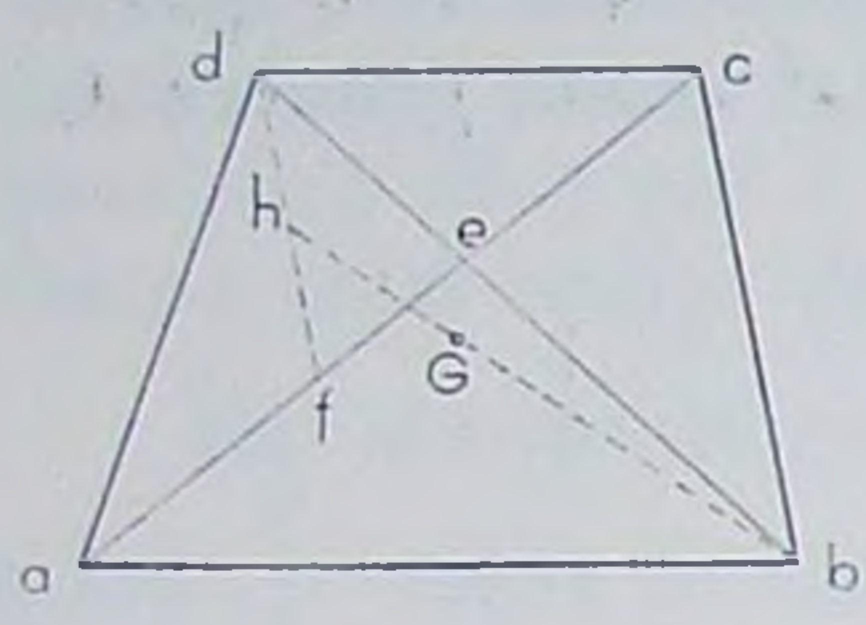

fig 29

1ª. *Construcción.*—En el trapecio *abcd*, fig. 29, tracemos las diagonales *ca* y *db*, luego se lleva la magnitud $af = ec$, se une *f* y *d*, se toma la mitad de *fd*, y del punto *h* se une al vértice *b*, el tercio de *hb* a partir de *h* dá el centro de gravedad buscado, G.

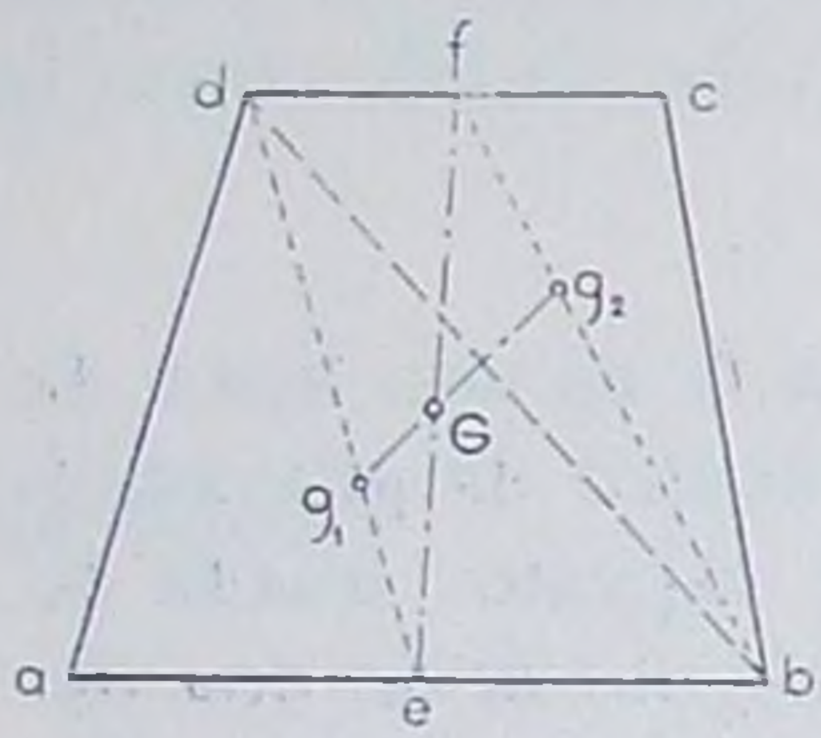

fig 30

2ª. *Construcción.*—Sea el trapecio de la fig. 30, se traza la línea de simetría *ef*; por medio de la diagonal *db* se divide el trapecio en dos triángulos *abd* y *bdc* y se tiene los centros de gravedad g_1 y g_2; se une g_1 y g_2, el punto de la interseccion de esta línea con *ef* dá el centro de gravedad buscado G.

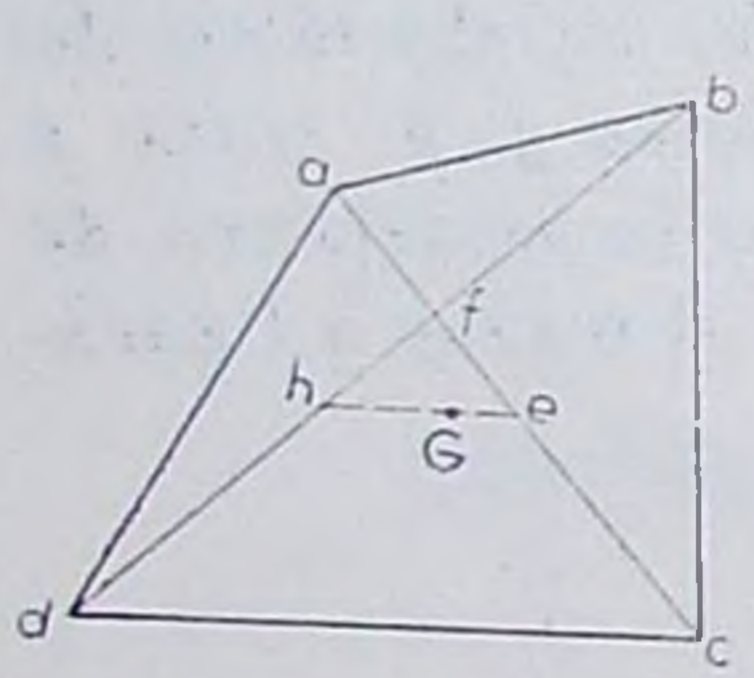

fig 31

30.—*Centro de gravedad de un cuadrilátero cualquiera.*

1ª. *Construcción.*—Fig. 31. Sea un cuadrilátero cualquiera *abcd*: tracemos las dos diagonales *ac* y *bd*; tomemos el punto medio de *ac*, que es *e*; tracemos $dh = bf$ y se dibuja *eh*. Dividamos esta línea en tres partes iguales; G es el centro de gravedad buscado.

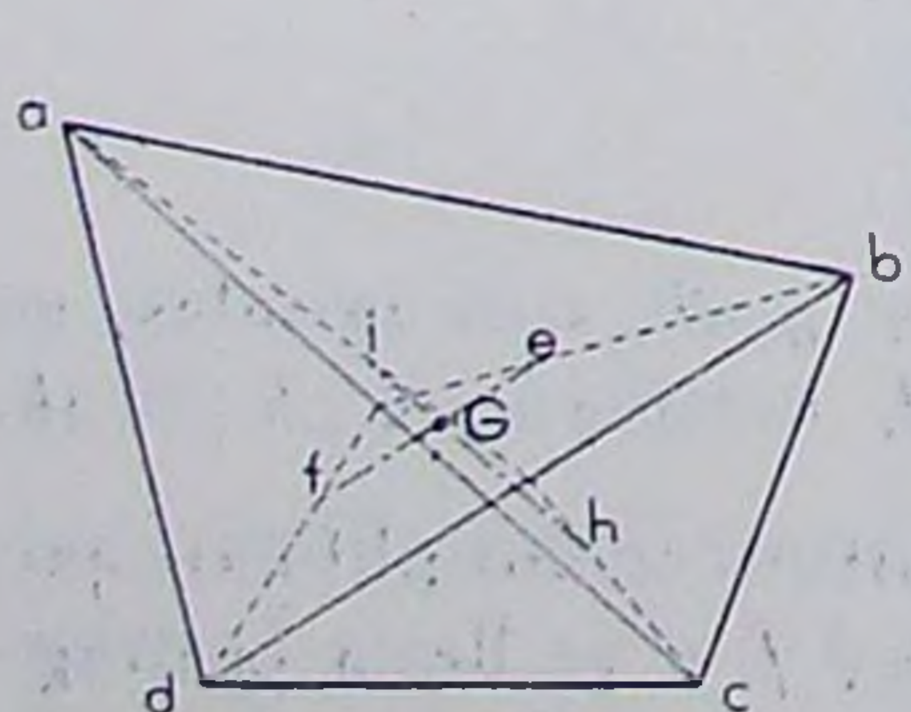

fig 32

2ª. *Construcción.*—Fig. 32. En el cuadrilátero *abcd*, tracemos las dos diagonales. Entonces el centro de gravedad está sobre la recta *ef* que une los dos centros de gravedad de los dos triángulos *abc* y *adc*. Se encuentra igualmente sobre la recta *ih* que une los centros de gravedad de los dos triángulos *abd* y *cbd*. El centro de gravedad de toda la figura está pues en la intersección de *ef* y *hi*, en G.

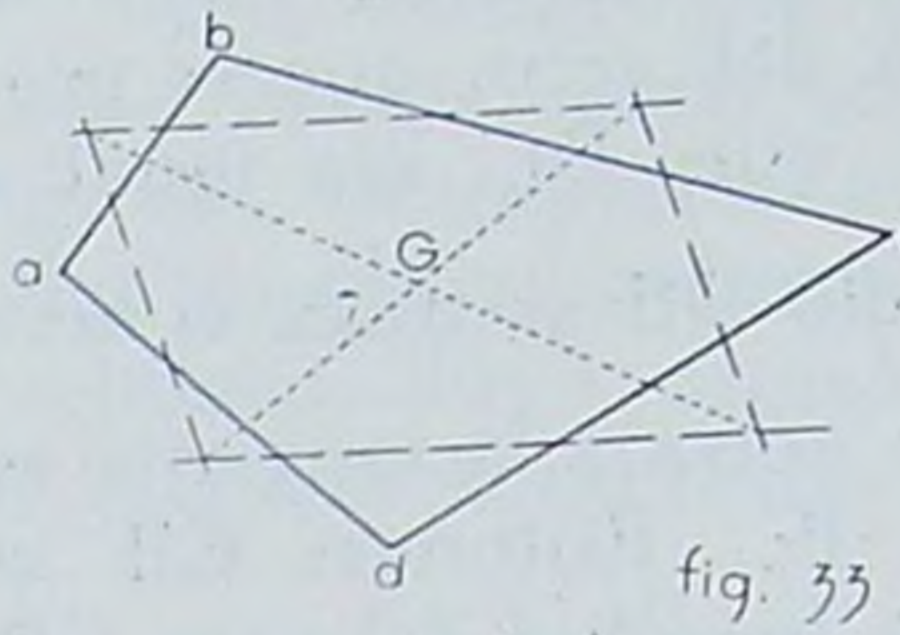

fig. 33

3ª. *Construcción.* Cada uno de los lados del cuadrilátero *abcd*, fig. 33, se divide en tres partes iguales; por los puntos de división se trazan líneas hasta la intersección. La figura que resulta es un cuadrilátero, cuyo centro de gravedad está en el cruce de las diagonales, en G.

31.—*Centro de gravedad de un sector circular.*—En la fig. 34, el centro de gravedad de todos los triángulos elementales tales como *0mn*, se encuentran sobre el arco *fh* tal que, $0f = {}^2/_3\ 0a$; por consiguiente, la circunferencia que tiene el centro *0* y radio $^2/_3\ r$, llamando *r* el radio *0c*, es en la que se encuentran todos los centros de gravedad de todas las áreas elementales. De manera que el centro de gravedad del arco *fh*, es el centro de gravedad del sector buscado. La determinación de éste se efectúa según lo dicho en el número 27.

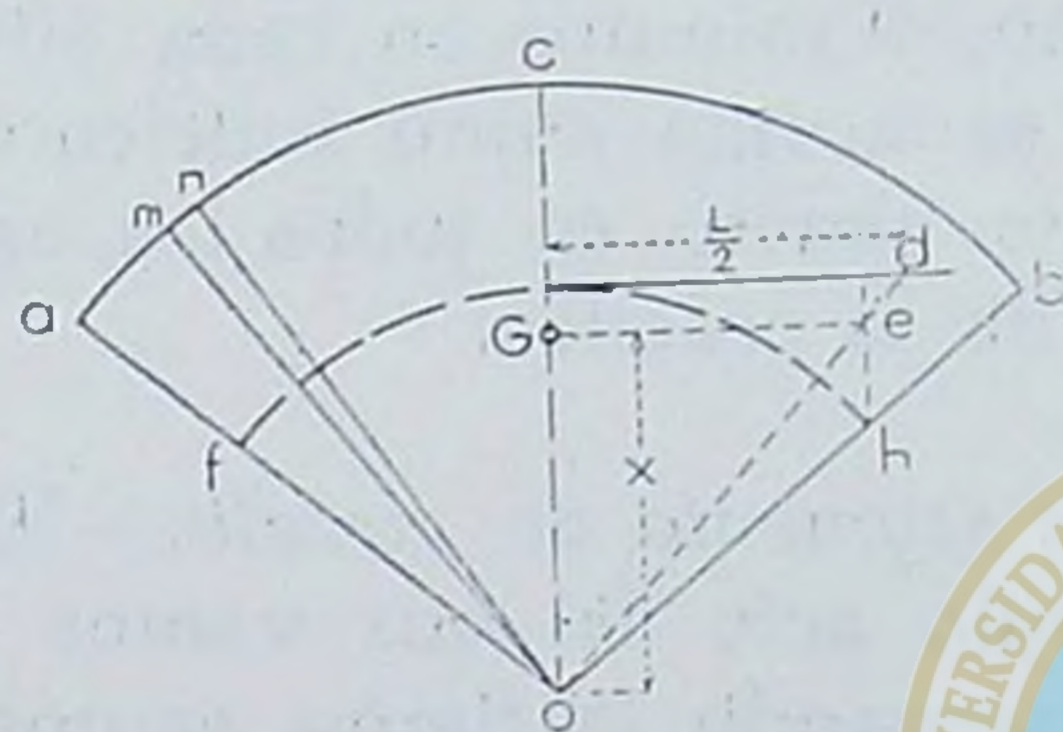

fig 34

La distancia *x* del centro de gravedad al centro del sector *0*, es

$$x = \frac{2}{3}\,\frac{r.\,l}{L}$$

en la que *l* es la longitud de la cuerda y L es la longitud del arco del sector.

32.—*Centro de gravedad de un medio circulo.*—Este centro de gravedad, se lo encuentra por medio de la expresión:

$$0G = \frac{4}{3}\,\frac{R}{\pi} = 0{,}4244\,R$$

en la que 0G es la distancia del centro del círculo al centro de gravedad, llevado sobre el radio perpendicular al diámetro.

Rectificación de un arco circular.—En la resolución de los casos anteriores, se necesita conocer un método para rectificar un arco de círculo; he ahí:

Sea el arco CB que vamos a rectificar, fig. 35.

Por C se traza una tangente indefinida, CE; luego la cuerda BC, que pasa por los extremos del arco, que se prolonga hasta el punto D, de manera que DC sea igual a $\frac{BC}{2} = CF$. Del punto D y con un radio DB se traza el arco BE, que corta a la tangente en el punto E. Entonces CE es igual a la longitud del arco CB.

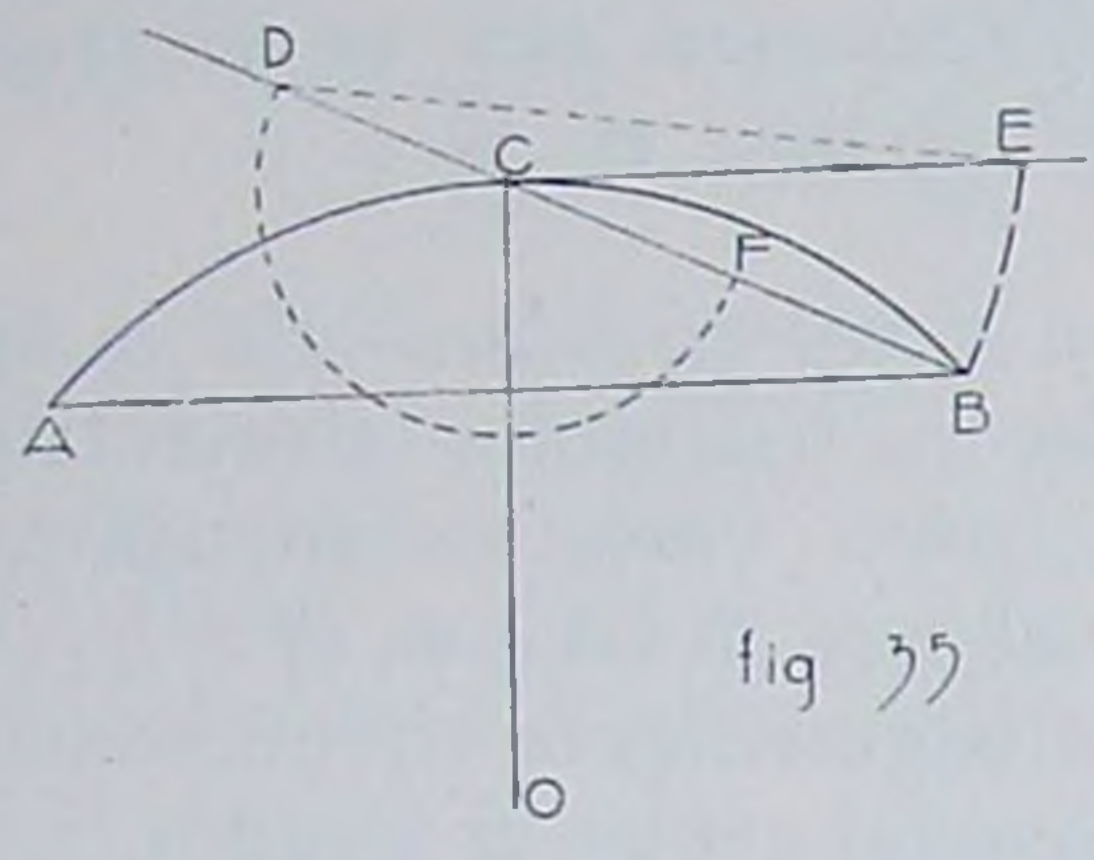

fig 35

Este resultado es aproximado, pero el error cometido, con este trazado gráfico, es tan pequeño, 4 minutos en cada 60°, que se acepta como suficientemente exacto en todos los casos de la práctica.

33.—*Centro de gravedad de un segmento de círculo.*—En la fig. 36, sea el segmento de círculo *acb*, del que vamos a buscar el centro de gravedad. Observando la figura se nota que *0c* es un eje de simetría y que por lo mismo el centro

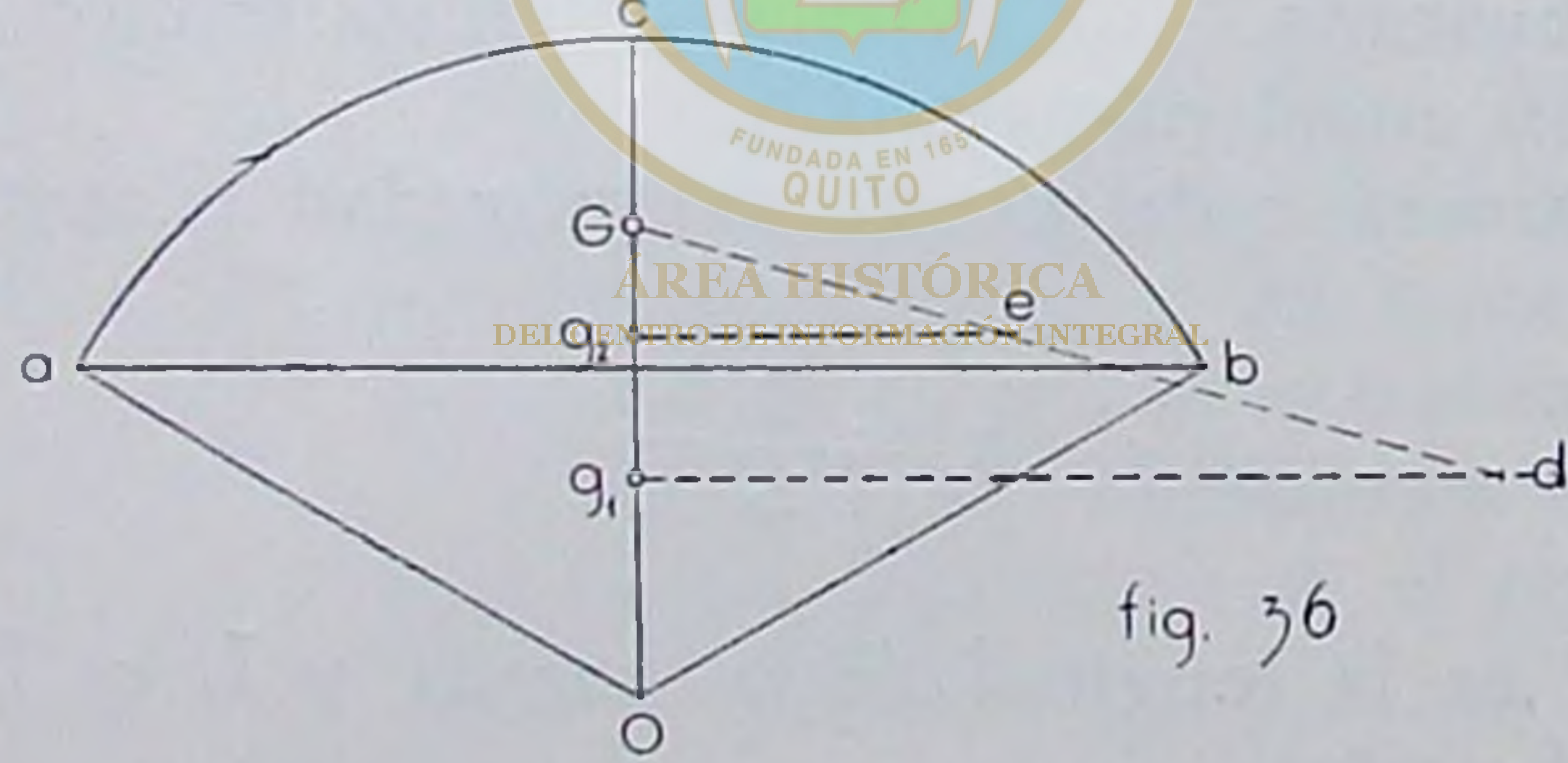

fig. 36

de gravedad está sobre esta línea. Y también estará en el punto de aplicación de la resultante de las dos fuerzas paralelas y de sentido contrario; iguales, la una al área del sector *0acb* y la otra, al área del triángulo *0ab*.

Entonces tracemos $g_1 d$ por el centro de gravedad del triángulo *0ab* y pongamos $g_1 d$ a escala y proporcionalmente al área del sector circular *0acb*. Se traza, además, $g_2 e$, por el centro de gravedad del sector y proporcional al área del triángulo *0ab*. Unamos *de*, que corta, esta línea prolongada, al eje de simetría *0c* en el punto G, que es el centro de gravedad buscado.

34.—*Centro de gravedad de un trapecio circular.*—Así como hecho antes, se descompone el trapecio circular *abcfed*, fig. 37, en trapecios pequeños de manera que cada una en ellos pueda asimilarse, con suficiente exactitud, a un trapecio rectilíneo, cuyo centro de gravedad sabemos ya hallar. En el trapecio sombreado de la figura se ve que:

$$\frac{\Delta L}{\Delta l} = \frac{R}{r}$$

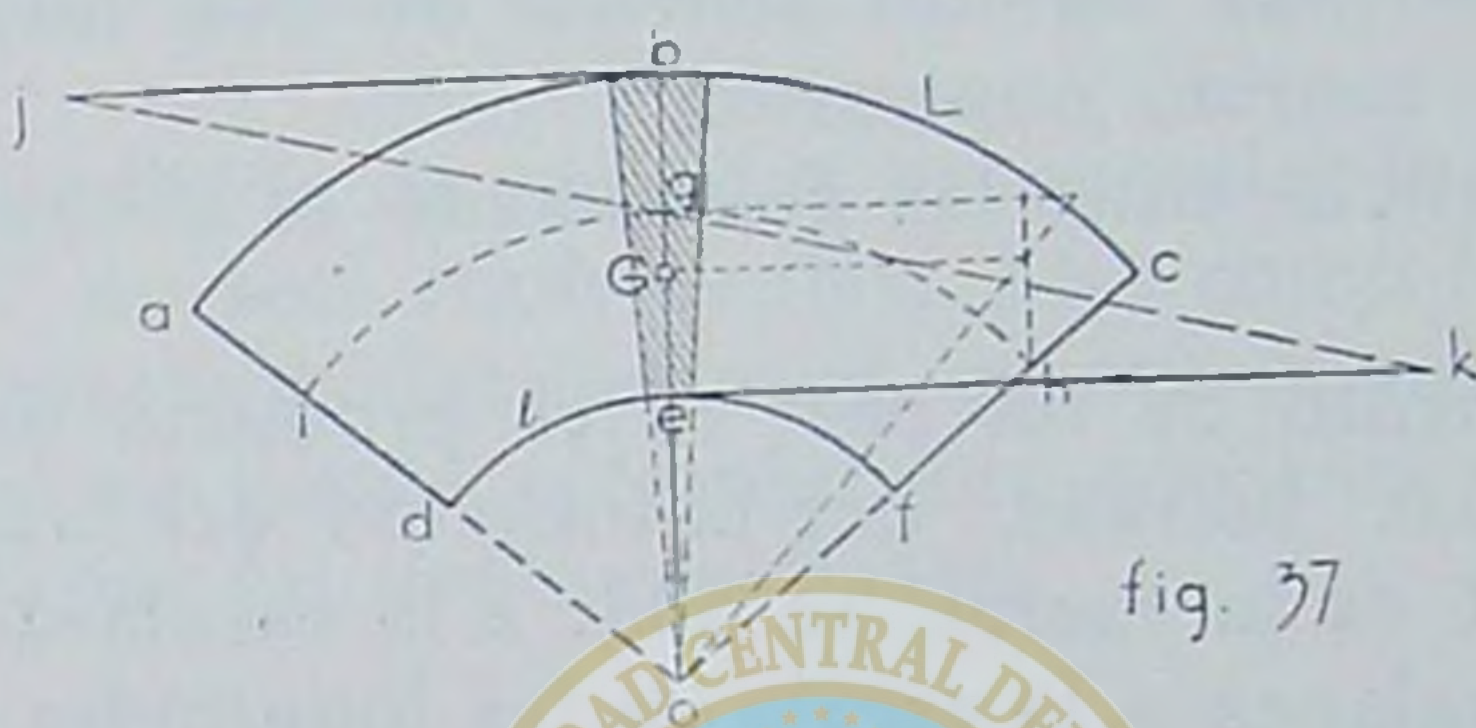

fig. 37

luego las longitudes de sus bases pueden ser substituidas por los radios respectivos.

Como el trapecio es isósceles, bastará llevar a partir del eje de simetría *bO*, en la tangente al arco exterior, el segmento $\frac{R}{2} + r = bj$, y en la tangente al arco interior el segmento $\frac{r}{2} + R = ek$, y la recta de unión de los extremos *j* y *k* corta al eje *Ob* en el centro de gravedad *g*, del trapecio sombreado. Los centros de gravedad de todos los trapecios parciales forman el arco *ih* cuyo centro de gravedad G, es el buscado, que se determina como se explicó en el número 27, al tratar del arco de círculo.

35.—*Centro de gravedad de una figura cualquiera.*—Si tenemos una superficie de forma cualquiera, se divide en pequeños elementos de forma geométrica que se reemplaza por fuerzas paralelas entre ellas y de magnitud proporcional a la superficie elemental correspondiente.

Se tiene entonces una serie de fuerzas paralelas, que se determina la resultante para dos direcciones diferentes tal como hemos explicado, al tratar del centro de gravedad de un polígono cualquiera, número 26. El punto de intersección de las dos resultantes es el centro de gravedad buscado.

CAPITULO IV

Pares

36.—Un *par* es un sistema de dos fuerzas paralelas, iguales y de sentido contrario.

La distancia entre las dos fuerzas es el brazo de palanca del par.

El momento de un par es el producto de la intensidad de una de las fuerzas, por la longitud del brazo de palanca. La magnitud de la fuerza se mide a la escala de las fuerzas y el brazo de palanca a la escala de las longitudes.

37.—*Pares equivalentes.*—Cuando se tiene un par y dos rectas paralelas, se puede reemplazar este par por otro equivalente, formado por dos fuerzas que tienen como líneas de acción las dos paralelas dadas.

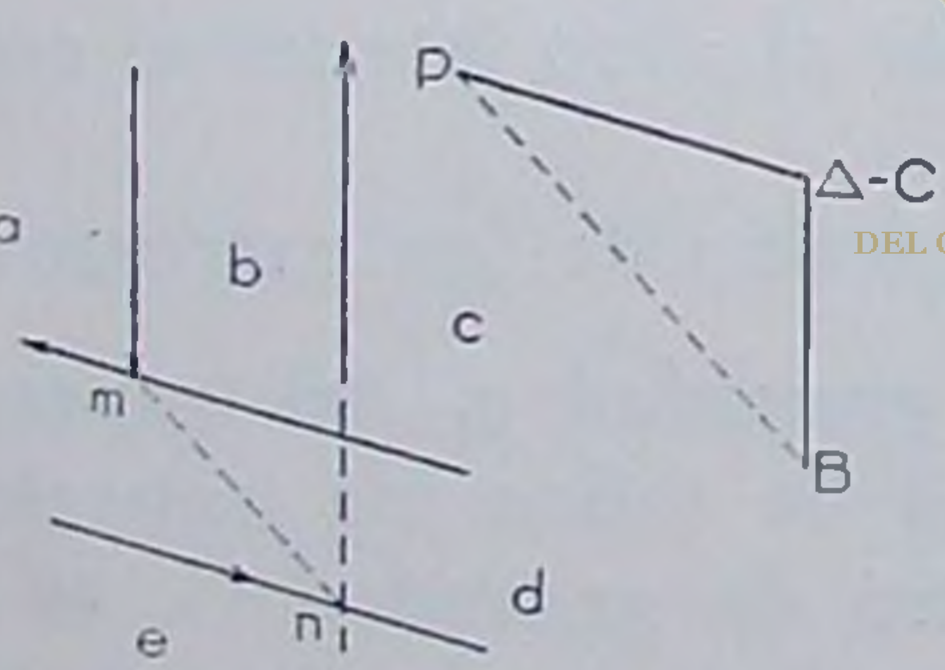

fig. 38

Sea el par *ab* y *bc* y las dos paralelas *cd* y *de*; Fig. 38. Prolonguemos las líneas de acción del par hasta que corte a las paralelas, luego se une estos puntos *m* y *n.*

Tracemos el dinámico ABC, por el extremo A se dibuja una paralela a las paralelas dadas *cd* y *de*, y por B se traza una paralela a la línea *mn*; el punto de intersección determina el polo del dinámico, con el que ya está trazado el funicular correspondiente. Por el teorema fundamental de Estática Gráfica se sabe que, todo sistema de fuerzas se puede reducir a dos, cuyas líneas de acción son las dos paralelas y que son también los lados extremos del funicular y por magnitudes los radios polares AP y PC. El sentido del par se indica en la figura con las flechas.

38.—*Un par no tiene resultante.*—Sea el par *ab* y *bc*, fig. 39. Supongamos que tenga una resultante R; por medio de la construcción anterior formemos el par equivalente *cd*

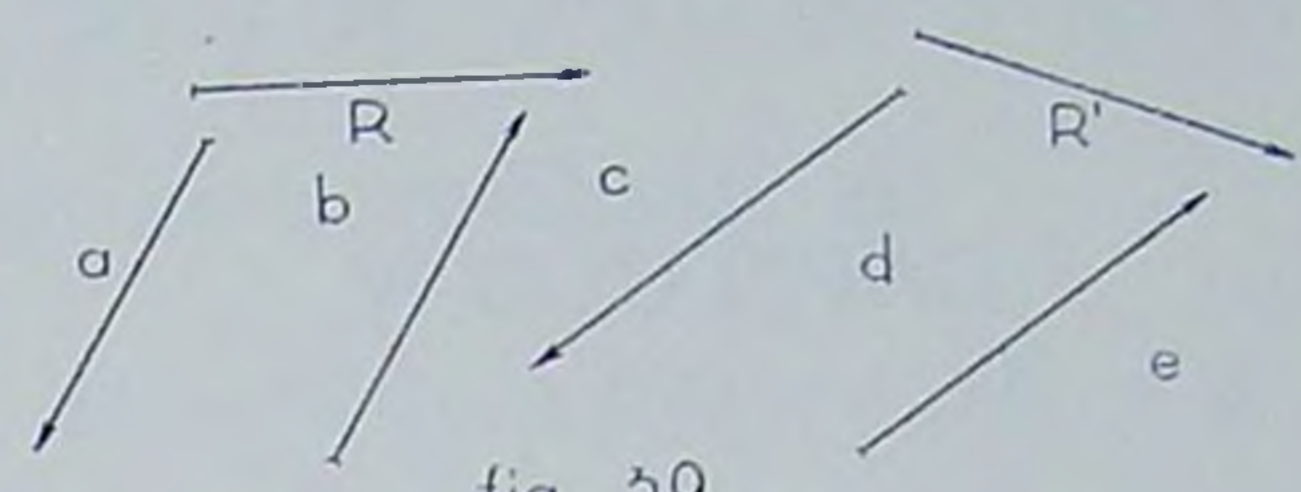

fig 39

y *de*. Los pares siendo equivalentes, sus resultantes deben ser también equivalentes; es decir, iguales, paralelas y del mismo sentido.

Sólo la condición de igualdad se cumple: luego las resultantes R y R' no son equivalentes; pero como los pares que se suponen representarlas tienen el mismo momento, se deduce que un par no puede reemplazarse con una fuerza única, o sea que un par no tiene resultante.

39.—*Traslación paralela de una fuerza*.—Se puede trasladar una fueza F, fig. 40, que actúa en un punto *a*, a otro punto *b*, aplicando además una fuerza F' igual, paralela y de sentido contrario a F. Las fuerzas F y F' forman un par, que es el par de traslación de la fuerza F al punto *b*.

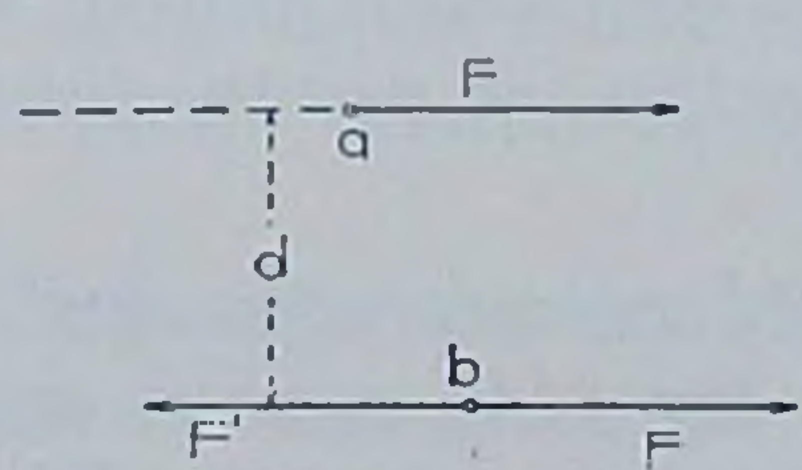

fig 40

No se ha alterado el estado del cuerpo, puesto que las dos fuerzas F y F' aplicadas en el punto *b* se equilibran.

El sistema se ha convertido, pues en el formado por una fuerza, F', aplicada en *b*, que con la primitiva, F, aplicada en *a*, constituye el par, de momento

$$M = F.d$$

y la fuerza F, aplicada en *b*, que substituye a la dada.

Cuando se trata de un sistema de fuerzas, se determina primero su resultante y se traslada ésta como si se tratase de una fuerza aislada.

CAPITULO V

Momentos

40.—El momento de una fuerza con relación a un punto, es el momento del par de traslación de esta fuerza en este punto; o también se dice, que es el producto de la magnitud de esta fuerza por su distancia al punto.

Teorema de Varignon.—La suma algebraica de los momentos estáticos de todas las fuerzas de un sistema situadas en un plano, respecto de un punto cualquiera, es igual al momento estático de su resultante con relación al mismo punto.

Para el caso de que el sistema se convierta en un par, el momento de éste es igual a la suma de los momentos de todas las fuerzas del sistema con relación al punto considerado.

Para hacer simple la figura consideremos sólo dos fuerzas de diferentes direcciones F_1 y F_2, fig. 41, con el mismo punto de aplicación A. El momento estático de una fuerza puede representarse, por el área de un paralelogramo o por el doble del área de un triángulo, pues es el producto de dos dimensiones.

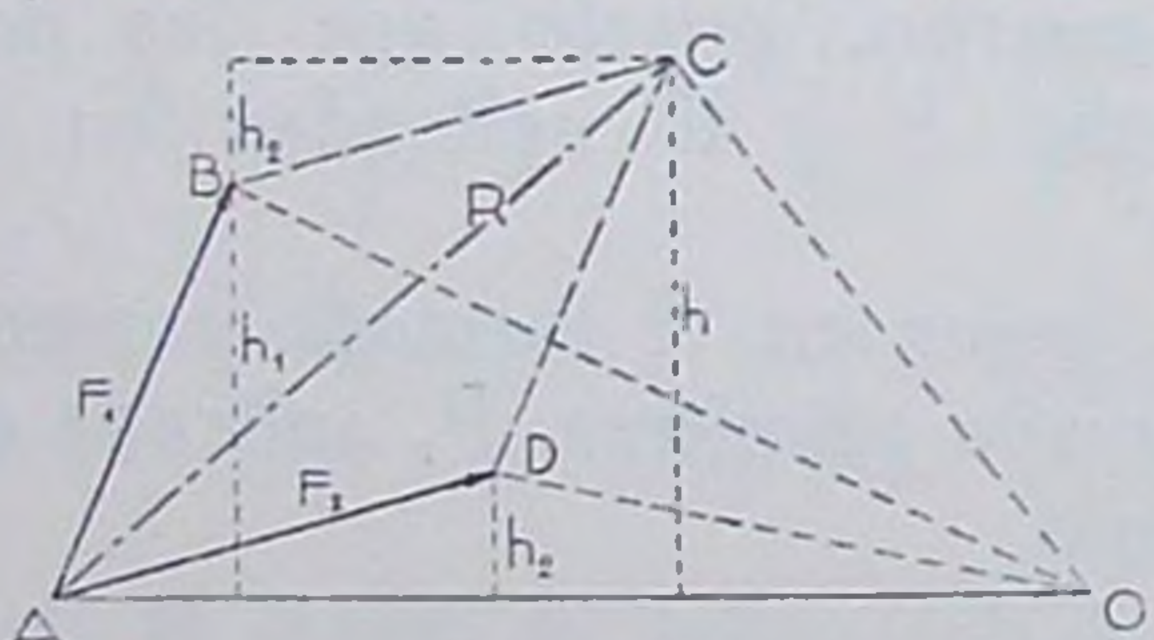

fig. 41

Hallemos primero la resultante, R, y unamos los vértices A, B, C, D del paralelogramo de las fuerzas con el punto O tomado como eje de momentos.

Los momentos de las dos fuerzas dadas, F_1 y F_2 son:

$$M_1 = 2 \triangle ABO = \overline{AO} \times h_1$$

$$M_2 = 2 \triangle ADO = \overline{AO} \times h_2$$

Sumando estas igualdades, resulta:

$$M_1 + M_2 = \overline{AO}\,(h_1 + h_2)$$

El momento de la resultante es:

$$M = 2 \triangle ACO = \overline{AO} \times h$$

de la inspección de la figura dá:

$$h_1 + h_2 = h$$

luego será:

$$M_1 + M_2 = M$$

Este mismo procedimiento se aplica cualquiera que sea el número de fuerzas.

41.—*Teorema.*—*El momento estático de un sistema de fuerzas situadas de un modo cualquiera en un plano, respecto de un punto dado, es igual al producto de la distancia polar de su resultante por el segmento que los lados extremos del funicular determinan sobre la recta paralela a la resultante trazada por el punto tomado como eje de momentos.*

Supongamos un sistema cualquiera de fuerzas, nos proponemos determinar el momento de su resultante R con relación a un punto O, fig. 42.

Para simplificar la figura vamos a considerar sólo la porción de funicular relativa a esta fuerza.

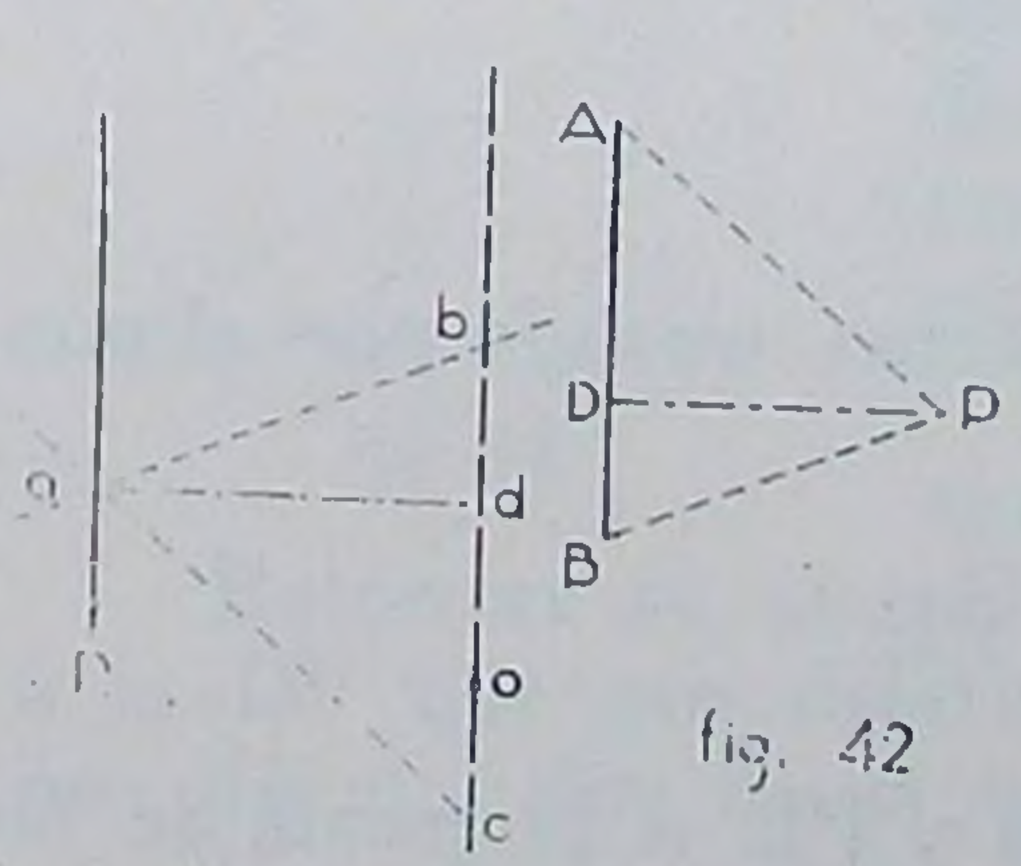

fig. 42

Del punto O se traza una paralela a la fuerza R; a esta paralela corta los lados extremos del funicular, en los puntos *b* y *c*. Luego se dibuja la distancia *ad* de la fuerza al punto O y la distancia polar DP.

Los triángulos semejantes *abc* y ABP dan:

$$bc : AB :: ad : DP$$

y

$$bc \times DP = AB \times ad = R \times ad = \mathcal{M}.\, R$$

por lo tanto

$$\mathcal{M} R = bc \times DP$$

bc se mide a la escala de las fuerzas y DP a la escala de longitudes, o inversamente.

42.—*Momento de fuerzas paralelas con relación a un mismo punto.*

Este caso es el que se presenta generalmente en la práctica, y por lo mismo vamos a desarrollarlo completo.

Sea un sistema de tres fuerzas paralelas *ab*, *bc* y *cd*, fig. 43. Tracemos el dinámico y el funicular de polo P. La distancia polar es PE. Vamos a encontrar los momentos con relación al punto *m*.

Para el momento de la resultante, según el teorema anterior, se tiene que los lados extremos del funicular, limitan al

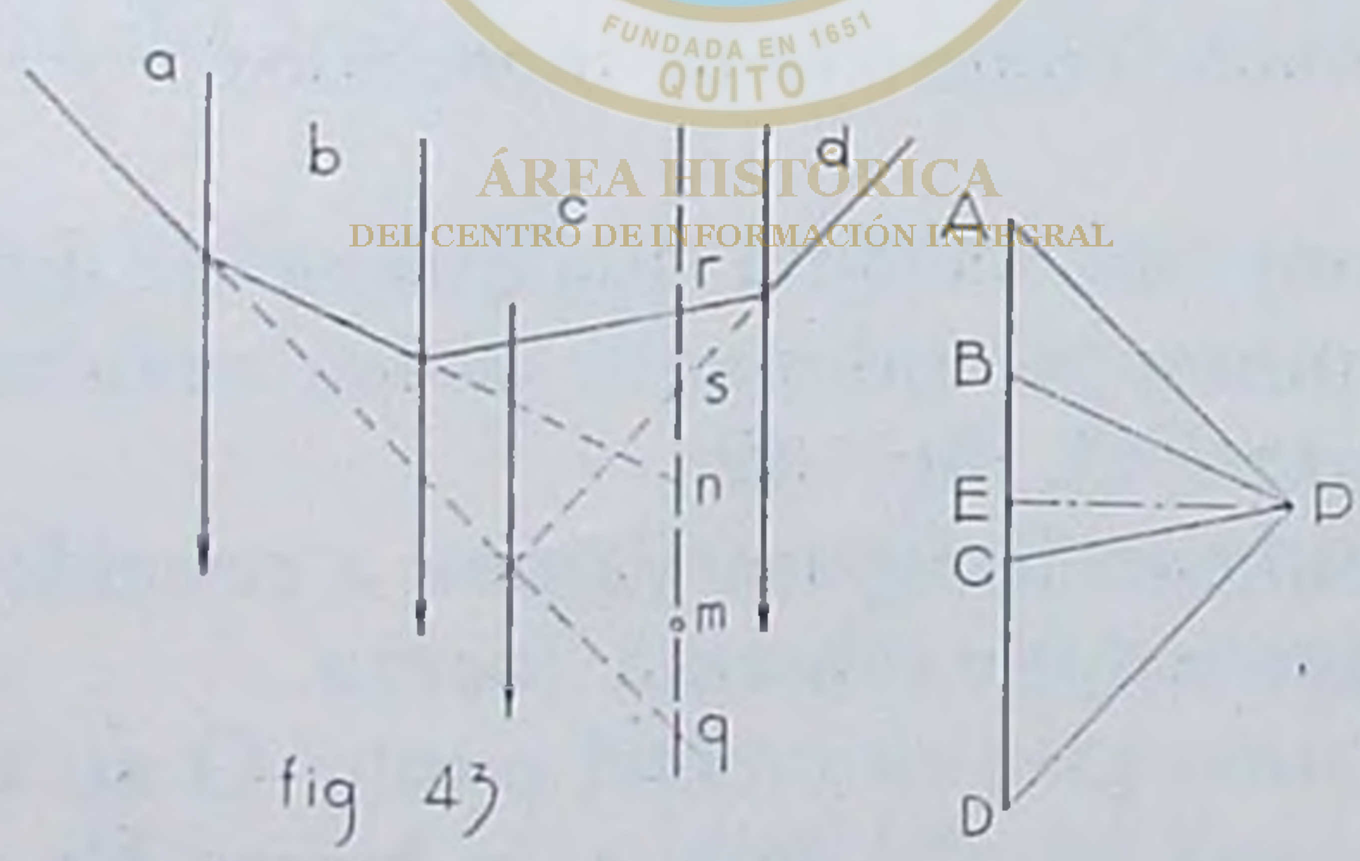

fig 43

segmento *qs*, que es paralelo a las fuerzas, trazado por el punto *m*, en los puntos *q* y *s*, luego

$$\mathcal{M} R = qs \times PE$$

se mide *qs* a la escala de las fuerzas y PE a la escala de las longitudes.

Para encontrar el momento de la resultante parcial de las fuerzas *ab* y *bc*, se procede de igual modo: el segmento trazado por *m* limitan los lados prolongados *a* y *c* del funicular, que son los extremos, en *q* y *r*, luego

$$\mathcal{M}.\ (ab + be) = qr \times PE$$

Así mismo el momento de *ab* con relación al mismo punto es:

$$\mathcal{M}.\ (ab) = qn \times PE$$

Vemos que en todos los casos, se tiene el factor común PE, o sea la distancia polar; si hacemos esta distancia igual a la unidad habremos simplificado los cálculos, que es lo que se aconseja.

De aquí se deducen los siguientes corolarios:

43.—*Corolarios.* 1°. En el caso de fuerzas paralelas, los momentos con relacion a cualquier punto, son directamente proporcionales a los segmentos que los representan, trazados en los distintos funiculares.

2°. En dos cualquiera de los funiculares que pueden trazarse, para un mismo sistema de fuerzas paralelas, los segmentos limitados por lados homólogos de dichos funiculares, son inversamente proporcionales a las distancias polares respectivas.

44.—*Escala de momentos.* Hay casos en que no se puede escoger arbitrariamente la distancia polar, entonces es conveniente construir una escala de momentos en función de la distancia polar.

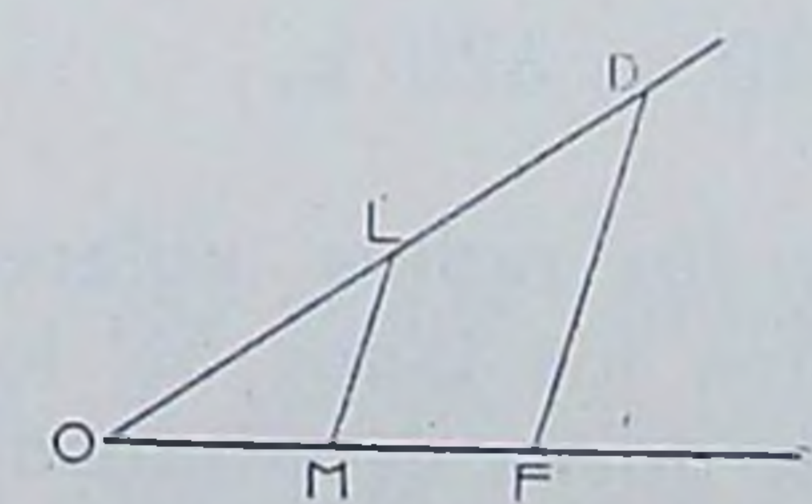

fig. 44

Sobre uno de los lados de un ángulo cualquiera, se toma OL igual a la unidad de longitud; así mismo, a partir del punto O se toma OD igual a la distancia polar, fig. 44.

Sobre el otro lado se hace que OF sea igual a la unidad de fuerza.

Entonces se une D y F, y por L se traza una paralela a la DF que nos determina el punto M. La distancia OM nos dá el valor de la unidad de momento.

Cuando la unidad de fuerza no es apreciable gráficamente, se toma 10 o más veces, es decir 10 o más kilogramos, y el trazado se hace como antes; en este caso el punto M, fig, 43, no nos dá la unidad de momento, sino 10 o más unidades.

45.—*Ejemplo de aplicación.—Encontrar el momento de un sistema de fuerzas con relación a un punto.*

Sea un sistema de seis fuerzas, que tienen como intensidad:

$$ab = 360^k; \quad bc = 200^k; \quad cd = 300^k.$$

$$de = 150^k; \quad ef = 250^k; \quad fg = 220^k.$$

Todas las fuerzas son verticales, a excepción de la primera y de la segunda; que son inclinada la una y horizontal la otra; de manera que las tres fuerzas $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, forman el triángulo ABC y definen un mismo sentido al recorrer el perímetro. Se desea encontrar:

1°. La resultante del sistema en magnitud y sentido;
2°. Calcular la escala de momentos;
3°. El momento del sistema con relación a un punto *m* tomado sobre la línea de acción de *bc;* que es horizontal;
4°. El momento de las tres primeras fuerzas, *ab, bc* y *cd,* que forman en el dinámico un triángulo, con relación a un punto *n,* tomado sobre la línea de acción de la fuerza *bc.*

1°. Para encontrar la resultante del sistema, tracemos el dinámico ABCDEFG; las tres primeras fuerzas forman un triángulo cerrado, su suma geométrica es nula; entonces la resultante del sistema se reduce a la suma de las fuerzas:

$$de + ef + fg = 150 + 250 + 220 = 620 \text{ k.}$$

De un polo cualquiera P, tracemos los radios polares 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y paralelamente a éstos los lados del funicular 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. La resultante queda determinada por la intersección de los lados extremos 1 y 7 y por la magnitud DG del dinámico.

2°. *Escala de momentos.* La escala de las longitudes es de 1:100 y la de las fuerzas 1 cm. es igual a 100 kilos, con estos datos calculemos la escala de los momentos:

Sea γ la escala de los momentos;

α la escala de las longitudes (0,01 por metro);

$$\alpha = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

β la escala de las fuerzas (0.01 por 100 k.).

$$\beta = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

por lo tanto se debe tener:

$$d \times \frac{1}{\gamma} = d \times \frac{1}{\alpha} \times \Delta \times \frac{1}{\beta}$$

en la que *d* es la ordenada que se quiere medir y Δ es la distancia polar.

Si se mide *d* y Δ en su verdadera magnitud, se tiene: ($\Delta = 0.04$)

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \Delta$$

de donde:

$$\gamma = \frac{\alpha\,\beta}{\Delta} = \frac{10^{-2} \times 10^{-4}}{0.04} = \frac{10^{-6}}{4 \times 0.01} = \frac{1}{4 \times 10^4}$$

y

$$\frac{1}{\gamma} = 4 \times 10^4$$

Se puede también proceder gráficamente. Del vértice R de un ángulo cualquiera y sobre uno de los lados, se lleva la unidad de longitud RL = 1 m. y la distancia polar Δ = RP. Sobre el otro lado se lleva la unidad de fuerza, pero como no es gráficamente apreciable, hacemos RF = 500 k.

Unamos P y F y por L, extremo de la dimensión gráfica de la unidad de longitud, se traza una paralela a PF y queda determinada la magnitud RM que representa 500 unidad de momento, o sea, 500 Kgm.

Con esta medida se traza la escala de momentos.

Pues RM = 0.0125 = 500 Kgm.; o lo que es lo mismo: 1 cm. = 400 Kgm., que es el valor deducido de la fórmula anterior, pues $\frac{1}{\gamma} = 40.000$

3º. Conocida la escala de momentos, vamos a determinar el momento del sistema con relación al punto *m* tomado sobre la línea de acción de *bc*. Por el punto *m*, tracemos una paralela a la resultante; esta paralela corta en *s* y *t* a los lados extremos del funicular, 1 y 7.

La ordenada *st* medida a la escala de los momentos, nos dá el valor del momento buscado:

$$\mathcal{M}(R) = st = 1.900 \text{ Kgm.}$$

o también, si *st* medimos a la escala de las fuerzas y Δ a la de longitudes:

$$\mathcal{M}(R) = st \times \Delta = 475 \times 4 = 1.900 \text{ Kgm.}$$

Se comprueba también multiplicando el valor de la resultante R por la distancia de su línea de acción al punto considerado:

$$\mathcal{M}(R) = 620 \times 3.08 = 1.909 \text{ Kgm.}$$

La diferencia depende en que la distancia 3,08 no está exactamente apreciada, es un poco menor, pues la escala es muy pequeña.

4º. Determinemos, ahora, el momento de las tres fuerzas *ab*, *bc* y *cd* con relación al punto *n*, sobre la línea de acción de *bc*. El momento de esta fuerza con relación a *n* es por construcción nulo.

No quedan sino las dos fuerzas, la *ab* y *cd*.

Tracemos el dinámico de estas dos fuerzas, trasladando la fuerza AB a B'C. Los radios polares son 1', 3 y 4.

Añadamos al funicular, el lado 1', trazando de la intersección del lado 3 con la fuerza *ab*.

El punto *h*, intersección de los lados extremos 1' y 4, dá la posición de la resultante $b'c' = ab + cd$ y cuya magnitud es B'D.

El momento buscado, es el momento de *b'c'* con relación a *n*. De este punto se traza una paralela a B'A, a la que cortan los lados extremos 1' y 4 en *u* y *v*, respectivamente.

La distancia *uv* medida, no a la escala de momentos, porque la distancia polar ha cambiado, sino a la escala de las fuerzas multiplicado por la nueva distancia polar Δ', medida a la escala de las longitudes, dá el momento buscado.

$$\mathcal{M}\,(ab + cd) = uv \times \Delta' = 550 \times 0{,}8 = 440 \text{ Kgm.}$$

Este procedimiento es largo e incómodo, puesto que se necesita el trazado de un nuevo dinámico y funicular y el punto de intersección *h* sale fuera de los límites del papel.

Es mejor operar valiéndonos del siguiente razonamiento:

El momento, con relación a *n*, de las tres primeras fuerzas es igual al momento de todo el sistema, menos el momento de las tres últimas:

$$\mathcal{M}\,(R) - \mathcal{M}\,(de + ef + fg) = kl - jl = -jk$$

Como se ve por el signo, el momento de la resultante es menor que el momento de las tres últimas fuerzas.

Midiendo con las respectivas escalas dá:

$$jk \times \Delta = 110 \times 4 = 440 \text{ kgm.}$$

Además, al considerar el triángulo del dinámico ABC, es un polígono cerrado que corresponde a un funicular que no se cierra, luego el sistema de las tres fuerzas se convierte en un par, cuyas líneas de acción son *bc* y *b'c'*.

El momento de este par debe ser igual al momento encontrado anteriormente:

$$bc \times mm' = 200 \times 2{,}2 = 440 \text{ kgm.}$$

Por la misma definición de par de fuerzas se deduce que su momento es constante cualquiera que sea el punto considerado; en efecto, si consideramos de nuevo el punto M, el momento de las tres primeras fuerzas con relación a este punto es:

$$\mathcal{M}\,(R) - \mathcal{M}\,(de + fg) = st - sp = pt$$

y

$$pt = jk = 440 \text{ kgm.}$$

NOTA.—Nos hemos detenido en el estudio de este ejemplo numérico, por cuanto en él se presentan una variedad de aspectos de las propiedades de los funiculares y hace que el alumno, cuando dibuja el ejercicio a escala, recuerde estos diferentes casos.

Momentos de inercia de un sistema de fuerzas paralelas

46.—Por Resistencia de Materiales se sabe que el momento de inercia de una superficie, con relación a un eje cualquiera, es la suma de los productos que se obtiene, al multiplicar el área de cada elemento de la superficie por el cuadrado de su distancia a dicho eje.

Anteriormente hemos definido el momento estático, como el producto de una fuerza, por su brazo de palanca; y se expresa así:

$$\mathcal{M} F \times x$$

en la que $\mathcal{M}$ es el momento, F la fuerza y x el brazo de palanca. Multiplicando este producto, nuevamente por la distancia x, se obtiene la expresión:

$$(F \times x)\, x = F \times x^2$$

que es el momento de inercia de la fuerza F respecto del eje dado, que se designa por la letra I; luego:

$$I = F \times x^2$$

47.—Vamos a determinar gráficamente el valor de I, para un sistema de fuerzas paralelas, que pueden ser representativas de pesos, superficies y volúmenes.

Sean las fuerzas, *ab*, *bc*, *cd* y *de;* fig. 45.

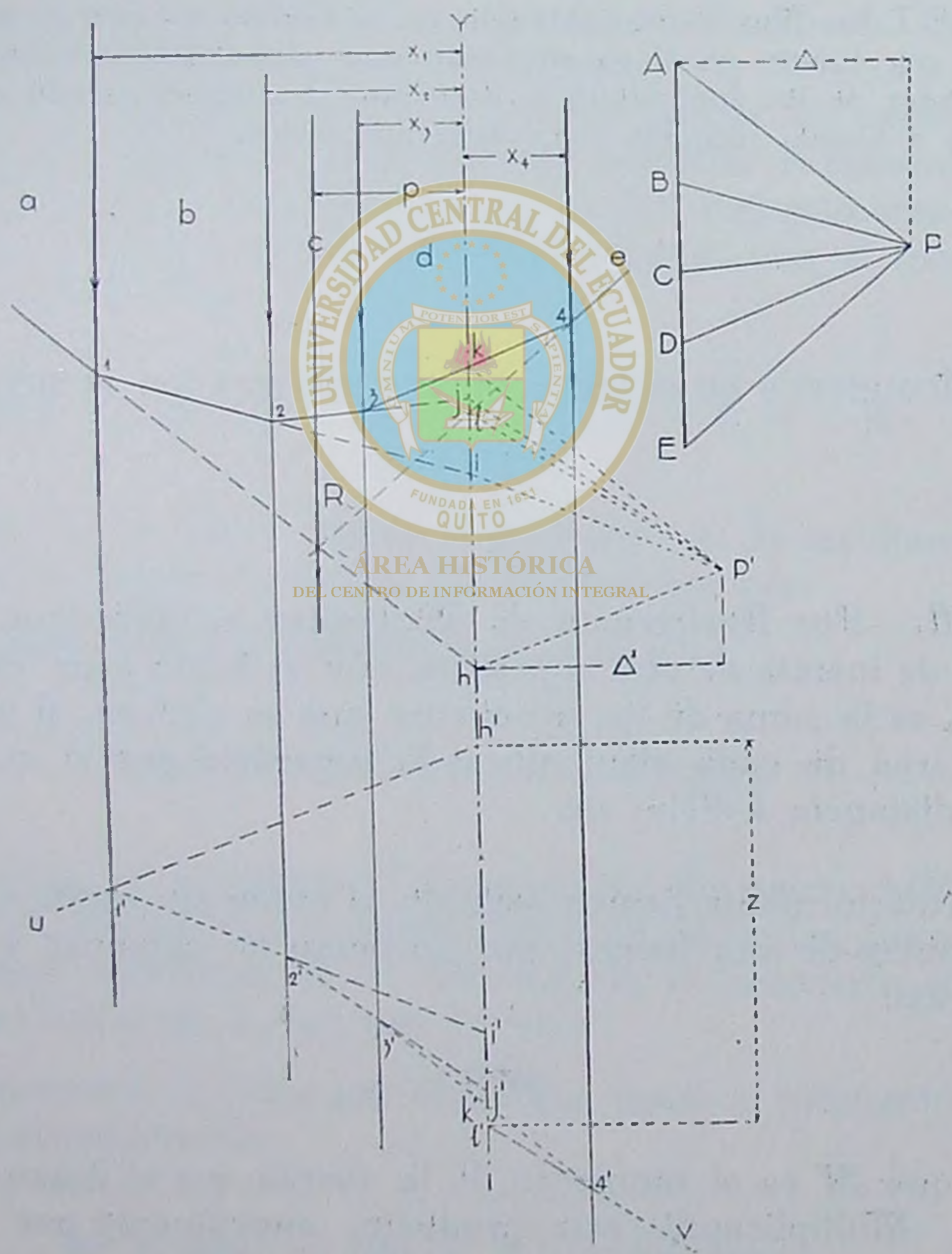

fig 45

Primero se traza el dinámico AE de las cuatro fuerzas paralelas *ab*, *bc*, *cd* y *de*, con un polo cualquiera P se dibuja el funicular correspondiente 1, 2, 3, 4. Entonces se traza el eje YY; con relación a éste vamos a determinar el momento de inercia. Para lo cual se prolongan todos los lados del funicular, que cortan al eje YY en los puntos *h*, *i*, *j*, *k* y *l*. Los triángulos *1hi*, *2ij*......, formados por cada dos lados sucesivos del funicular con el eje YY son semejantes a los triángulos correspondientes del dinámico ABP, BCP...... etc., de donde se deducen las relaciones siguientes, llamando Δ la distancia polar:

$$x_1 : hi :: \Delta : AB; \qquad x_2 : ij :: \Delta : BC$$

de donde

$$AB \cdot x_1 = \Delta \cdot hi; \qquad BC \cdot x_2 = \Delta \cdot ij$$

de una manera general se puede poner:

$$AB \cdot x_1 + BC \cdot x_2 + \ldots\ldots = \Sigma F \cdot x$$

y

$$\Sigma F \cdot x = \Delta \,(hi + ij + \ldots\ldots)$$

representa F a todas las fuerzas del sistema.

Si inspeccionamos la fig. 45 se encuentra que:

$$hi + ij + jk + kl = hl = y$$

tomando siempre la suma geométrica de los segmentos.

El momento estático de todas las fuerzas será:

$$x\,(AB + BC + \ldots\ldots) = \Sigma F \cdot x = M = \Delta \cdot y$$

Ahora a los segmentos *hi*, *ij*, *jk*, *kl*, les consideraremos como fuerzas, que actúan según las mismas líneas de acción de *ab*, *bc*, *cd*, *de* y con un polo arbitrario P', resulta el funicular *uv*, trazado en puntos. Como antes, prolonguemos los lados de este funicular hasta que corten el eje YY en los puntos *h'*, *i'*, *j'*, *k'*, *l'*. También estos lados del funicular con el eje, forman los triángulos *1'i'h'*, *2'i'j'*...... que son semejantes a los correspondientes del dinámico *P'ih, P'ij*......; llamemos Δ' a la distancia polar de este dinámico, se tiene:

$$x_1 : i'h' :: \Delta' : ih; \quad x_2 : i'j' :: \Delta' : ij$$

o también

$$x_1 . ih = \Delta' \, i'h'; \quad x_2 . ij = \Delta' . i'j'. \qquad (1)$$

Por la interpretación gráfica de momentos, demostrada en el número 41 se tiene:

$$(ab)\ x_1 = \Delta . ih \qquad \text{o} \qquad ih = \frac{(ab)\ x_1}{\Delta}$$

y considerando la siguiente fuerza, se tiene de una manera análoga:

$$ij = \frac{(bc)\ x_2}{\Delta} \ldots\ldots\ldots$$

sustituyendo estos valores en las ecuaciones (1) resulta:

$$(ab).\ x_1^2 = \Delta\ \Delta'\ i'h'$$

y también

$$(bc).\ x_2^2 = \Delta\ \Delta'\ i'j' \ldots\ldots\ldots$$

de estas últimas ecuaciones por sumación, sale:

$$(ab)\ x_1^2 + (bc)\ x_2^2 + \ldots\ldots\ldots = \Delta\ \Delta'\ (i'h' + i'j' + \ldots\ldots)$$

y como la suma de los segmentos

$$i'h' + i'j' + j'k' + k'l' = h'l' = Z,$$

se tiene:

$$I = \Sigma\ F.\ x^2 = \Delta.\ \Delta'.\ Z \qquad (2)$$

De suerte que: el momento de inercia de un sistema de fuerzas paralelas es igual al producto de las dos distancias polares, por el segmento que determinan los lados extremos del segundo funicular en el eje de momentos.

En la expresión $\Delta . \Delta' . Z$ se medirá Δ con la escala de las fuerzas, y las magnitudes Δ' y Z con la escala de las longitudes.

También se puede probar que, en el caso de superficies, el momento de inercia es igual al producto del área de la sección dada, por el área comprendida entre el funicular, sus lados extremos y el eje de momentos; siempre que la distancia polar sea la mitad del área dada:

$$I = A . A' \qquad (3)$$

A representa el área de la sección dada y A' el área del funicular, dada como en el enunciado anterior.

48.—*Ejemplo.* Vamos ahora a aplicar, las propiedades que acabamos de enunciar relativas a los momentos de inercia, a una superficie cualquiera. Sea por ejemplo, la sección horizontal de una pila de puente, como la indicada en la figura 46.

Para lo cual se toma un eje de momentos Y Y; como se pide el momento mínimo, debemos tomar el eje que pasa por el centro de gravedad. Luego se divide la sección en fajas muy estrechas, haciendo que estas divisiones sean paralelas al eje; estas superficies así descompuestas, se consideran como fuerzas paralelas aplicadas en sus respectivos centros de gravedad.

Las dimensiones son: 10 metros de largo por 3.50 m. de ancho; los extremos están conformados con superficies curvilíneas, como se indica en la figura 46; tiene un área de 30.34 metros cuadrados. Está dividida la sección en 8 partes, cuyas áreas están representadas por las fuerzas *ab, bc*... etc. Formemos el dinámico de polo P y el funicular correspondiente *rs;* pues la distancia polar lo hemos hecho igual a la mitad del área total, $\frac{A}{2} = \Delta = 15.20$ metros cuadrados. Entonces se traza el segundo funicular *uv* de polo P', cuya distancia polar es arbitraria e igual a $\Delta' = 2{,}55$ m., y se determinan los puntos de intersección de los lados extremos con el eje de momentos YY, el que medido a la escala de las longitudes dá un segmento $Z = 5.05$ m.

Escalas
longitud 1:120 fuerzas 1cm = 4 m²

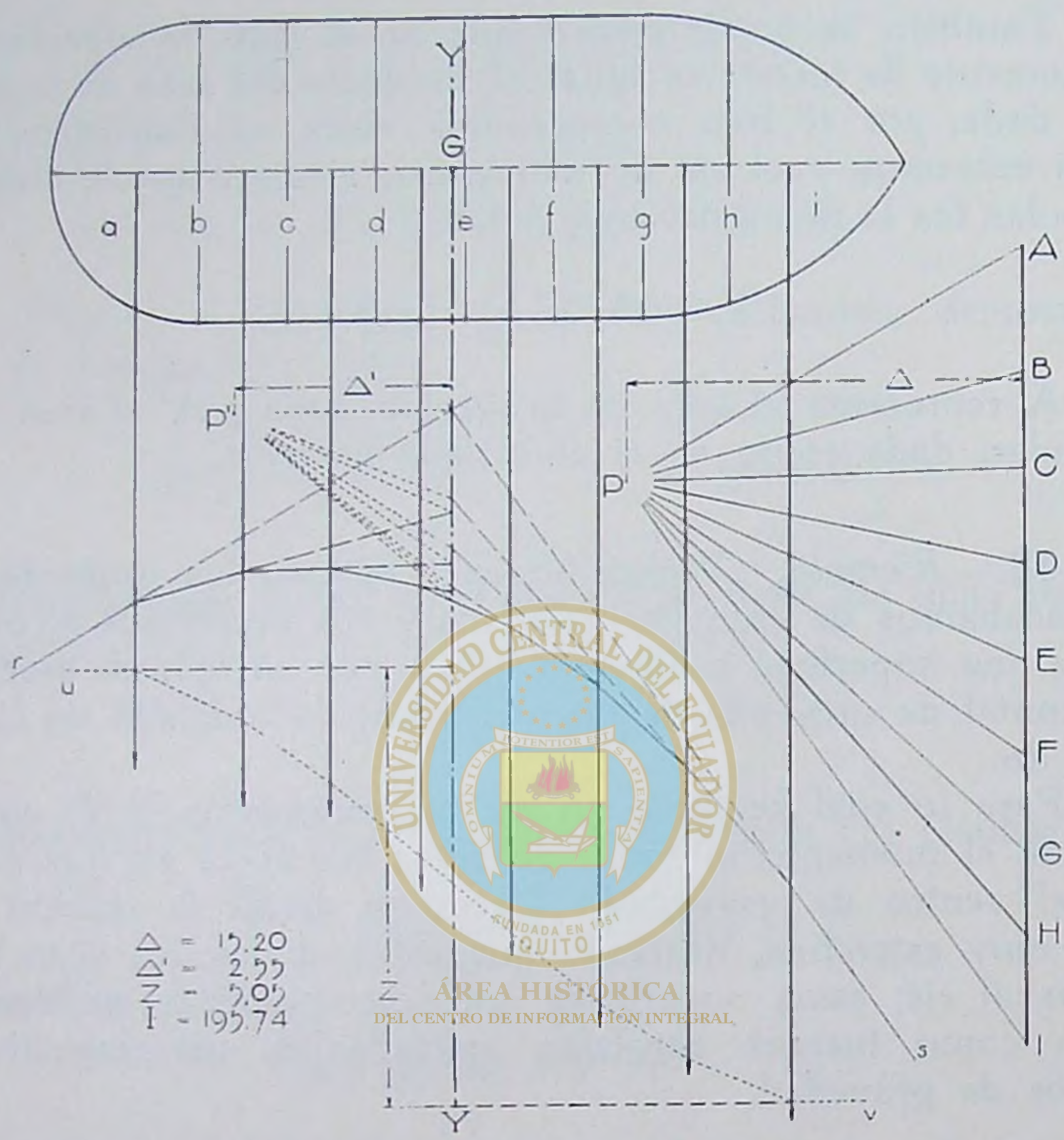

fig. 46

Según la fórmula (2) número 47, tenemos

$$I = \Delta . \Delta' . Z = 15,2 \times 2,55 \times 5,05 = 195,74 \text{ m}^4.$$

Siempre el momento de inercia está representado por el producto de un área por el cuadrado de la distancia al eje, o sea que es una magnitud de cuatro dimensiones.

Calculando según la fórmula (3), del número 47, se encuentra:

$$A = 30,34 \text{ m}^2.$$

y A′, o sea el área comprendida entre el primer funicular y los lados extremos, es igual a 6,45 metros cuadrados; que se mide en el dibujo según la escala adoptada entonces:

$$I = A \times A' = 30,34 \times 6,45 = 195,70 \text{ m}^4.$$

Advirtiendo que se cumplió la condición de que la distancia polar $\triangle = \frac{A}{2} = \frac{30.34}{2} = 15,20 \text{ m}^2$.

CAPITULO VI

Reacciones de los apoyos

49.—En las vigas de cualquier clase, cuando actúan cargas concentradas o repartidas, ejercen sobre sus apoyos, presiones, las que desarrollan reacciones, que son iguales y opuestas.

Las presiones podemos conocer de antemano, y las otras, las reacciones de los apoyos, son las que vamos a determinar para los diferentes casos que se presentan en la práctica.

Diferentes clases de apoyos.—Los sistemas de apoyos que generalmente se usan en la práctica son de tres clases:

1º.—Apoyos libres o apoyos simples;
2º.—Apoyos articulados, en charnela o giratorios;
3º.—Apoyos solidarios o empotrados.

Haremos una breve descripción de cada uno de ellos.

1º.—Apoyos libres.—A esta clase pertenecen los simplemente apoyados, como el caso de una viga, o que tienen mecanismos especiales que se emplean en las estructuras, por medio de los cuales se realizan movimientos paralelos al plano de sustentación, o también por medio de rodillos o esferas, que se hallan comprendidos entre dos placas paralelas; o pueden ser también, por medio de superficies en contacto por un solo punto, siendo la superficie de sustentación plana y la del apoyo curvilínea. Estos movimientos, tienen lugar en la dilatación o contracción que sufren las estructuras cuando están sujetas a cambios de temperatura o a cargas variables.

2º.—Apoyos articulados, son los que están constituidos por un gozne fijado de una manera invariable sobre la superficie de apoyo; pudiendo esta extremidad sufrir variaciones angulares y la reacción correspondiente podrá, por lo tanto, adoptar una dirección cualquiera, pasando siempre por el centro de la articulación. Entonces, en este caso, la reacción es desconocida en magnitud y dirección, pero se conoce su punto de aplicación.

3o.—Los apoyos solidarios o empotrados, están unidos firmemente al plano de sustentación, sin permitirles ningún movimiento, ni cambio de orientación de un plano cualquiera. Quedando invariable y por consiguiente, sin rotación ni desplazamiento.

En la práctica, estos empotramientos se realizan por medio de pernos de anclaje, en las estructuras metálicas; o por medio del mortero en las bóvedas de mampostería y en las vigas, cuando están fuertemente aseguradas dentro del muro.

En este caso, como la superficie de apoyo se supone invariable, es necesario que las reacciones sean de tal naturaleza que puedan equilibrar a las fuerzas exteriores. Ahora, estas fuerzas pueden reducirse, como ya sabemos a una fuerza única y un par. De donde resulta que, hay que determinar tres incógnitas cuando se hace el análisis de estas estructuras.

50.—Se dice que una estructura es estáticamente determinada, cuando el número de ecuaciones de equilibrio es igual al número de incógnitas: como son tres estas ecuaciones, deben ser tres las incógnitas. A estas estructuras se les llama *isostáticas.*

Si el número de incógnitas es inferior a esta cifra, el cuerpo no está en equilibrio.

Si el número de incógnitas es superior a tres se dice entonces que el sistema es estáticamente indeterminado o *hiperestático.*

Para solucionar esta dificultad, se expresa las condiciones suplementarias, por medio de las fórmulas de deformación o elásticas.

En suma, se puede decir, para que las reacciones de los apoyos sea posible determinar, solamente con la ayuda de las leyes de la estática, es necesario que el cuerpo pueda deformarse libremente.

Aplicaremos los conocimientos de Resistencia de Materiales, en el cálculo de las diferentes clases de vigas que se emplean en las construcciones.

El objeto de estos cálculos es verificar la estabilidad de una construcción existente o de determinar las dimensiones necesarias en un proyecto de construcción, para que el trabajo del material empleado no exceda del límite que nos dá la experiencia.

De las consideraciones anteriores resultan dos grandes divisiones de las vigas: las vigas *isostáticas* y las vigas *hiperestáticas*.

Las primeras comprenden:

1º.—Las vigas empotradas en un extremo y libre en el otro.

2º.—Las vigas rectas que descansan en dos apoyos simples.

3º.—Las vigas voladas o salidizas, que son las que reposan sobre dos apoyos simples que no corresponden a los extremos de la viga; y,

4º.—Los arcos con tres articulaciones.

Las segundas o las hiperestáticas, que son las que no se pueden calcular estáticamente comprenden:

1º.—Las vigas empotradas en una extremidad y apoyada en la otra:

2º.—Las vigas empotradas en sus dos extremidades;

3º.—Las vigas, cuyo número de apoyos es superior a dos y se llaman vigas *continuas;*

4º.—Los arcos con dos articulaciones, en cada uno de los apoyos y los arcos empotrados en sus dos extremos.

51.—Las ecuaciones de equilibrio estático son:

1º.—Suma de las proyecciones horizontales de las fuerzas es igual a cero;

2º.—Suma de las proyecciones verticales de las fuerzas es igual a cero;

3º.—Suma de los momentos, con relación a un punto cualquiera del plano, es igual a cero.

Las proyecciones de las fuerzas, se hace con relación a dos ejes rectangulares situados en el plano.

En los problemas que siguen, se considerarán los apoyos como libres, a menos que se indique lo contrario.

52.—*Determinación gráfica de las reacciones de los apoyos en una viga simple.*

Sea la viga X Y que reposa simplemente sobre dos apoyos de nivel, en la que actúan tres fuerzas, *ab*, *bc*, *cd*, dispuestas de un modo cualquiera y que conocemos su magnitud posición y sentido.

Se traza primero el dinámico ABCDEA y con un polo arbitrario P se dibuja el funicular correspondiente, teniendo cuidado que, el primer lado corte en punto cualquiera a la línea de acción de la reacción izquierda, y el último lado del funicular corte a la reacción del apoyo derecho, fig. 47.

El problema se reduce, a convertir el sistema dado de fuerzas en otras dos, cuyas líneas de acción pasan por los apoyos de la viga, X y Y, a las que se les cambia de sentido para formar un sistema en equilibrio. Entonces, el dinámico y el funicular debe cerrarse.

Por los puntos de intersección del primero y último lado del funicular, con las líneas de acción de los apoyos izquierdo

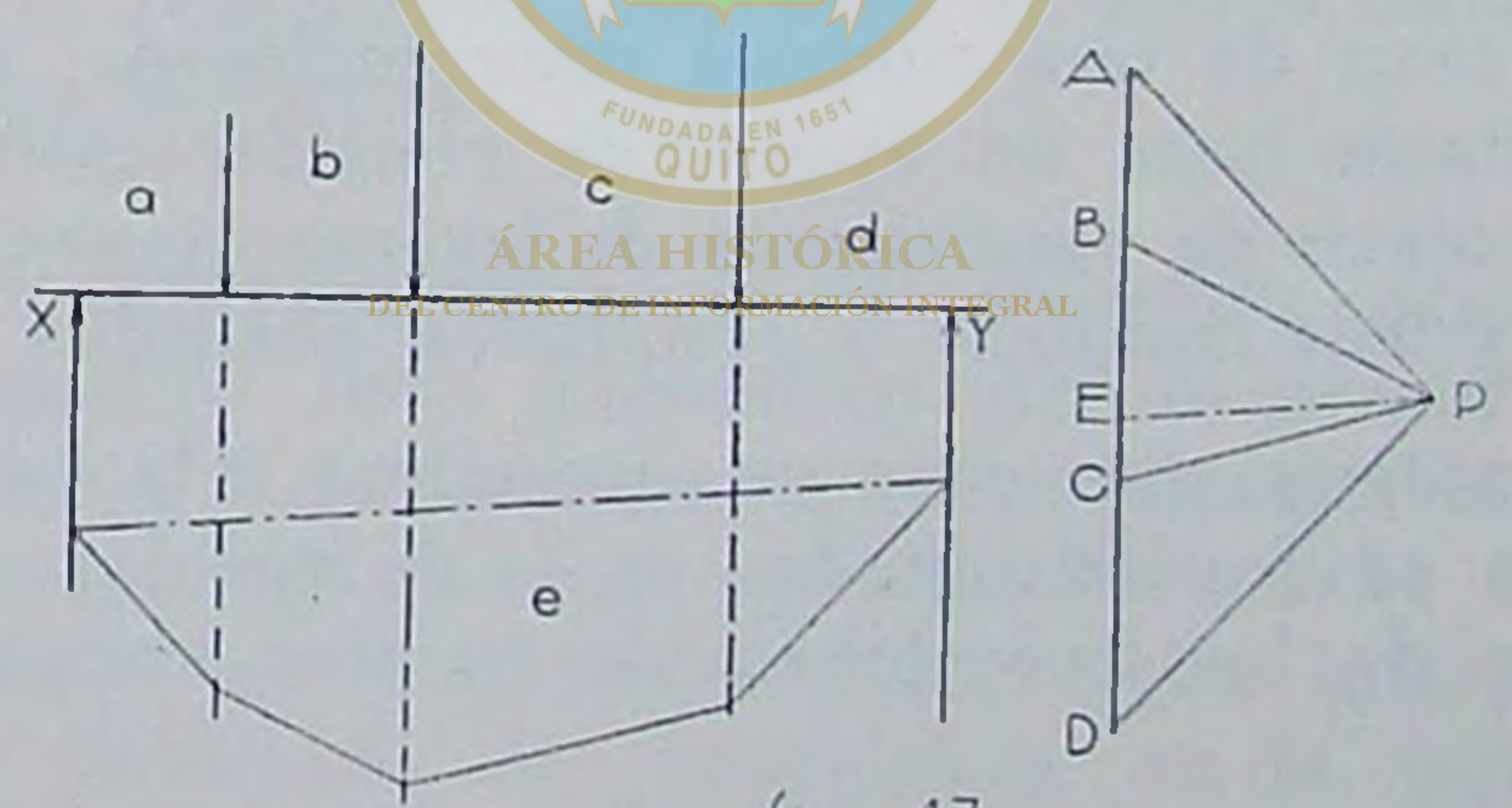

fig. 47

y derecho respectivamente, se traza el lado de cierre *e* y por el polo P una paralela a este lado que corta el dinámico en el punto E. Este punto determina las magnitudes de las reacciones: DE para el apoyo Y; EA para el apoyo X; con lo que se cumple la condición de que el dinámico y el funicular se cierren.

Cuando la carga es uniformemente repartida o que está simétricamente dispuesta, las reacciones son iguales entre sí y de magnitud igual a la mitad de la carga total.

53.—En el ejemplo que acabamos de dar, hemos considerado los apoyos como simples y las fuerzas, verticales; pero sucede con frecuencia, que cuando se hacen los cálculos de una estructura cualquiera, no sólo debe considerarse la carga vertical que casi siempre es la permanente; sino también aquella que, aun cuando pasajera, puede desarrollar esfuerzos dignos de tenerse en cuenta: como es el empuje del viento sobre la cubierta de un edificio, esfuerzos que habrá que añadir a los encontrados con la carga permanente.

Daremos los diferentes casos que se presentan en la práctica:

Caso I—*Armadura fija en sus dos soportes.*— Cuando el techo no es muy inclinado, de manera que la carga resultante, incluido el empuje del viento, sea aproximadamente vertical, las reacciones pueden suponerse paralelas la una a la otra, y por consiguiente paralelas a la resultante; puesto que se recordará que esta estructura es estáticamente indeterminada; es por esto que nos vemos obligados a hacer esta hipótesis.

En el caso de una cubierta muy inclinada, o cuando la carga resultante hace un ángulo de consideración con la vertical, la hipótesis de paralelismo de las reacciones, a la resultante total, puede conducir a resultados absurdos.

La hipótesis que más se aproxima a la verdad, puesto que el caso es indeterminado, es la de que las componentes horizontales de las reacciones de los dos apoyos deben ser iguales.

Si se supone rígida la armadura, con apoyos igualmente elásticos y que no debe entrar en acción a más de la componente horizontal, ninguna otra fuerza, que cause o tienda a destruir los apoyos. Esta hipótesis será la única aceptable; puesto que, los apoyos ceden igualmente, las fuerzas horizontales que son las que causan este movimiento, deben ser también iguales.

Cuando la estructura no está solidariamente unida a sus apoyos, las condiciones serán semejantes al caso I, siempre que el peso y el frotamiento sean suficientes para impedir el movimiento.

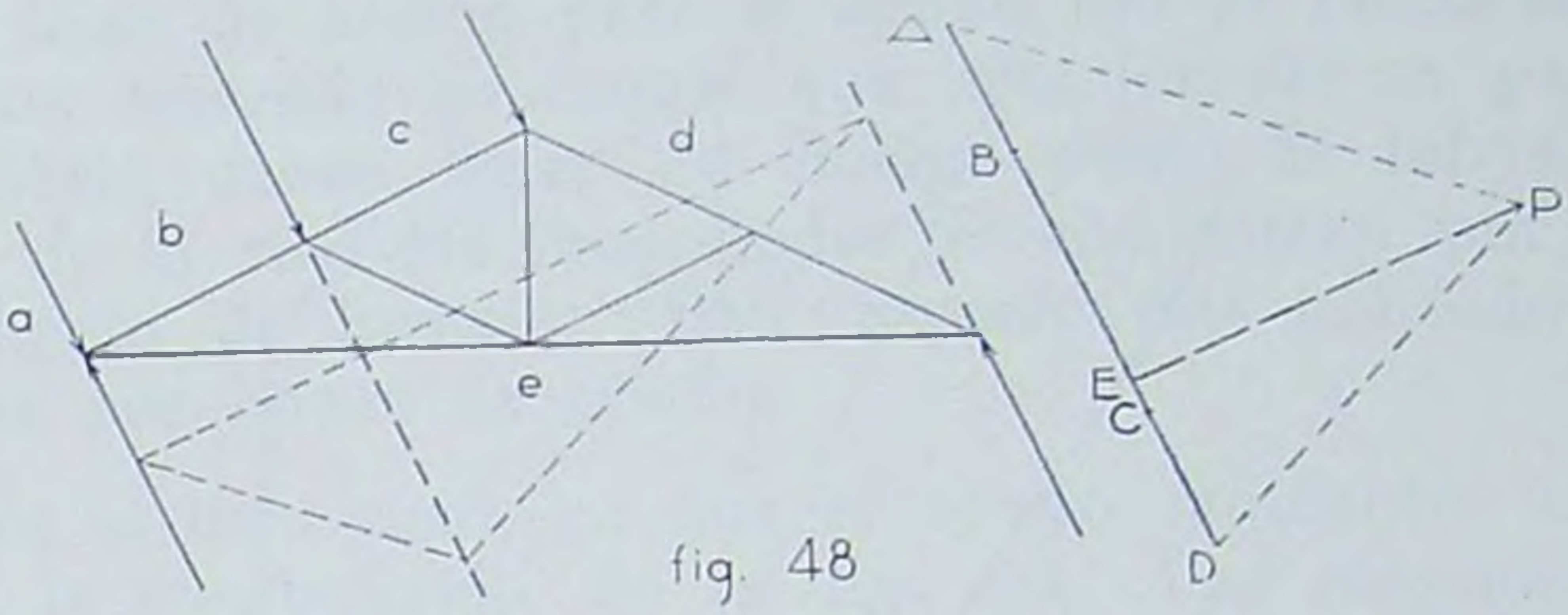

fig. 48

Así en el ejemplo de la figura 48, la armadura está sujeta al empuje del viento del lado de la izquierda, empuje que siempre se le supone uniformemente distribuído, y que ya indicaremos la manera de calcular el empuje total, como también la componente normal.

Entonces la resultante actúa en la mitad de la vertiente izquierda, o sea según *bc*. Como hemos dicho, en este caso las reacciones se las supone paralelas a la resultante. Se traza el dinámico y el funicular. El lado de cierre *e* del funicular y el radio polar correspondiente determinan las magnitudes de las reacciones: DE para el apoyo derecho y EA para el apoyo izquierdo.

Caso II.—Un extremo de la armadura descansa sobre rodillos o cualquier otro dispositivo que le permita dilatarse. Si despreciamos el frotamiento que se desarrolla en el mecanismo, la reacción en este extremo libre debe ser vertical. El frotamiento en el extremo libre, debe interpretarse así: primero se determina las reacciones en la suposición de que ambos extremos son fijos. Si la reacción en el apoyo libre hace un ángulo con la vertical menor que el ángulo de reposo, estas reacciones son las verdaderas. Si, al contrario, la reacción en el apoyo libre, así determinada, hace un ángulo con la vertical mayor que el ángulo de reposo, deben determinarse de nuevo ambas reacciones, con la suposición de que la reacción en el extremo libre hace un ángulo con la vertical igual al ángulo de reposo.

Para este caso, sea el ejemplo de la fig. 49, en el que el extremo derecho reposa sobre rodillos, si despreciamos el frotamiento, su reacción deberá ser vertical.

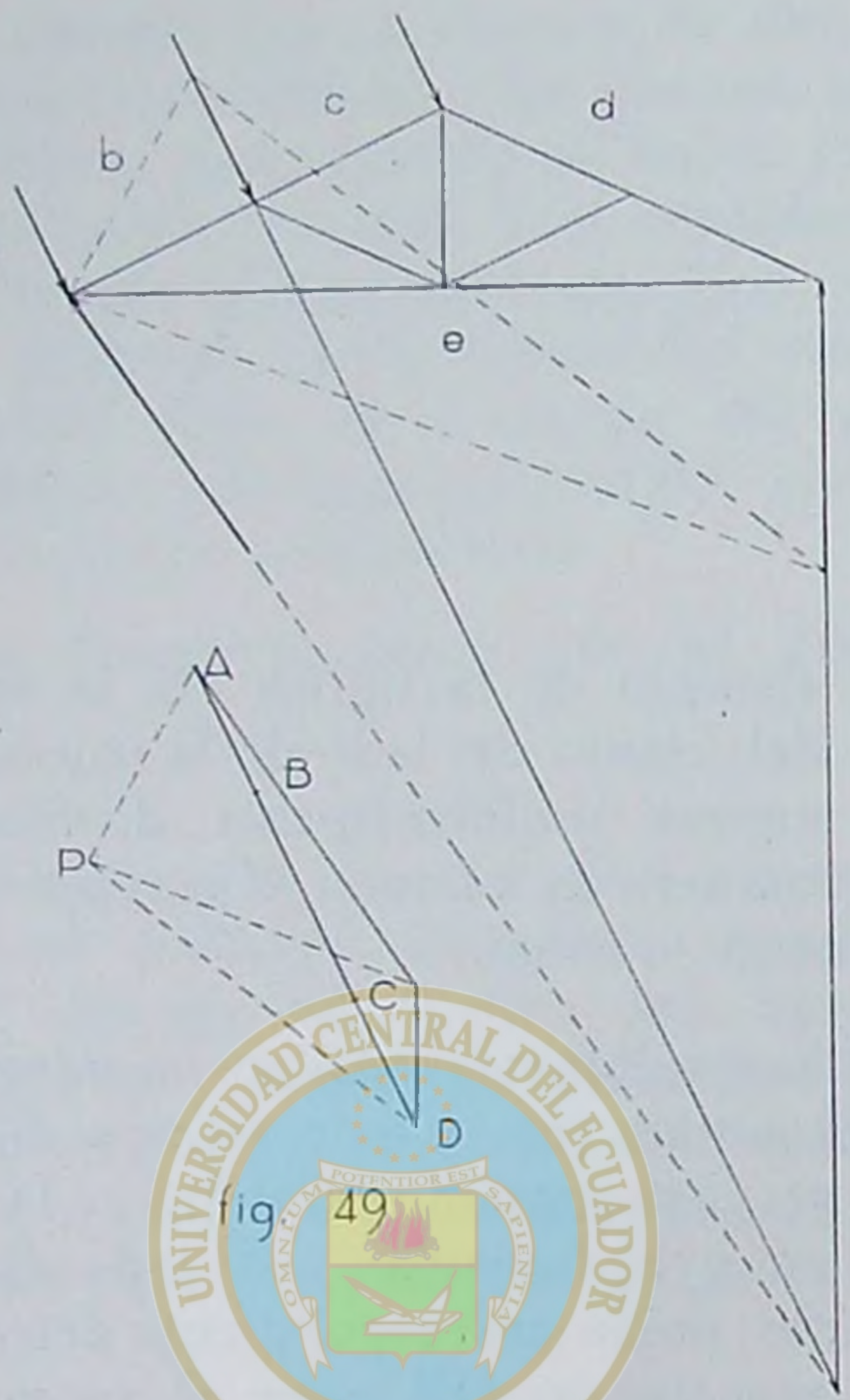

fig 49

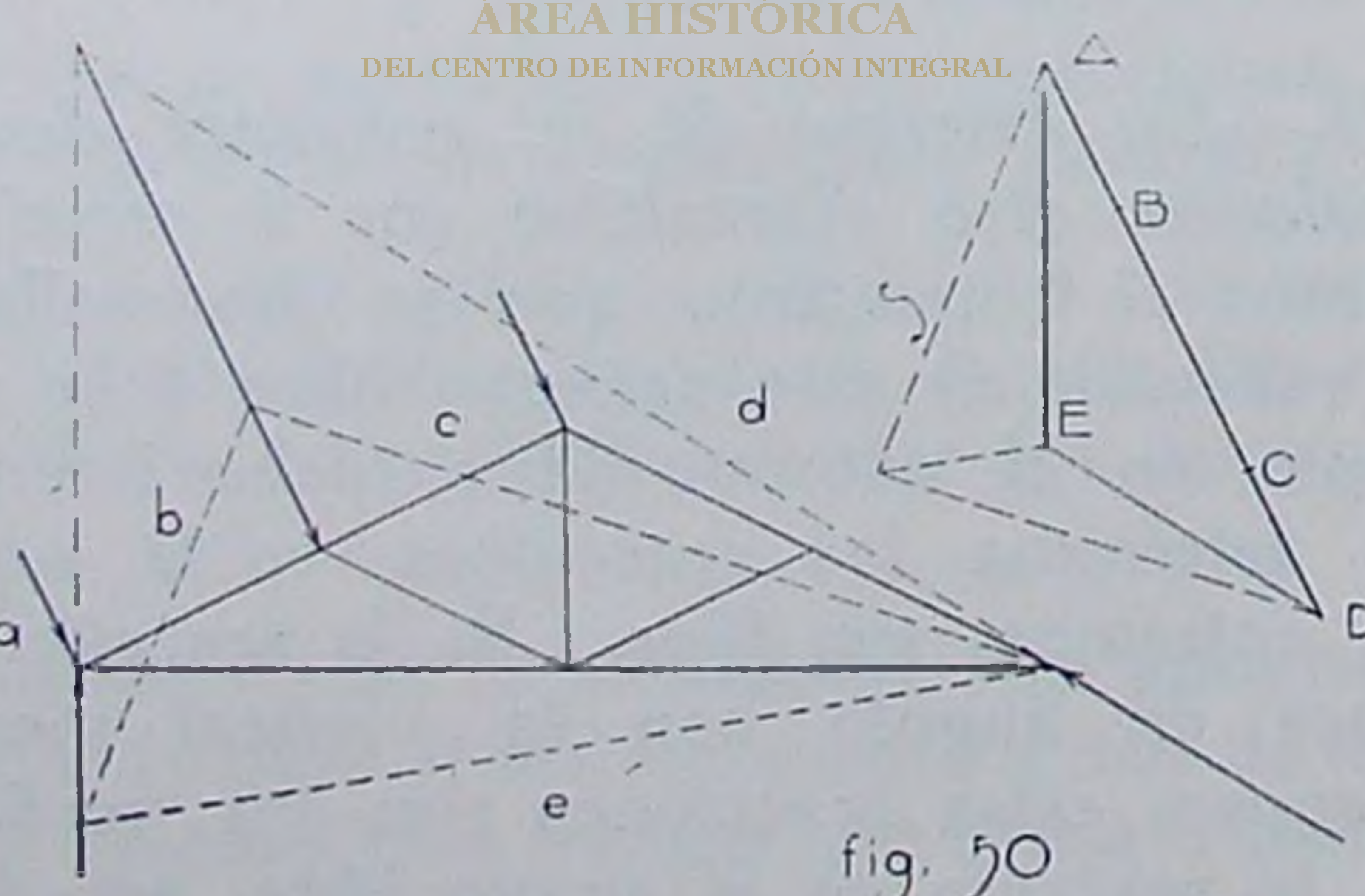

fig. 50

Se conoce la resultante, que es igual a la suma de las tres fuerzas y actúa según *bc*, puesto que son simétricas: por el extremo del dinámico, por D, se levanta una vertical hasta que corte el radio polar correspondiente al lado de cierre del funicular, en E; por este punto se une con una línea al origen, a A. La magnitud para la reacción derecha es DE y para la de la izquierda es EA.

La línea de acción para el apoyo fijo se puede también determinar teniendo en cuenta que, tres fuerzas no paralelas en equilibrio deben tener un mismo punto de intersección; después de lo cual las magnitudes se encuentran por medio del triángulo de fuerzas. Este trazado está indicado en el diagrama por líneas de puntos.

Para el otro caso, en que el apoyo izquierdo es libre, se hace la construcción de la fig. 50. Las magnitudes de las reacciones son: DE para el apoyo derecho, y EA para el izquierdo.

Se observará que las componentes verticales de las reacciones son las mismas en todos tres casos; entonces el resultado de uno cualquiera de estos casos puede servir para resolver los otros dos.

NOTA.—*Siempre debe cumplirse la condición de que las reacciones en los apoyos están en equilibrio con las fuerzas dadas; por consiguiente, debe corresponderles un dinámico y un funicular cerrados.*

Empuje del viento

54.—El empuje del viento es de mucha importancia en el cálculo de tejados, chimineas, etc. En lo relativo a la dirección del viento se hacen muchas hipótesis; pero nosotros para simplificar el problema haremos que la dirección sea horizontal.

En la práctica se toma como empuje máximo de 150 kilos a 250 k/m^2, ejercida en una superficie normal a su dirección. Para superficies inclinadas, se tiene en cuenta la componente normal del empuje, pues la que va dirigida tangencialmente a la superficie inclinada no ejerce acción, ocurriendo como si el viento resbalase, sin rozamiento.

Designemos por Θ el ángulo que hace la cubierta con la horizontal y L la longitud de la superficie atacada; su proyección vertical o sea normal al viento es, fig. 51:

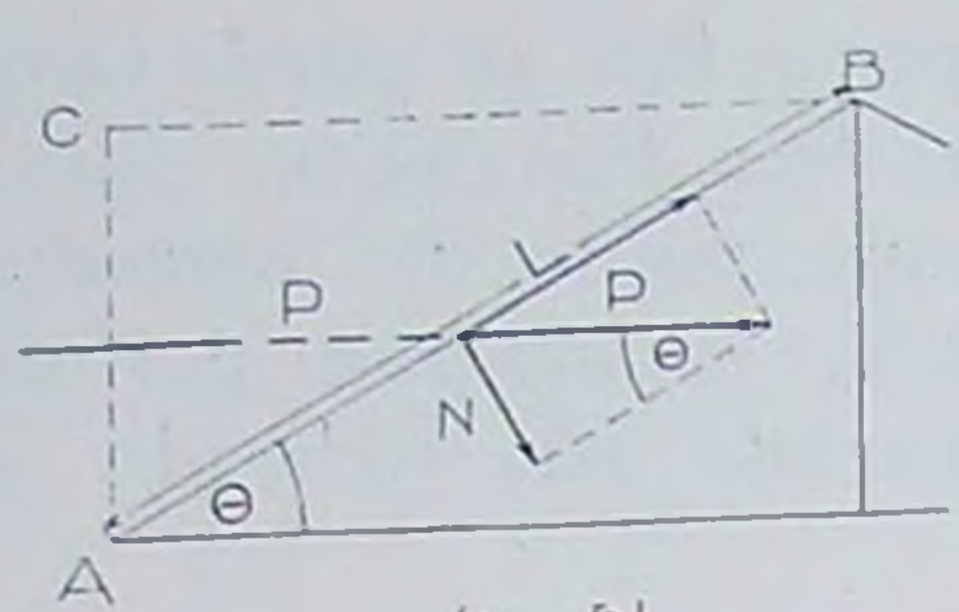

fig. 51

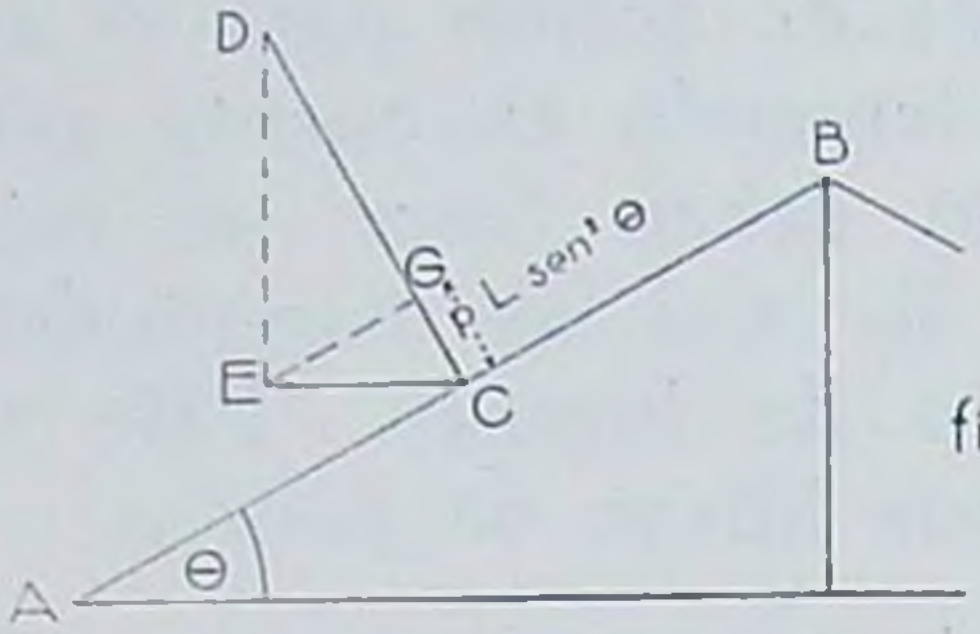

fig. 52

$$AC = L \, . \, \text{sen}\, \Theta$$

y el empuje del viento es:

$$P = p \, . \, L \, . \, \text{sen}\, \Theta$$

en la que *p* es la presión del viento por unidad de superficie normal a su dirección.

La componente normal de P sobre el tejado será:

$$N = P \, . \, \text{sen}\, \Theta = p \, . \, L \, . \, \text{sen}^2 \Theta$$

Esta expresión puede construírse gráficamente, así: sobre una línea perpendicular a la superficie AB, fig. 51, se lleva el valor p . L igual al segmento CD y se proyecta sobre la dirección del viento, se obtiene el segmento, CE, que proyectado nuevamente sobre el primitivo CD, dá el CG, el cual como se ve inmediatamente, representa el valor $N = p \, . \, L \, . \, \text{sen}^2 \Theta$.

55.—*Casos especiales de reacciones de los apoyos.*—I.—*Marquesina fija en dos puntos de una pared vertical.* Sea la marquesina de la fig. 53, cuyos miembros son: SUV que es horizontal y UT inclinado; fijos en un muro por los puntos S y T. Sobre el miembro horizontal actúan las cargas *ab, bc, cd,* cuya resultante es R.

Esta resultante con las dos reacciones debe formar un sistema en equilibrio y por lo tanto ser concurrentes en algún punto de R.

Hay una infinidad de puntos de concurso sobre la línea de acción de R, lo que quiere decir que hay una infinidad de soluciones o sea que las reacciones X y Y pueden adoptar infinitas direcciones; el problema es indeterminado. Las ecuaciones de equilibrio estático son en inferior número que el de

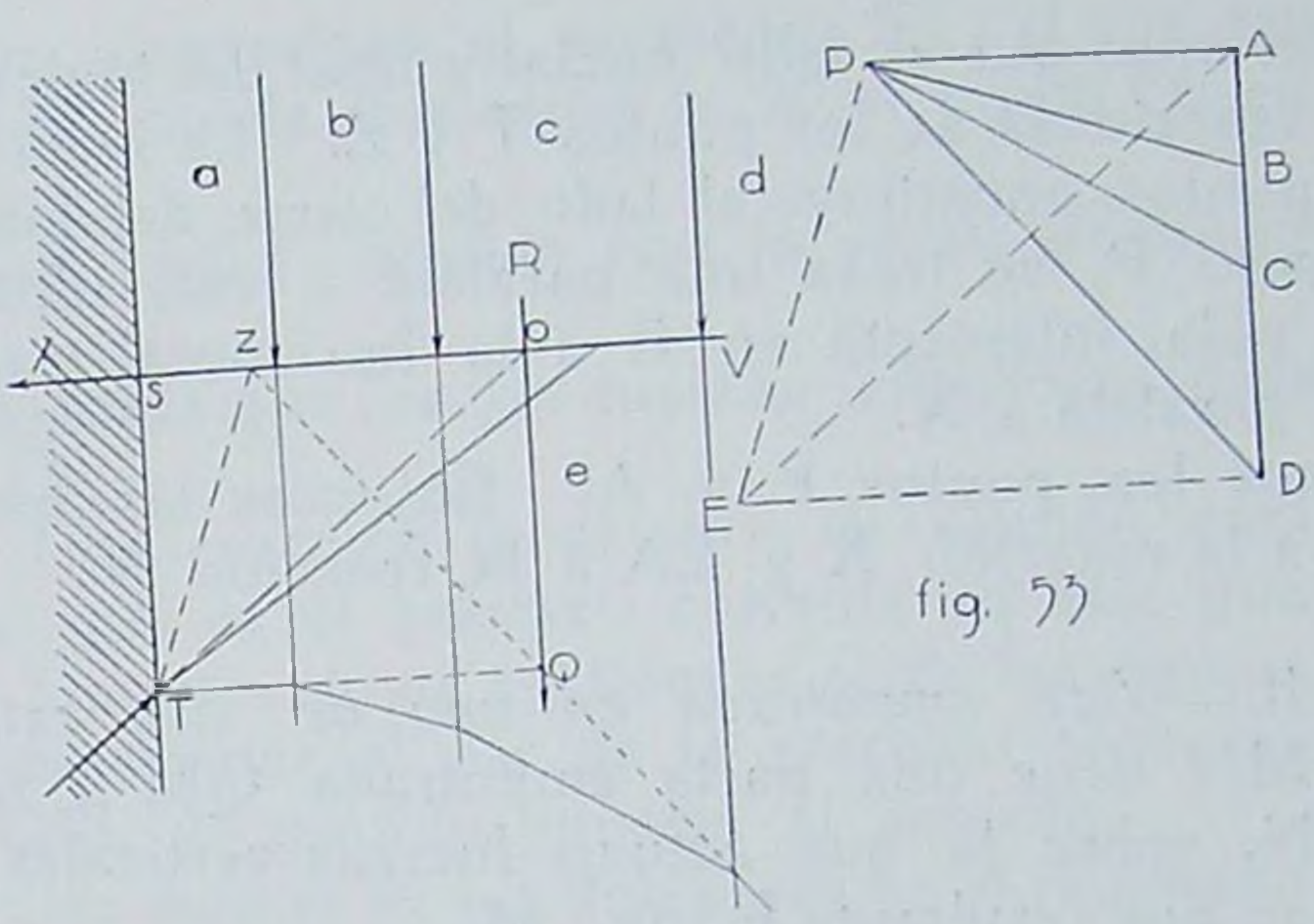

fig. 53

incógnitas y la Estática Gráfica no puede resolver. Para conseguir la solución, hagamos la suposición de que la armadura está fija en T, pero simplemente articulada en S, lo que conduce a adoptar una reacción X normal al muro; es decir, horizontal.

Esto sentado, explicaremos los dos procedimientos que permiten determinar las reacciones de los apoyos.

Primer método.—Consideremos las tres fuerzas en equilibrio: $R + X + Y = O$, de las que conocemos R en posición magnitud y sentido; X su línea de acción, y, de Y sólo un punto en el muro, el B.

Como las tres fuerzas están en equilibrio, tienen que ser concurrentes; en efecto R y X concurren en O, sobre la barra horizontal SV. Ahora, Y debe también concurrir al punto O; luego su línea de accion será TO.

Entonces el problema se reduce a descomponer una fuerza R, que se conoce en magnitud y sentido, en otras dos cuyas líneas de acción son dadas. Para dar la dirección propia de las reacciones cambiaremos de sentido.

De las extremidades del dinámico, A y D se trazan paralelas a las dos líneas de acción. La intersección E de estas paralelas dan las intensidades de X y Y.

Segundo método.—En la misma fig. 53, construyamos el dinámico ABCD, con un polo arbitrario P; luego se traza el funicular correspondiente, trazando el primer lado por el punto T, que es el único que conocemos de Y. La intersección Q del primero y último lado nos dá la posición de la resultante R.

Observemos que el lado inicial y final del funicular, cortan a las reacciones de los puntos T y Z. La recta que une estos dos puntos, constituye el lado del cierre del funicular.

Del polo P, se traza una paralela a esta última línea. Este radio polar intercepta en E a la horizontal trazada por D, o sea, paralela a X.

Unamos los puntos E y A. Entonces las magnitudes DE igual a la reacción X y EA a la reacción Y.

56.—II.—*Viga empotrada en uno de sus extremos.*— Una viga MN tiene una parte empotrada QM y una parte exterior QN, sobre la que actúan fuerzas verticales *ab, bc y cd* que tienen por resultante R, fig. 54.

Este sistema de fuerzas está en equilibrio con el sistema de reacciones, que actúan sobre la parte empotrada MQ.

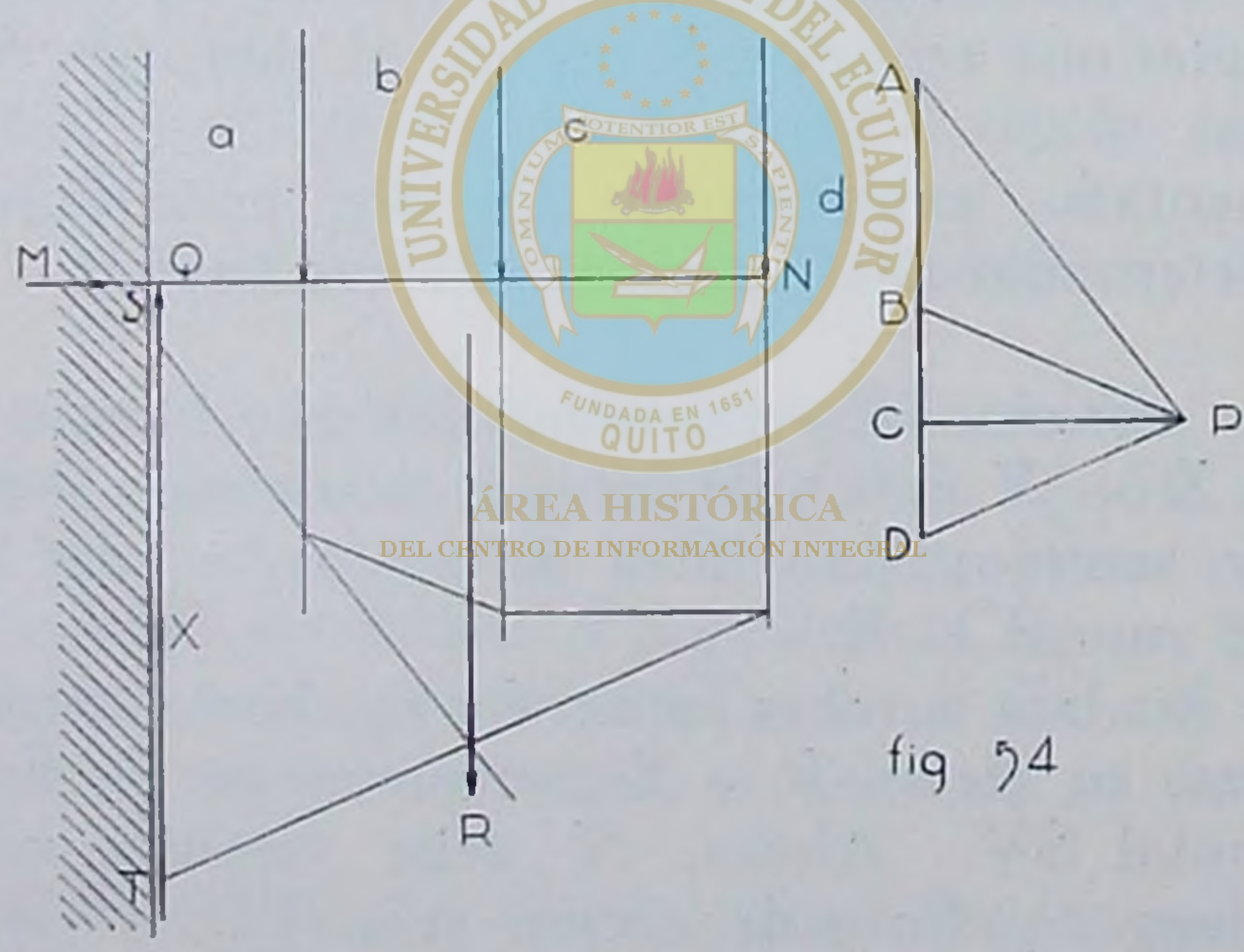

fig 54

Estas reacciones tienen una resultante X que trasladamos a Q por medio del par de traslación.

Así mismo se puede trasladar R al punto Q por medio de un par.

Los dos sistemas, de fuerzas y de reacciones estando en equilibrio, los dos pares de traslación de las dos resultantes, en Q, deben estarlo también; por consiguiente determinar el momento del uno es encontrar el momento del otro.

Después de trazado el dinámico y el funicular de polo arbitrario P, se encuentra en la intersección de los lados extremos la línea de acción de la resultante; estos mismos lados se prolongan hasta encontrar a la línea trazada por Q y paralela a R, que determinan el segmento ST, el que representa el momento del par de traslación de R al punto Q, es decir

$$\mathcal{M}.\ R = ST \quad \text{medido con la escala de momentos.}$$

De manera que las tres fuerzas exteriores, desarrollan en el punto Q:

1º. Una reacción igual pero de sentido contrario a la resultante; que es el esfuerzo cortante en este punto.

2º. Un par, cuyo sentido es el de las agujas de un reloj, equilibrado por el par de la reacción sobre la parte empotrada QM, de sentido opuesto al anterior.

El valor común de los dos pares es el momento de flexión en el punto Q.

57.—III.— *Viga volada en sus dos extremos.*—Sea la viga de la fig. 55, cuyos apoyos son XY; en la que actúan cinco fuerzas como en el diagrama: la primera y las dos últimas están sobre los dos extremos volados.

Tracemos las líneas de acción verticales de las reacciones X y Y; luego el dinámico y el funicular correspondiente. Los radios A y F que corresponden en el funicular a los lados *a* y *f*, cortan las líneas de acción de X y Y en los puntos *m* y *n*. La recta que pasa por estos dos puntos constituye el lado del cierre del funicular.

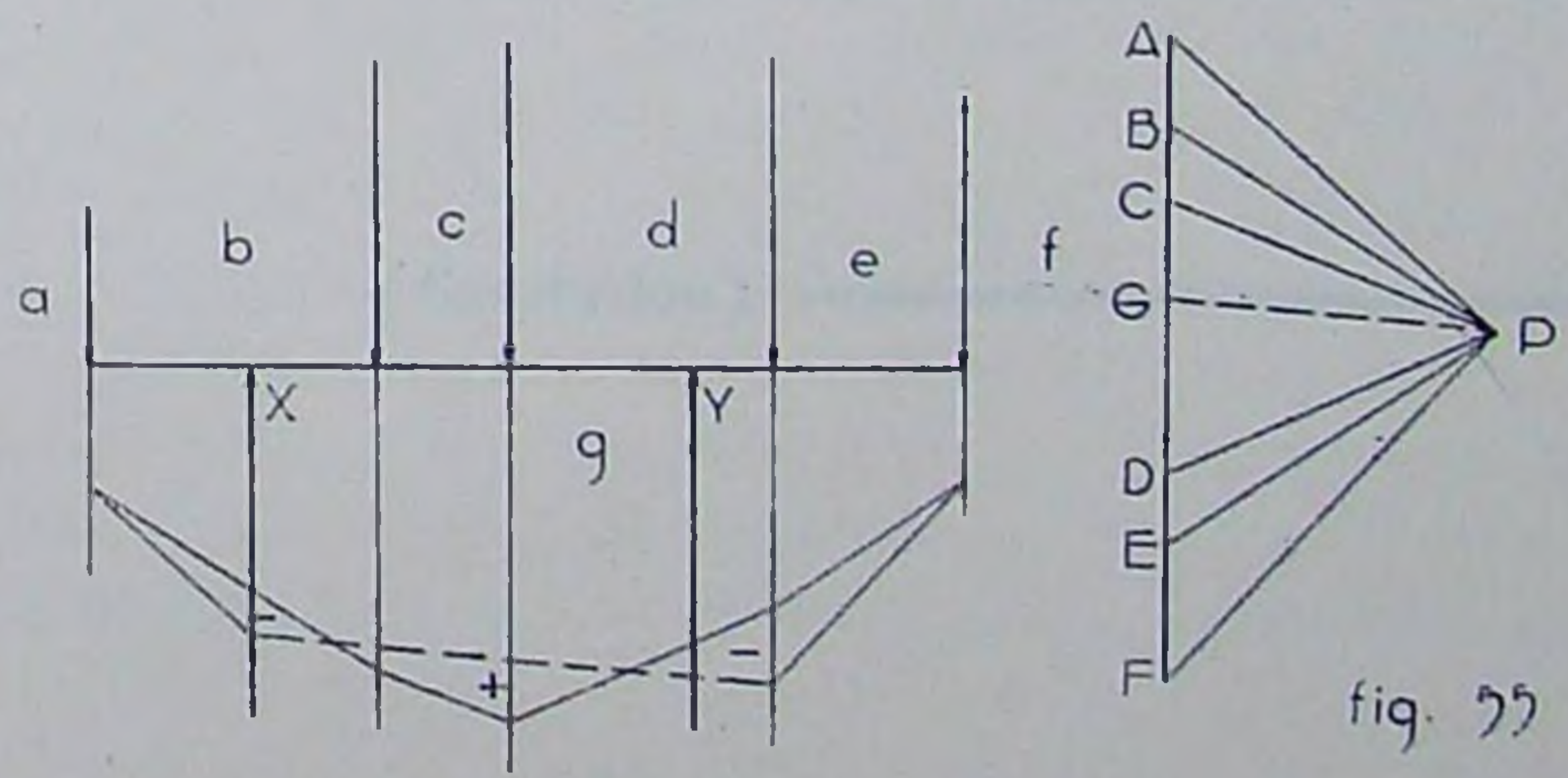

fig. 55

Por el polo P se traza la paralela a este lado de cierre, que corta al dinámico en el punto G y éste determina la magnitud de las reacciones: FG es la magnitud para el apoyo Y y GA para el X.

(Continuará)