Por el Profesor de Mecánica Racional en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, Sr. Dn. F. J. Cruz M.

La Teoría Vectorial

TEORIA VECTORIAL

La teoría de vectores ha tomado en estos últimos tiempos una importancia correspondiente a las ventajosas aplicaciones de que es susceptible.

Tratada como ciencia especial, va desarrollándose a medida que se extiende el análisis puro de sus propiedades.

La Mecánica, la Grafoestática como parte de ésta, la Electricidad en sus problemas de corrientes alternas, la Trigonometría en la deducción de sus principios emplean los vectores y los conceptos vectoriales.

Para que nuestros estudiantes puedan adquirir una visión de conjunto, he querido condensar en este estudio, la síntesis práctica de la Teoría Vectorial.

TEORIA VECTORIAL

La teoría vectorial reposa en la idea del movimiento: el movimiento de un punto que engendra una línea.

Fig. 1

Supongamos un punto A que se mueve y sea B su situación posterior en el espacio: para venir de A a B, considerando las diferentes posiciones sucesivas, e inmediatamente relacionadas con la anterior, estas diferentes posiciones habrán engendrado la línea AB.

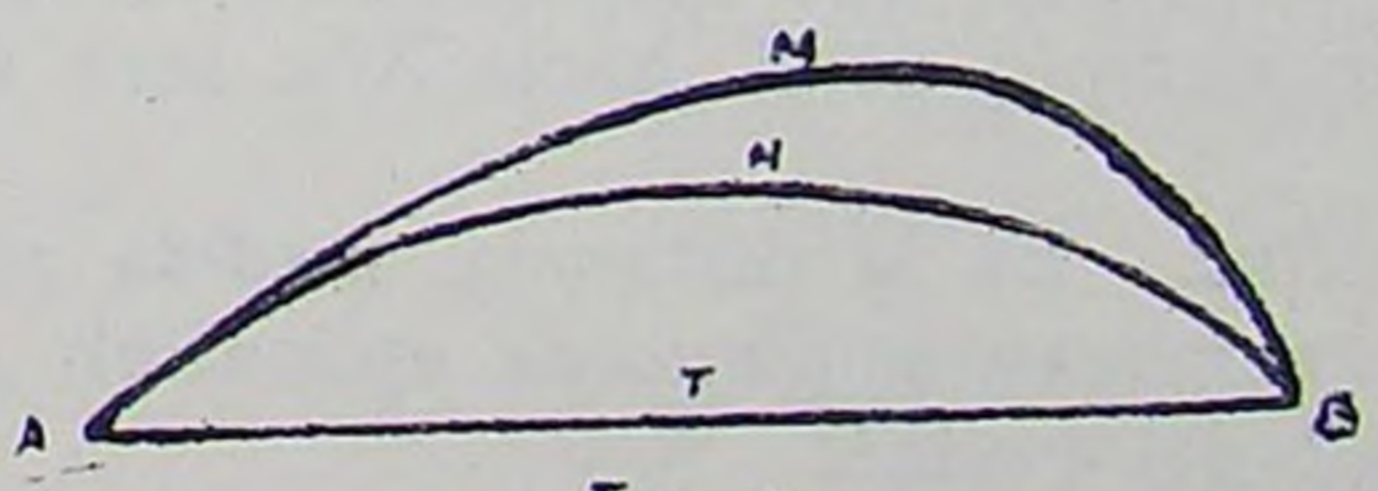


Fig. 2

Para ir desde A hasta B el punto puede engendrar las líneas AMB, ANB y $\overline{ATB}$, siendo esta última una línea recta, o sea, el camino más corto entre A y B. Es este camino más corto o sea la línea recta AB la que recorre un punto móvil, para engendrar un vector $\overline{AB}$. Las líneas AMB, ANB y la recta AB, son las trayectorias del punto.

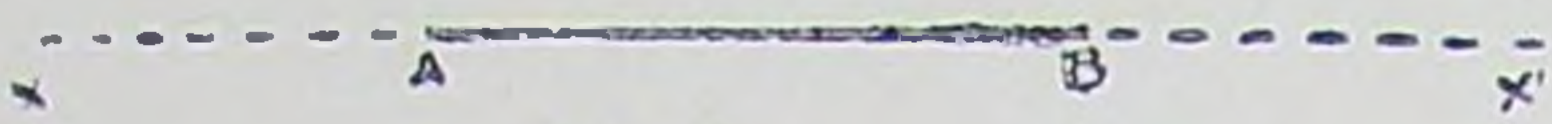


Fig. 3

Si se prolonga de lado y lado la recta AB, se obtiene la recta XX' de longitud indefinida que constituye la *dirección del vector.* Sobre la recta XX', un punto móvil puede engendrar un vector yendo de X hacia X' (vector $\overline{AB}$) o también de X' hacia X (vector $\overline{BA}$); hay, por tanto, dos *sentidos* sobre una misma dirección: al uno lo llamamos positivo, el contrario será negativo.

Considerando un mismo eje XX' o sea una dirección o soporte de vectores, y tomando en cuenta que el móvil va de A a B, es decir, recorre una distancia, la distancia o *longitud* recorrida puede diferenciar un vector de otro, por tanto, su comparación se hará mediante una *unidad* de *longitud.*

Y así vemos que para definir perfectamente un vector, se necesita tomar en cuenta todos aquellos elementos que lo personifican, es decir, que lo diferencian de los demás.

Un vector está, pues, definido por los cuatro elementos:

1°. *Dirección.* El eje XX' que sirve de soporte.

2°. *Punto de aplicación.* El punto A de donde parte el móvil para engendrar el vector $\overline{AB}$.

3°. *Sentido.* El que lleve para ir de A hacia B: será positivo si es el mismo que hemos convenido, así, en el eje respectivo (por ejemplo de X hacia X'); será negativo si es el contrario.

4°. *Magnitud.* Es la distancia, medida con la longitud unitaria, entre el origen o punto de aplicación A, y el punto B o extremidad del vector.

Para indicar que se trata de un vector, se emplea la anotación $\overline{AB}$: A es el origen, B la extremidad y la barra — completa la idea convencional del vector $\overline{AB}$.

Representación de un vector

Un vector $\overline{AB}$, se lo representa gráficamente por un trozo AB de línea recta, en el cual se encuentran los elementos necesarios para definirlo: A es el origen o punto de aplica-

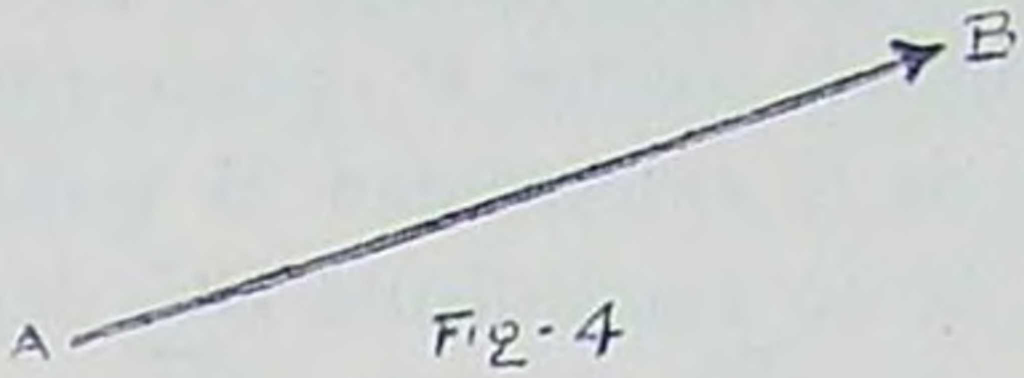


Fig. 4

ción; B la extremidad, indicada por la flecha; AB de longitud igual al número de unidades de su magnitud; dirección, la de la recta AB; sentido, el indicado por la flecha, de A (origen) hacia B (extremidad).

Suma de vectores

Fig. 5

Los vectores comparados entre ellos deben ser:

1º. Vectores idénticos: aquellos que tienen un mismo origen y una misma extremidad; tales como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

2º. Equipolentes: los que tienen direcciones paralelas, iguales sentidos y magnitudes; tales como $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.

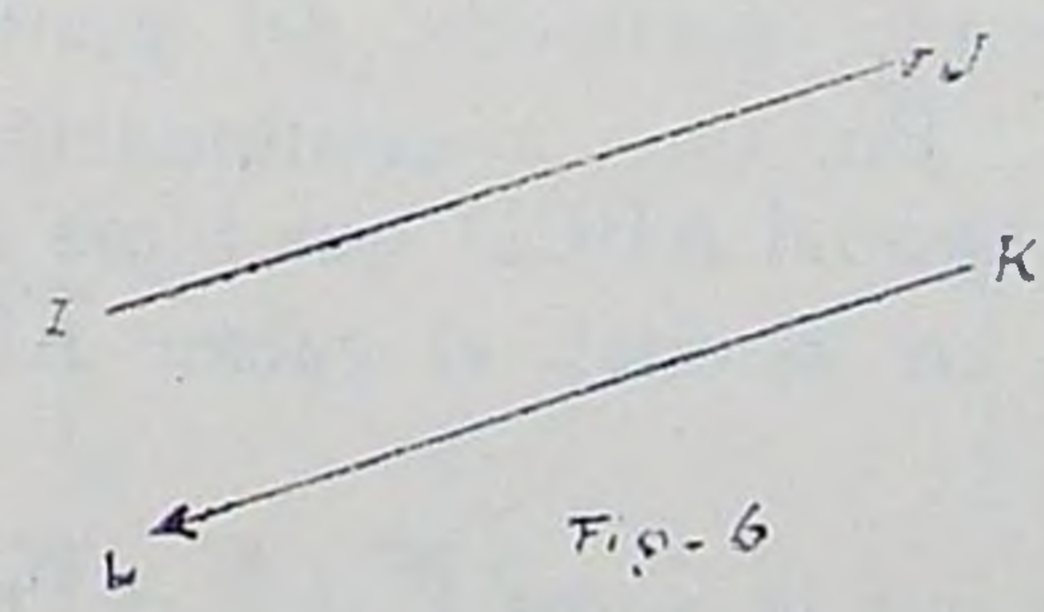


Fig. 6

3º. Par de vectores: se llama al grupo de vectores $\overline{IJ}$ y $\overline{KL}$ cuyas direcciones son paralelas, sus magnitudes iguales y de sentidos contrarios.

Consideremos varios vectores $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ y $\overline{Pn}$ cuyos orígenes o

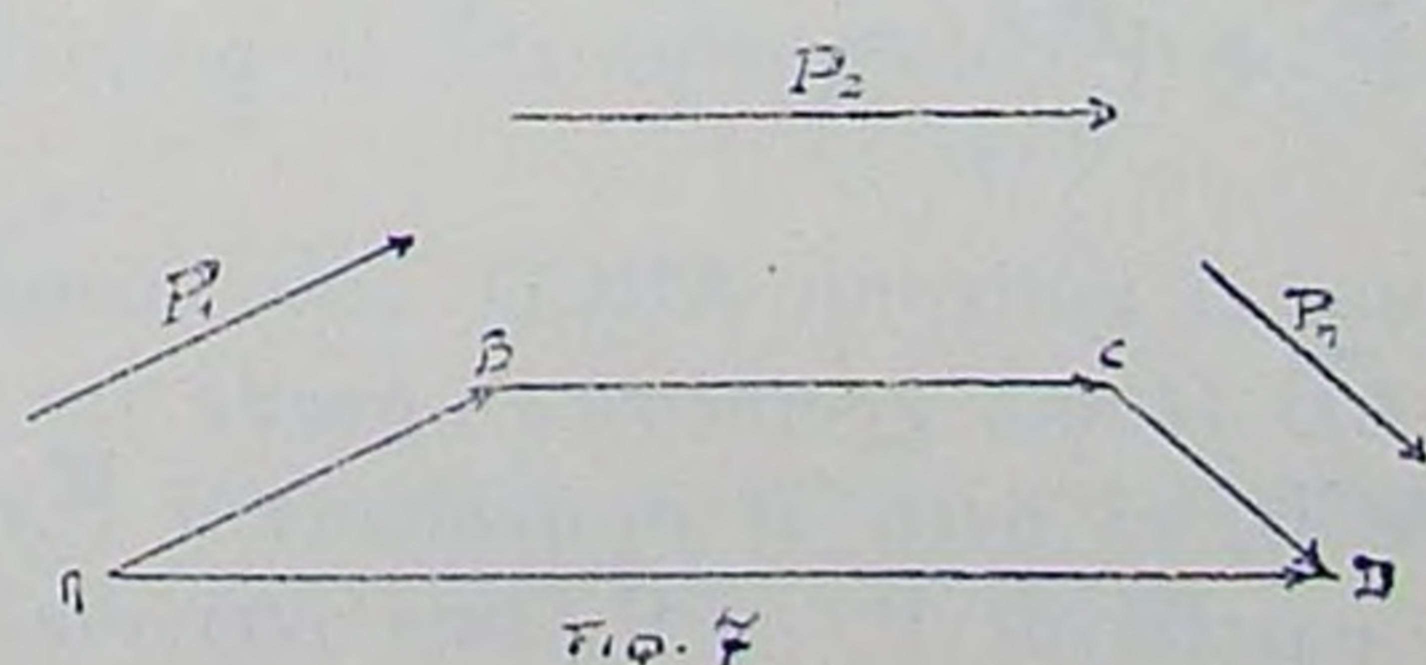


Fig. 7

puntos de aplicación en el espacio son cualesquiera; si escojemos uno especial A, transportemos el vector P_1 por medio de un equipolente $\overline{AB}$; partiendo de la extremidad B transportemos el vector $\overline{P_2}$, por medio de un equipolente $\underline{BC}$; desde la extremidad C, transportemos en $\overline{CD}$ el vector $\overline{Pn}$: por convención, un vector $\overline{AD}$ cuyo origen coincide con el origen A del primer vector y cuya extremidad coincide con la extremidad D del último vector, se llama *suma geométrica de los vectores considerados.*

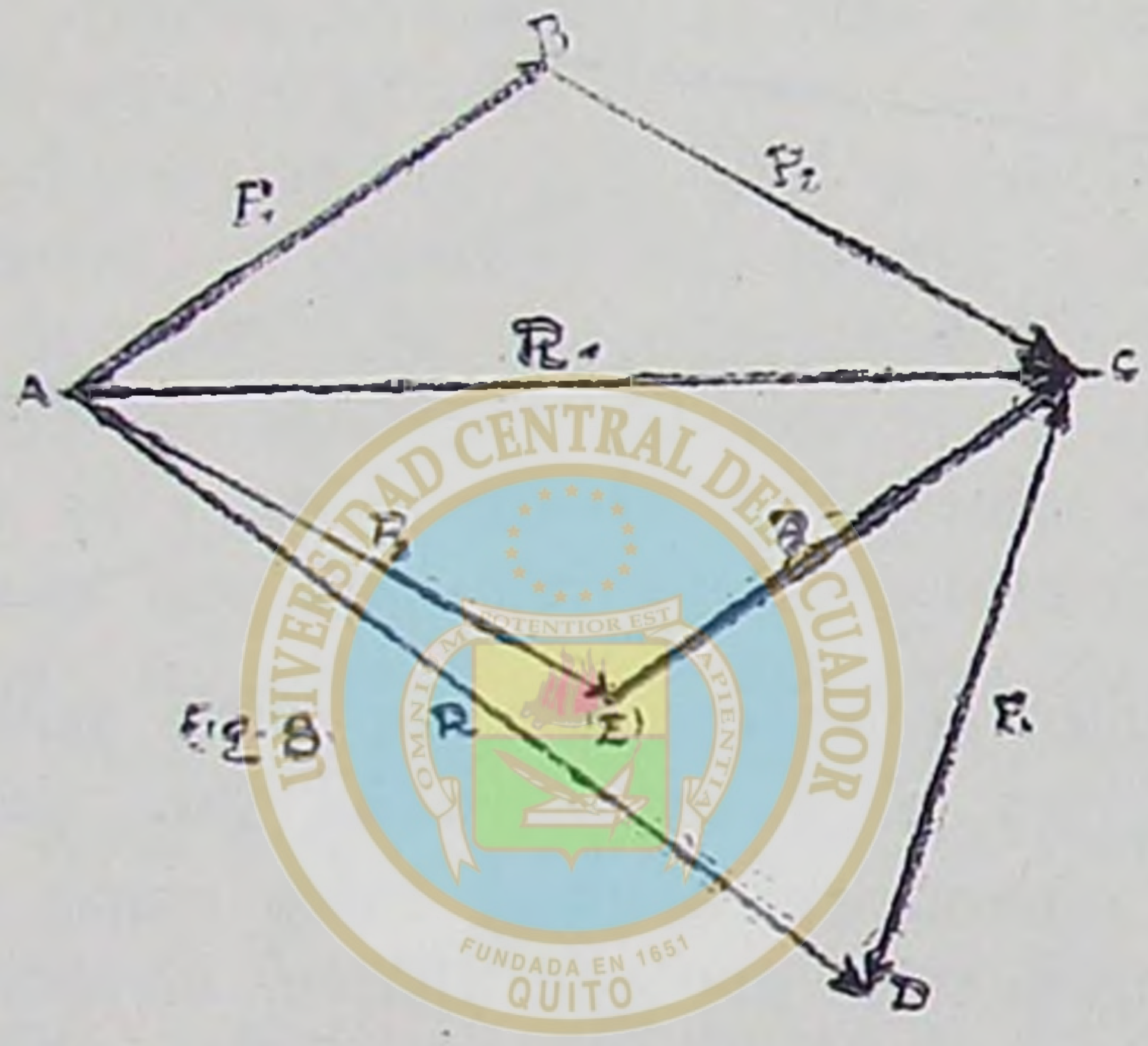


Fig. 8

Para obtener la suma geométrica de los vectores $\overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{Pn} = \overline{R}$ hemos colocado, partiendo del punto A, vectores equipolentes $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$......$\overline{Pn}$, uno a continuación del otro, formando el contorno poligonal ABCD que toma el nombre de polígono de vectores, en el cual, el vector $\overline{AD}$ representa la suma geométrica.

En la fig. 8, podemos observar que la suma $\overline{P_1}+\overline{P_2}+\overline{Pn}$, podíamos obtenerla construyendo el polígono AECD que equivale a $\overline{P_2} + \overline{P_1} + \overline{Pn}$, lo que prueba la propiedad *conmutativa.*

Así mismo, el polígono ABCD cuya construcción nos da el vector $\overline{AD}$ (suma geométrica), puede ser sustituído por el polígono ACD, es decir el equivalente a $\overline{R_1} + \overline{Pn}$, en el cual la suma parcial de $\overline{P_1}$ y $\overline{P_2}$ está reemplazada por $\overline{R_1}$; de lo cual se deduce:

1º. La propiedad asociativa.

2º. Un vector $\overline{AD}$, es suma geométrica de cualquier número de vectores cuyo polígono se encuentra cerrado por $\overline{AD}$.

Casos particulares

DOS VECTORES

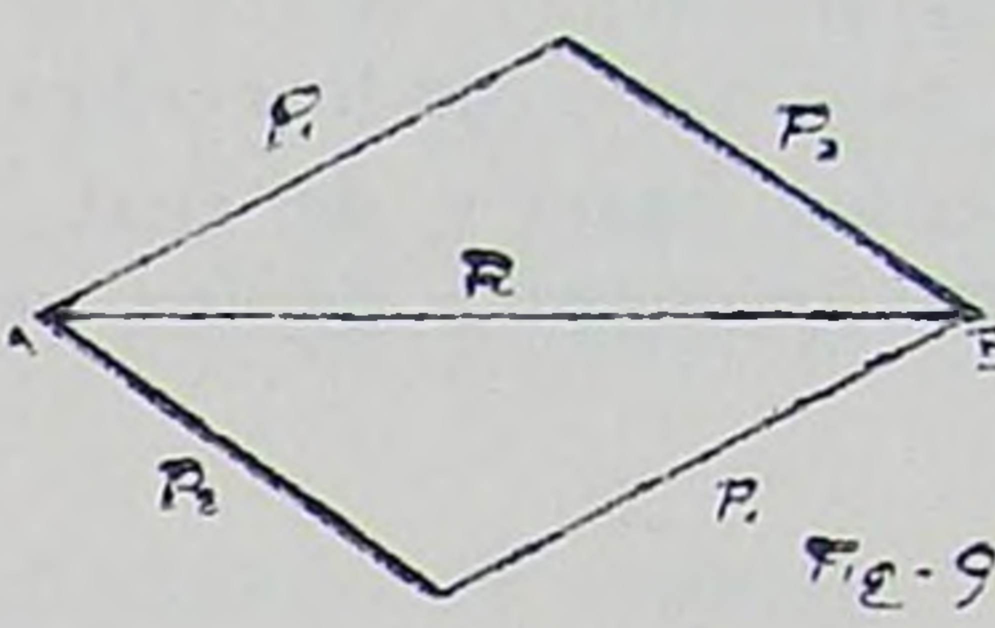


Fig. 9

Los dos vectores $\overline{P_1}$ y $\overline{P_2}$ forman en el punto A (fig. 9), la suma geométrica $\overline{P_1} + \overline{P_2} = \overline{R}$ siendo $\overline{R}$ el vector $\overline{AB}$; de la misma manera se obtendría construyendo $\overline{P_2} + \overline{P_1} = \overline{R}$. La construcción del conjunto nos indica un paralelogramo, cuyas bases son P_1 y P_2 y del cual la diagonal que parte de A, es la suma geométrica $\overline{R}$.

TRES VECTORES

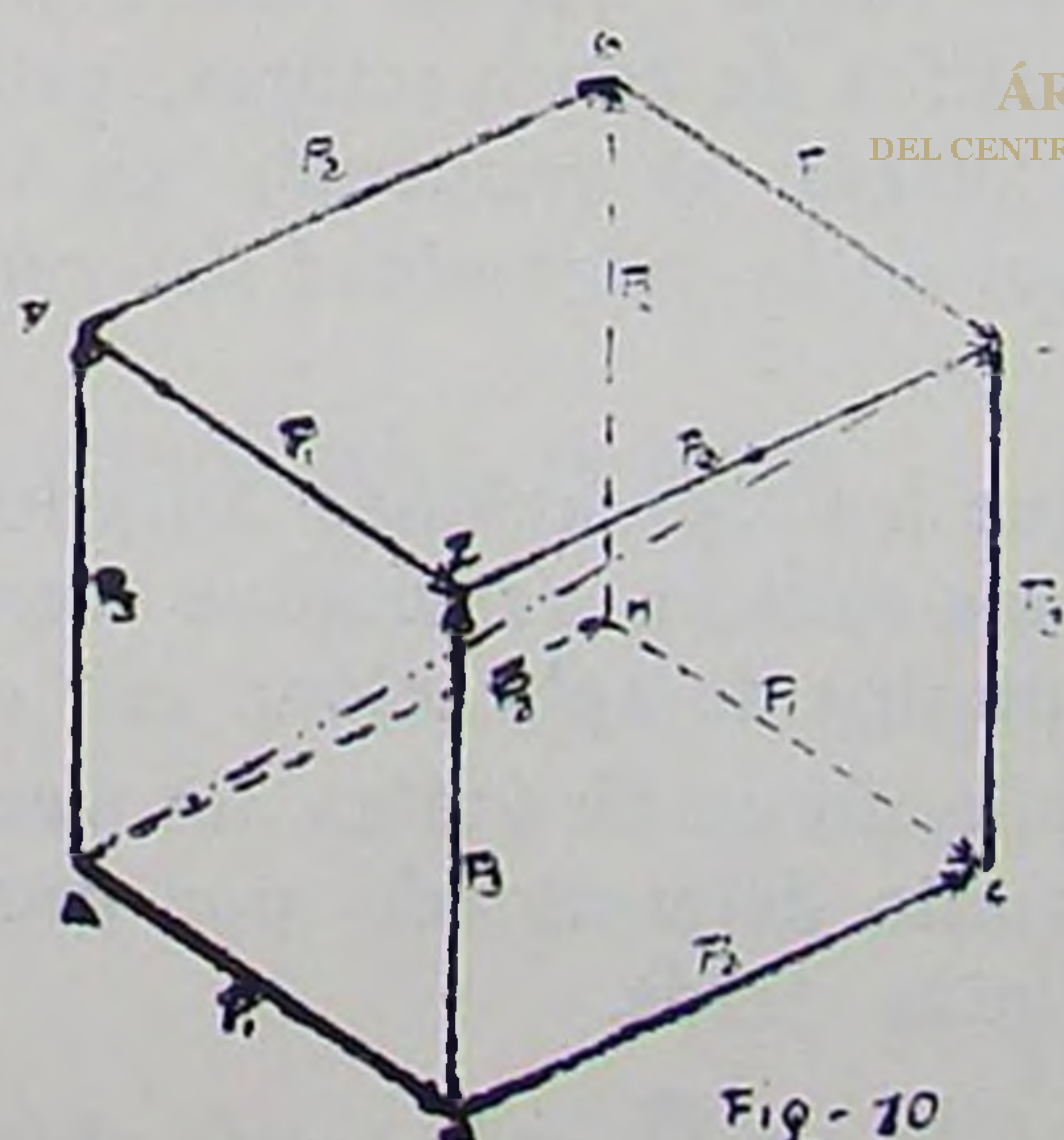


Fig. 10

Los vectores P_1, P_2, P_3 transportados al punto A, no se encuentran en un mismo plano, pero, dos a dos, definen tres planos. En el punto A coloquemos el vector $\overline{P_1}$ en $\overline{AB}$ (fig. 10), a continuación en $\overline{BC}$ el vector $\overline{P_2}$ y por último en $\overline{CD}$ el vector $\overline{P_3}$; el contorno poligonal ABCD define en $\overline{AD}$ un vector $\overline{AD} = \overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{P_3}$.

Si en lugar del arreglo anterior, efectuamos la construcción mediante las diferentes combinaciones:

$$\overline{P}_1 + \overline{P}_3 + \overline{P}_2$$
$$\overline{P}_2 + \overline{P}_1 + \overline{P}_3$$
$$\overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \overline{P}_1$$
$$\overline{P}_3 + \overline{P}_1 + \overline{P}_2$$
$$\overline{P}_3 + \overline{P}_2 + \overline{P}_1$$

Todas ellas con idéntica suma geométrica (el vector $\overline{AD}$), esta construcción no es otra que un paralelepípedo formado sobre los tres vectores $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ y $\overline{P}_3$ como bases y del cual, la diagonal que parte de A, es la suma geométrica de los vectores.

Diferencia de vectores

La diferencia de dos vectores $\overline{P}_1$, $-\ \overline{P}_2 = \overline{R}$, es equivalente a $\overline{P}_1 = \overline{R} + \overline{P}_2$ y se deduce de la construcción de la fig. 11, en la cual la suma $\overline{P}_2 + \overline{R} = \overline{P}_1$, es decir que la diferencia geométrica de dos vectores, está representada por un vector R cuyo origen se encuentra en la extremidad del substraendo y el final en la extremidad del minuendo.

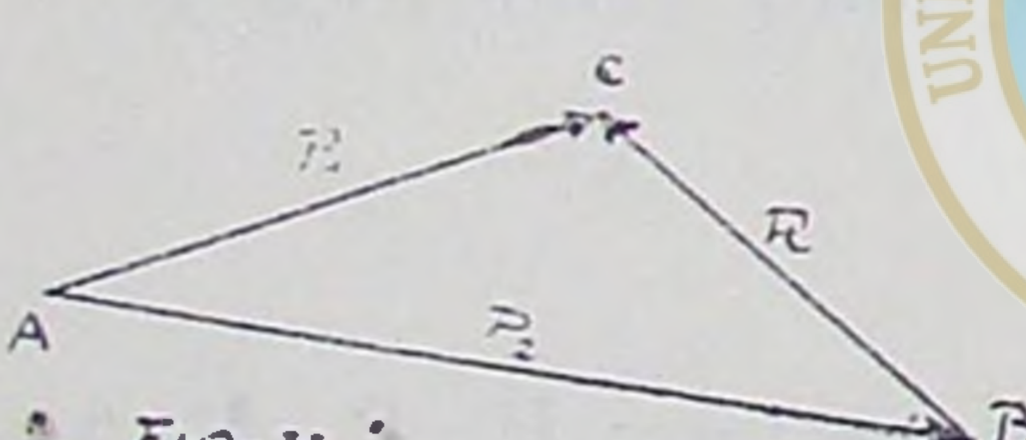


Fig-11

No hay que perder de vista que las operaciones anteriores son meras construcciones que nos indican resultados vectoriales con prescindencia de los puntos de aplicación; así, el vector $\overline{BC} = \overline{R}$ no se encuentra aplicado en B: indica un vector equipolente aplicable en algún punto determinado por problemas de aplicación que se verán más tarde.

La diferencia geométrica $\overline{P}_1 - \overline{P}_2 = \overline{R}$, se la puede obtener mediante la construcción del paralelogramo aplicado a la suma, como se desprende de la ecuación $\overline{P}_1 - \overline{P}_2 = \overline{P}_1 + (-\overline{P}_2) = \overline{R}$ y la fig. 12, en ABC nos da el vector $\overline{R}$

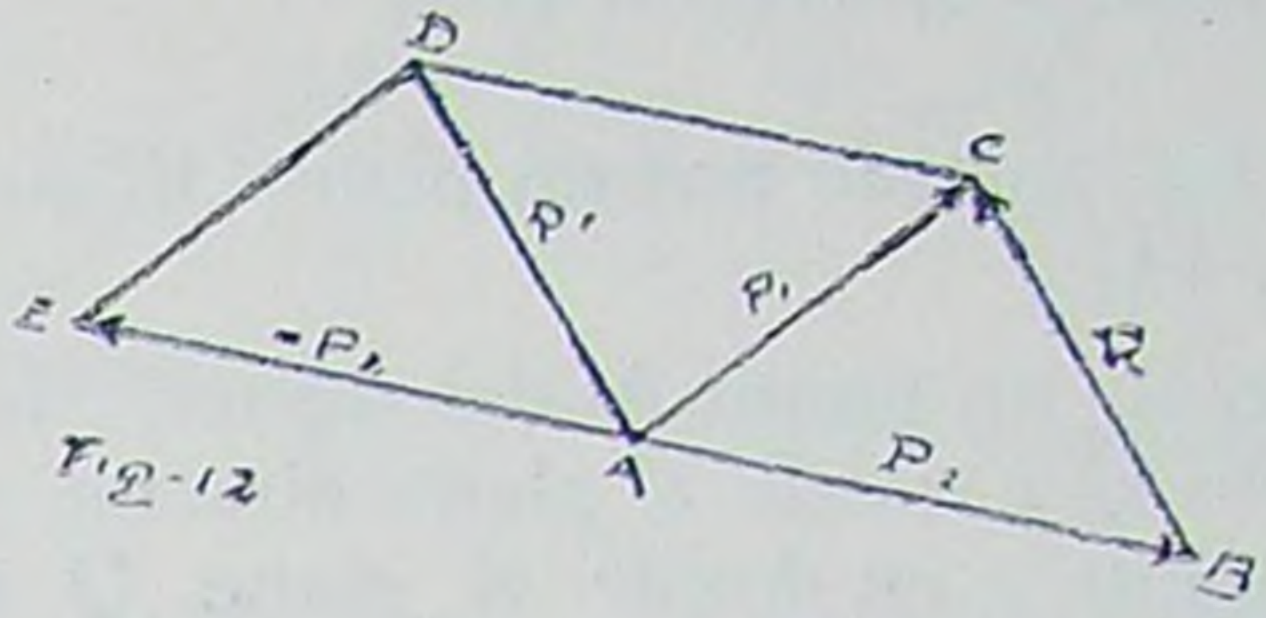


Fig-12

diferencia geométrica de $\overline{P_1} - \overline{P_2} = \overline{R}$, según la construcción de la fig. 11. Pero si en el punto A colocamos los dos vectores $\overline{P_1}$ y $(-\overline{P_2})$ y efectuamos la suma, mediante la construcción del paralelogramo AEDC, la diagonal AD nos da un vector $\overline{R'}$ equipolente a $\overline{R}$.

Multiplicación de vectores

Por definición se llama producto de dos vectores $(P_1) \times (P_2)$, la cantidad $P_1 \times P_2 \times \cos \alpha$ que es igual al producto de sus magnitudes absolutas por el coseno del ángulo que forman sus direcciones. De lo que se deduce que el signo depende del ángulo: positivo para un ángulo agudo y negativo para un obtuso.

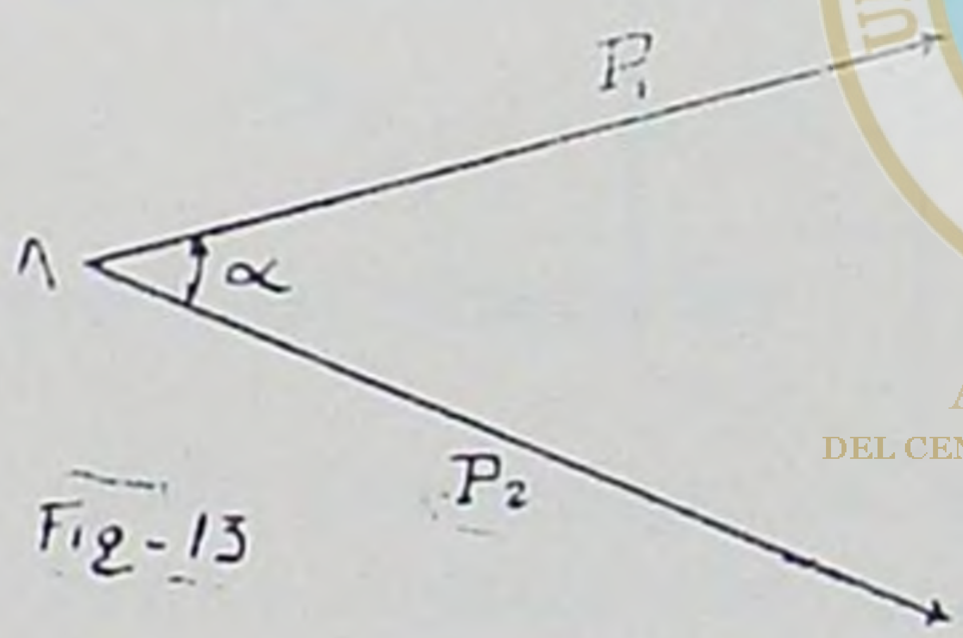


Fig-13

Representación analítica

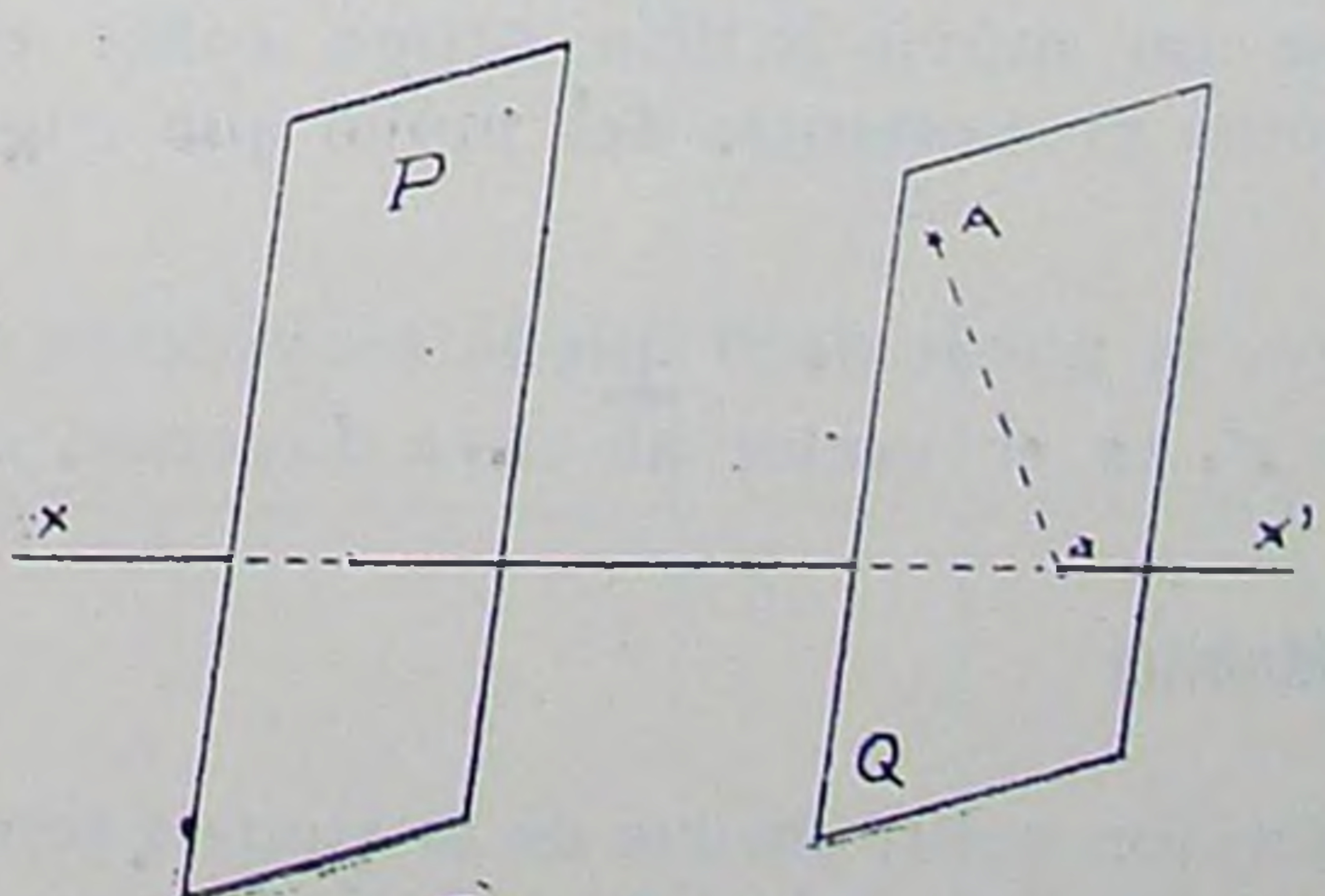


Fig-14

PROYECCIÓN SOBRE UN EJE:

Sea el eje $x\,x'$ cortado por un plano P que se llama plano director (fig. 14).

Para proyectar un punto A del espacio sobre el eje $x\,x'$, se traza un plano Q paralelo al plano director y que contenga el punto A; el punto a en donde el plano Q encuentra el eje, es, por convención, la proyección del punto A del espacio sobre el eje $x\,x'$.

De lo anterior se deduce que todos los puntos que forman el plano Q y por tanto todas las rectas del plano, se proyectan en a sobre el eje $x\,x'$.

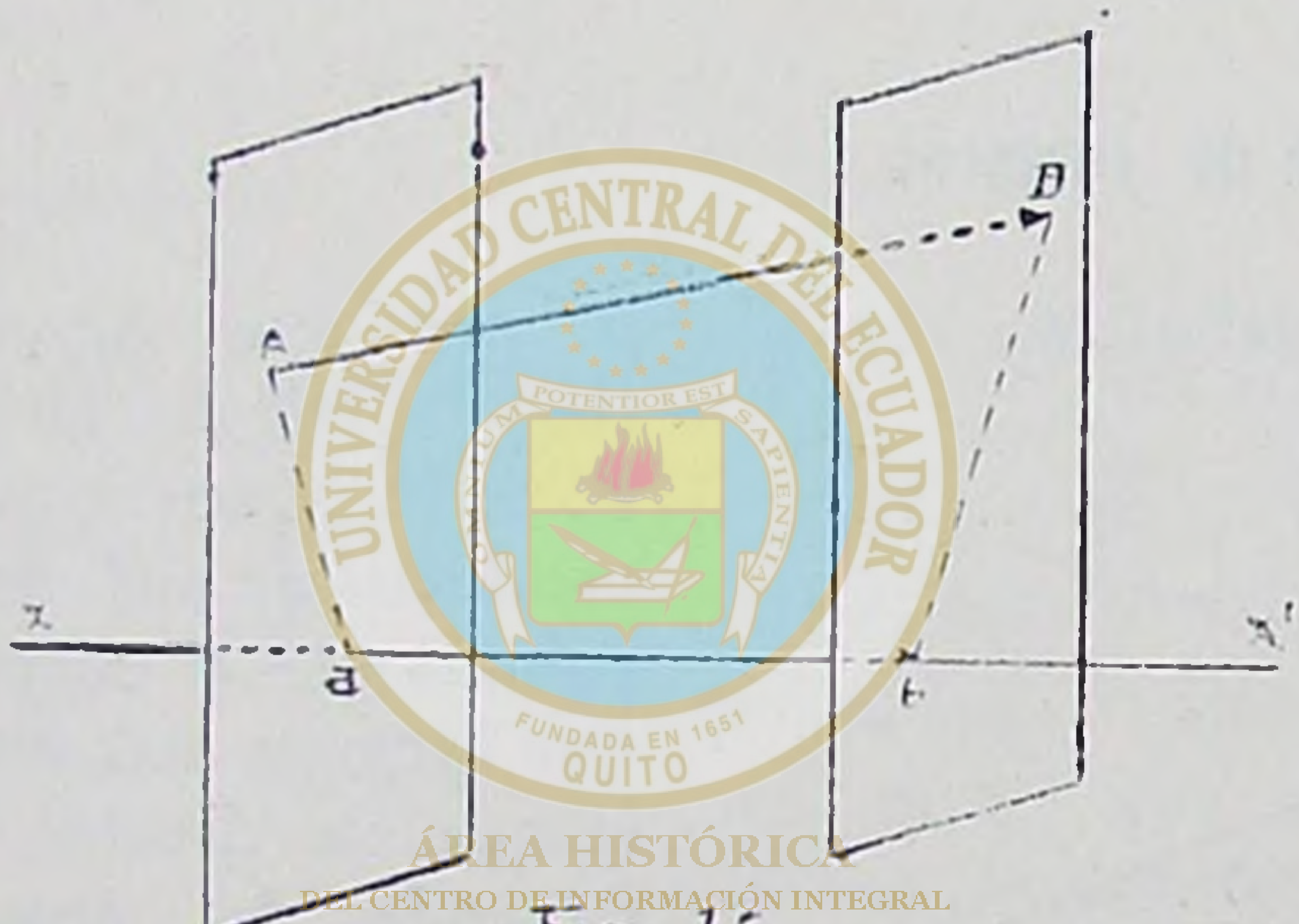


Fig- 15

La proyección del vector $\overline{AB}$ sobre el eje $x\,x'$, se obtiene mediante las proyecciones de los puntos A y B, origen y extremidad del vector. Esta proyección ab es un vector si consideramos que un móvil ficticio ocupa sobre el eje $x\,x'$ los diferentes puntos proyectantes del móvil que engendra el vector $\overline{AB}$.

Por tanto, se puede decir que la proyección del vector $\overline{AB}$ sobre el eje $x\,x'$, es el vector $\overline{ab}$ cuya dirección es la del eje.

Teorema de Möbius

La proyección sobre un eje de la suma geométrica de vectores, es igual a la suma algébrica de las proyecciones de los diferentes vectores.

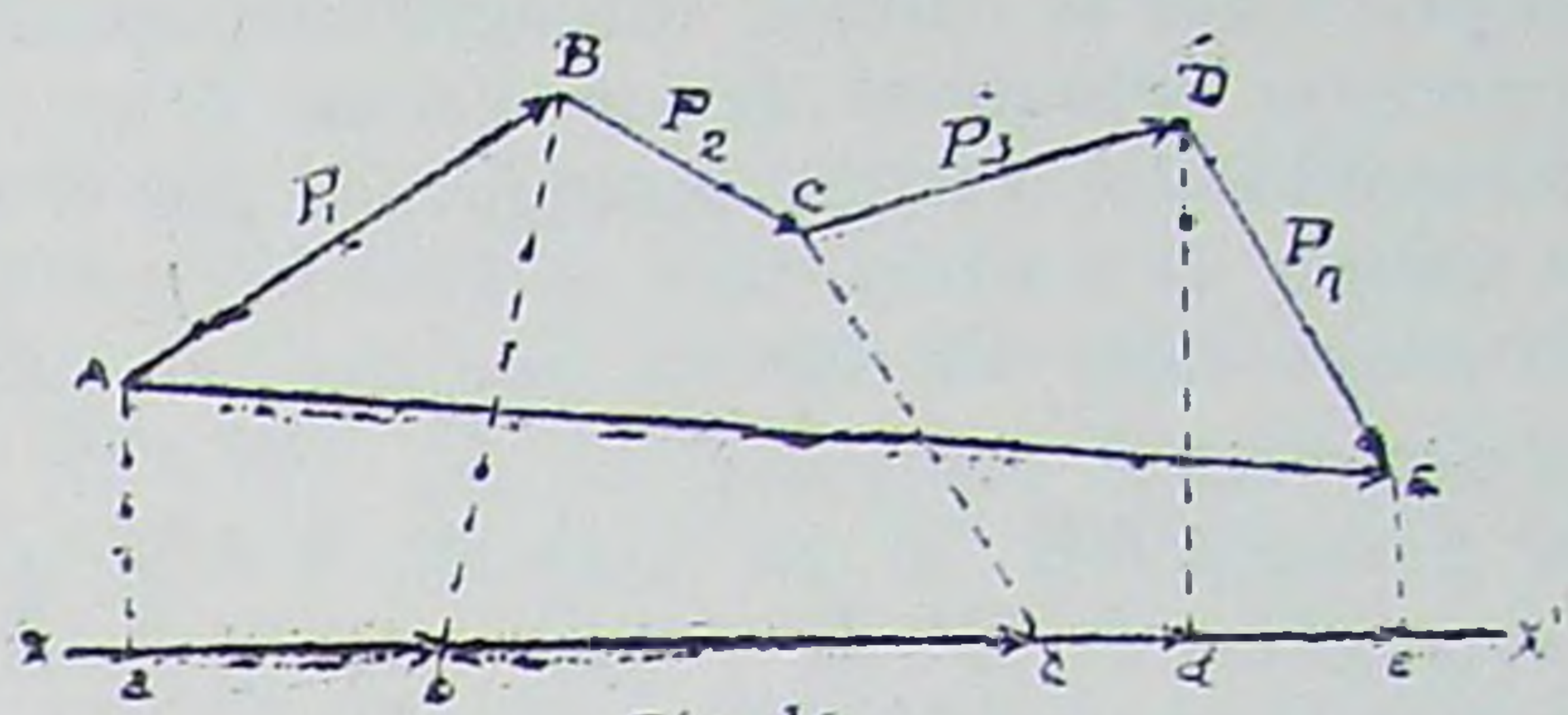


Fig-16

En efecto: consideremos el contorno poligonal ABCDE en el cual los vectores $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$, tienen como suma geométrica el vector $\overline{AE}$: Si consideramos los vectores proyectantes $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$, todos estos vectores que se encuentran en una misma dirección sumados algébricamente dan un valor $\overline{ae}$ que no es otro que el del vector ae proyección de la suma geométrica de vectores. Si los vectores son P_1, P_2, P_3, Pn y R la suma geométrica, llamemos Px_1, Px_2, Px_3, Pxn y Rx las proyecciones respectivas sobre el eje de x: tendremos

$$Rx = Px_1 + Px_2 + Px_3 + Pxn = \Sigma\, Px.$$

Proyecciones ortogonales

Para determinar las proyecciones de vectores sobre un eje, hemos considerado una definición general, por tanto, las deducciones generales son aplicables al caso particular en que, el plano director es perpendicular al eje de proyección.

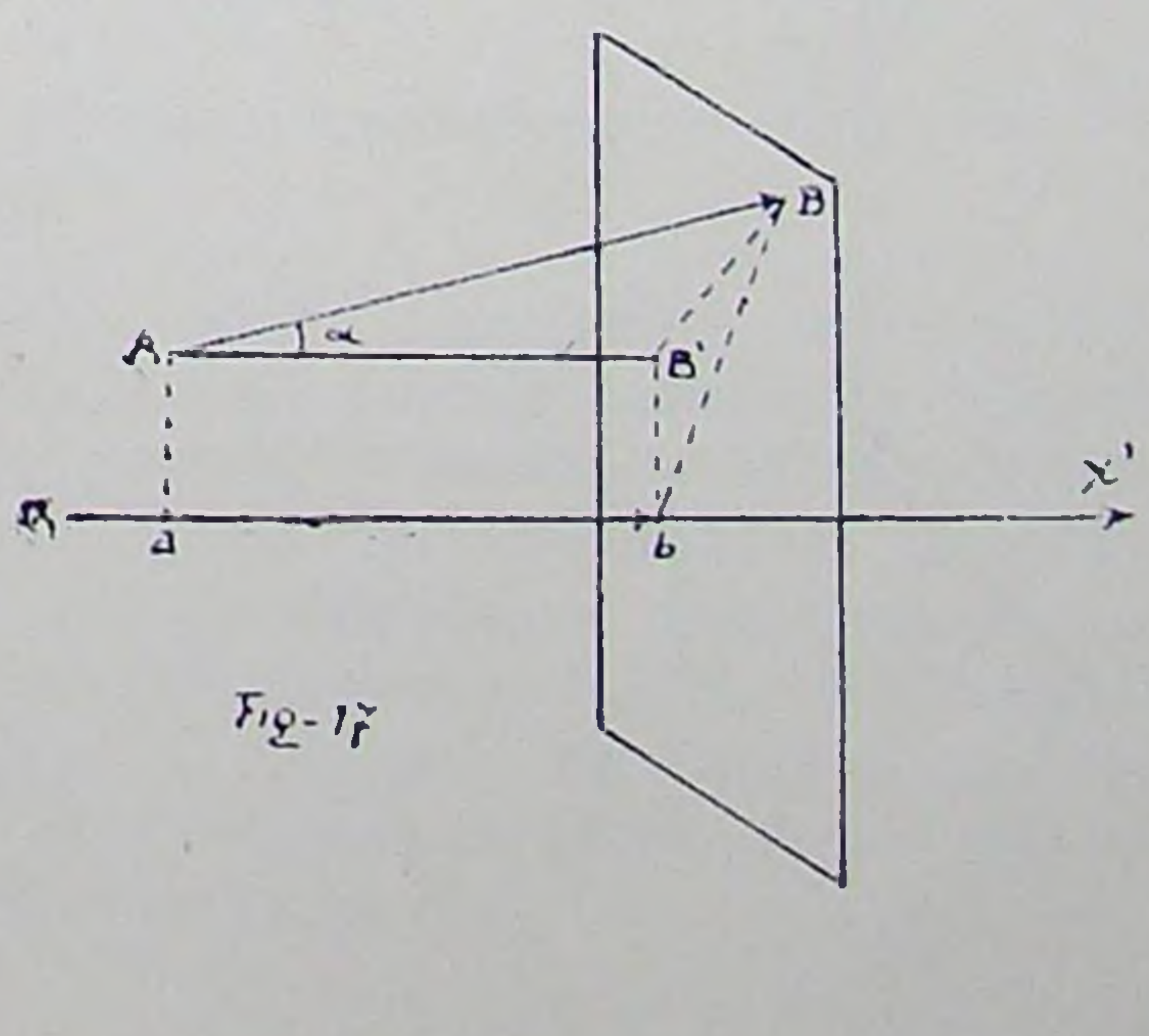


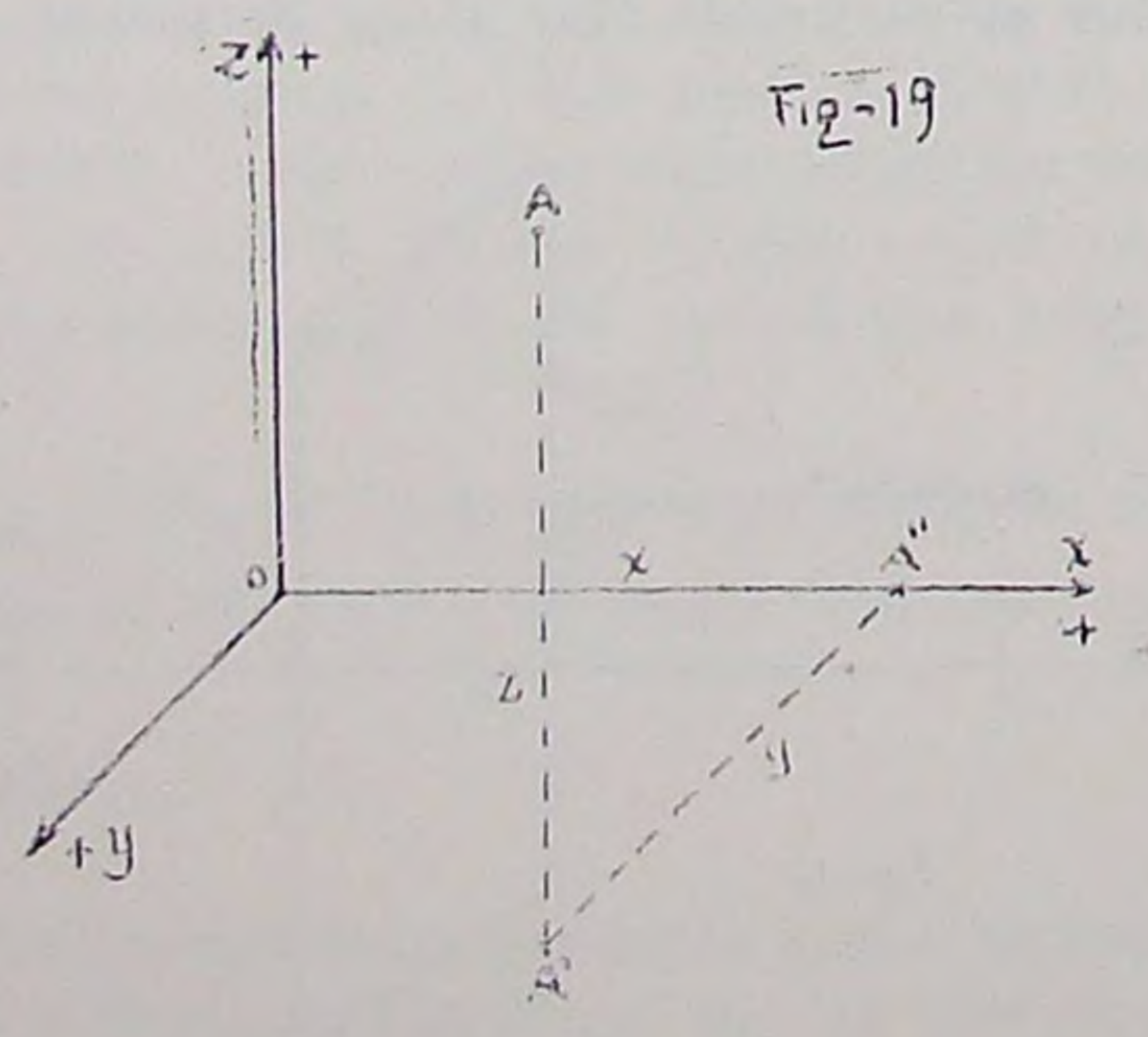
Fig-17

Las proyecciones se llaman, entonces *ortogonales.*

La proyección ortogonal de un vector sobre un eje, es igual a la magnitud del vector, multiplicada por el coseno del ángulo que forma el vector, con el sentido positivo del eje orientado de proyección: En efecto, sea $x x'$ el eje; el vector $\overline{AB}$ tiene su proyección ortogonal en $\overline{ab}$. Por el punto A tracemos la paralela AB' al eje $x x'$; ab = AB', pero, ABB' triángulo rectángulo en B', dá como valor para AB' uno de los catetos con relación a la hipotenusa AB:

$$AB' = ab = AB \cos \alpha$$

El coseno del ángulo α da el signo al vector proyectante, como se puede comprobar en la fig. 18, en donde el vector proyectante $\overline{ab}$ tiene sentido negativo y el ángulo α tiene también signo negativo para el coseno.



Coordenadas de un punto

Si por un punto *o* del espacio trazamos (fig. 19) tres ejes rectangulares, dos a dos, obtendremos un triedro rectángulo. Los ejes que lo forman *ox, oy, oz* son orientados como lo demuestra la figura y con relación a ellos, podemos determinar la posición de cualquier punto A del espacio, por medio de las coordenadas $A'A = z$; $A''A' = y$; $oA'' = x$.

Para determinar estas coordenadas, la analítica nos enseña que, por el punto A se trazan tres planos paralelos a los planos directores determinados por los ejes coordenados; así, para proyectar sobre el eje de *ox* el plano proyectante es paralelo al formado por *yoz*; el plano proyectante $(AA'A_1)$ corta el eje de *ox* en A_1 determinando una dimensión lineal $OA_1 = x$ o sea una coordenada. De igual manera encontraríamos las coordenadas correspondientes a los ejes *oy* y *oz*.

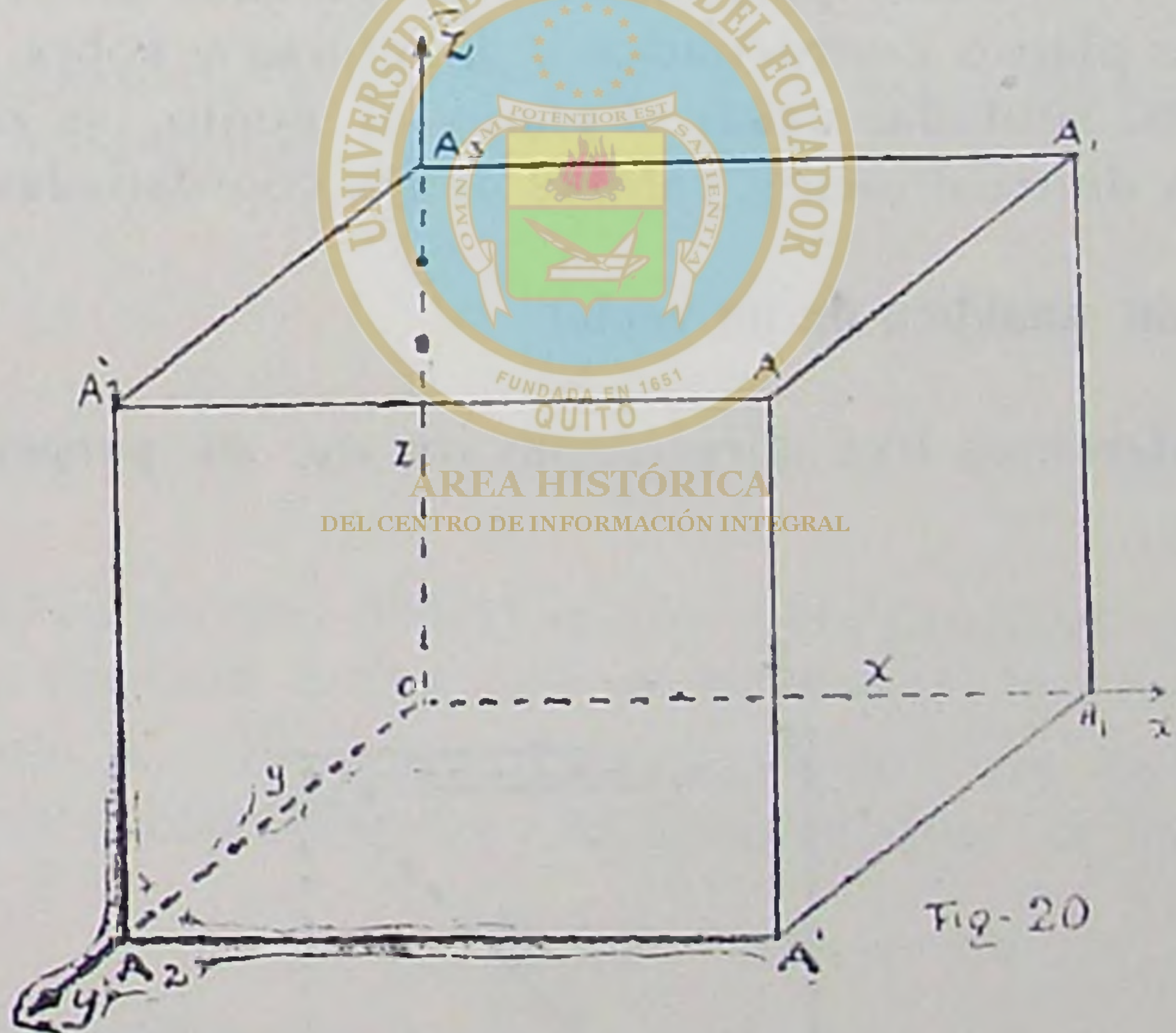


Fig-20

De acuerdo con la convención anterior, en la figura 20, se puede notar la construcción geométrica que permite obtener las coordenadas *x, y, z* mediante la proyección del punto A sobre cada uno de los ejes coordenados. Por la misma figura se desprende que los tres planos directores *yox, yoz, xoz*, junto con los planos proyectantes $AA'A_1$, $AA'A_2$, AA'_1A_3, forman un paralelepípedo rectángulo mediante el cual deducimos varias maneras de encontrar un punto A del espacio, por medio de sus coordenadas (x, y, z).

1°. Sobre cada uno de los ejes se toma la longitud indicada por la coordenada respectiva, a partir de *o;* determinados así los puntos A_1, A_2, A_3, por cada uno de estos puntos se trazan planos perpendiculares, respectivamente a cada eje; el punto A común a los tres planos trazados, es el punto de coordenadas consideradas.

2°. Sobre el eje *ox*, se toma $oA_1 = x$; por A_1 tracemos una paralela al eje *oy* y sobre esta paralela tomemos $A_1A' = y$; por A' tracemos una paralela al eje *oz* y sobre esta paralela tomemos $A'A = z$. El punto A se lo ha encontrado mediante un móvil que ha recorrido vectores determinados por las coordenadas.

OBSERVACIÓN

Debido a los ejes coordenados rectangulares, las rectas A'_2A, A'_1A, $A'A$ son perpendiculares bajadas desde el punto A hacia los planos coordenados o directores y sobre estas perpendiculares, contadas desde el plano al punto, se encuentran también las dimensiones y valores de las coordenadas.

Determinación analítica de un vector

Consideremos tres direcciones *ox*, *oy*, *oz* perpendiculares entre ellas.

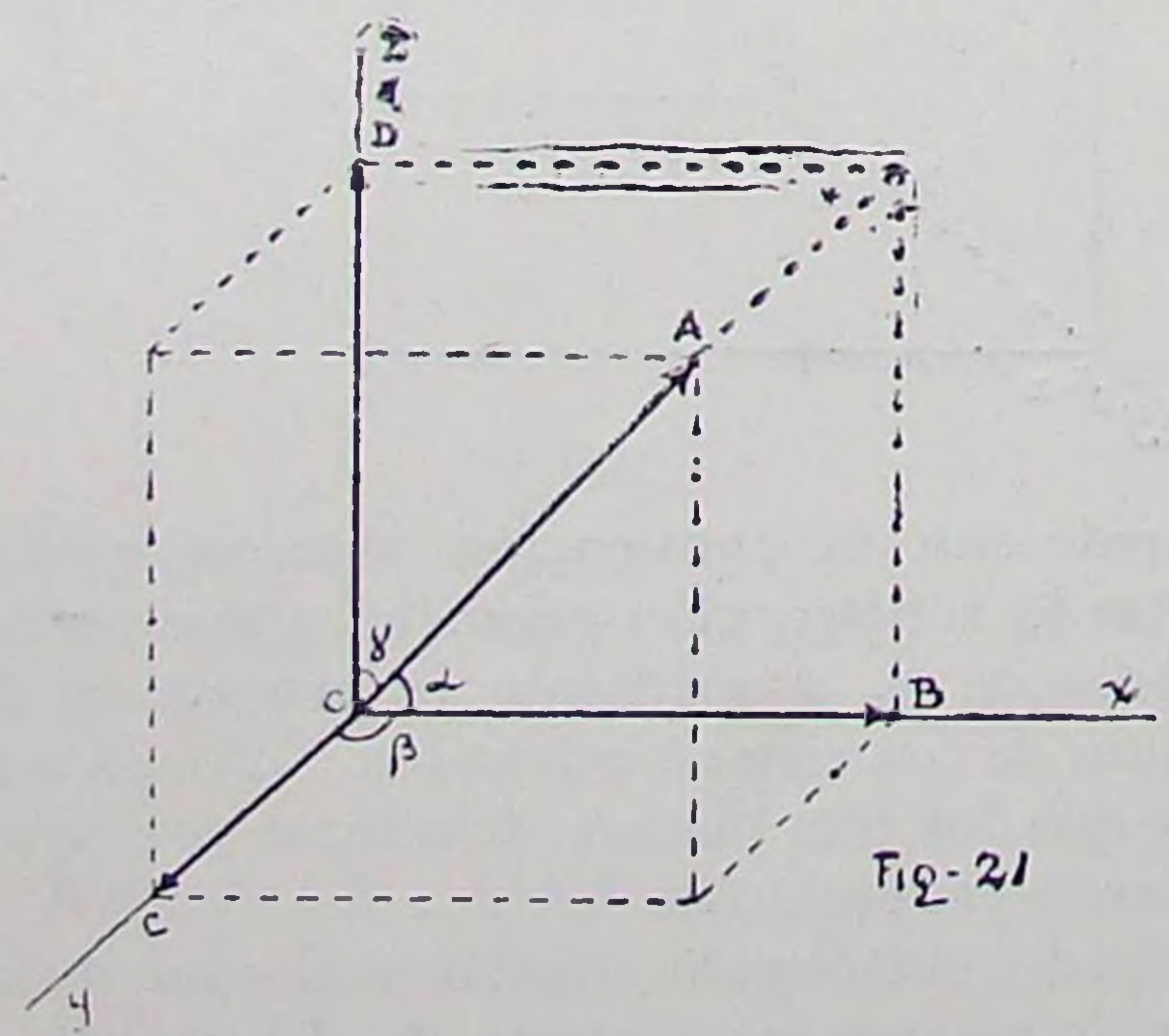


Fig-21

Según las direcciones de cada uno de los ejes (ox, oy, oz) coloquemos tres vectores concurrentes en o — Los vectores $\overline{oB}$, $\overline{oC}$ y $\overline{oD}$ tienen como suma geométrica el vector $\overline{oA}$ y sabemos que corresponde a la diagonal de un paralelepípedo que, en el caso presente, es rectangular.

Los vectores $\overline{oB}$, $\overline{oC}$, $\overline{oD}$, siendo los componentes del vector $\overline{oA}$, son al mismo tiempo las proyecciones del vector $\overline{oA}$, sobre los ejes ox, oy, oz que, para los fines del análisis, son los ejes coordenados.

Las proyecciones tienen como valores:

$$\overline{oA} \cos \alpha$$

$$\overline{oA} \cos \beta$$

$$\overline{oA} \cos \gamma$$

Si llamamos P al vector y X, Y, Z sus proyecciones ortogonales, tendremos:

$$X = P \cos \alpha$$

$$Y = P \cos \beta$$

$$Z = P \cos \gamma$$

Además debemos observar que estas proyecciones X, Y, Z son (con relación a los ejes coordenados) las coordenadas de un punto A. El punto A de un vector $\overline{oA}$ cuyo origen coincide con el origen de los ejes coordenados, se llama índice del vector.

Relaciones entre el vector y sus proyecciones

Los valores X, Y, Z siendo los lados de un paralelelípedo rectangular; están ligados con la diagonal P por medio de la ecuación:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

y los ángulos del vector P con los ejes coordinados, por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

Por tanto, bastan las proyecciones X, Y, Z para determinar el vector $\overline{P}$ en magnitud, dirección y sentido; el punto de aplicación queda en este caso el mismo que el de sus componentes.

Suma de vectores

Sean varios vectores $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{Pn}$ aplicadas en un punto o en diferentes puntos del espacio. En cualquier caso, puedo trasladarlos equipolentemente a uno sólo con el objeto de obtener la suma geométrica que se obtiene mediante un contorno poligonal del cual el vector $\overline{R}$ es la suma buscada.

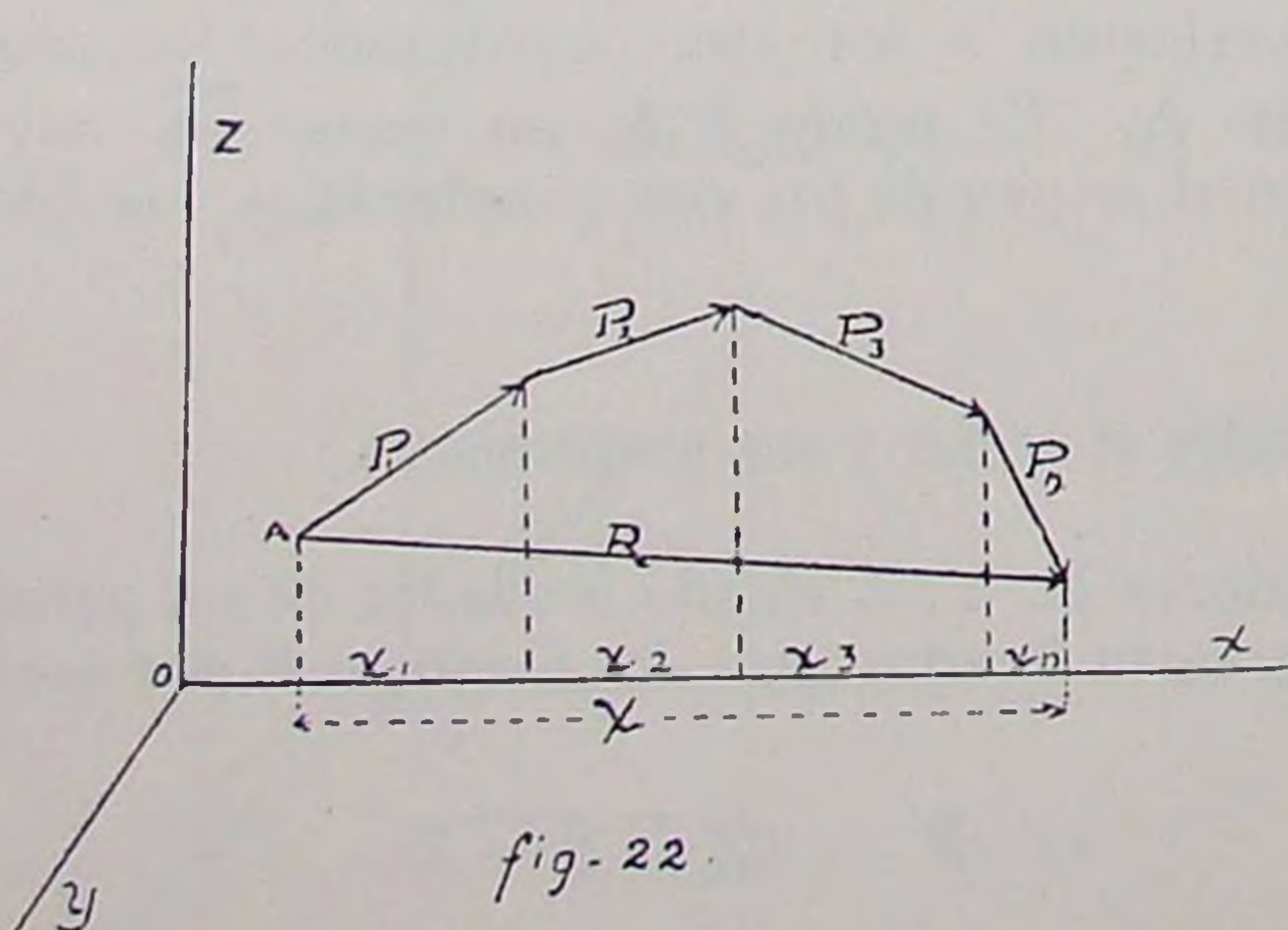


fig-22

Proyectando el contorno poligonal sobre un eje (el de *ox)* tendremos la siguiente igualdad algébrica:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + Xn = \Sigma Xi$$

de igual manera tendremos sobre los otros ejes:

$$Y = Y_1 + Y_2 + X_3 + Yn = \Sigma Yi$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Zn = \Sigma Zi$$

Estos valores X, Y, Z, son las proyecciones o sean las componentes ortogonales del vector $\overline{R}$ y con ellos está definido el vector en magnitud, dirección y sentido. Las coordenadas del punto de aplicación lo definirán completamente.

Las ecuaciones correspondientes son:

$$R = \sqrt{(X_1 + X_2 + X_3 + Xn)^2 + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Yn)^2 + (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Zn)^2}$$

o sea

$$R = \sqrt{\Sigma Xi^2 + \Sigma Yi^2 + \Sigma Zi^2}$$

y los ángulos α, β, γ de $\overline{R}$ con los ejes coordenados:

$$\cos \alpha = \frac{\Sigma X_1}{R}$$

$$\cos \beta = \frac{\Sigma Y_1}{R}$$

$$\cos \gamma = \frac{\Sigma Z_1}{R}$$

Momento lineal

Por definición, llámase momento lineal de un vector P (fig. 23) con relación a un punto *o* del espacio, el producto $P \times \delta$ de su magnitud por la distancia δ a su dirección. La distancia δ desde el punto a la dirección del vector, se llama «brazo de palanca» y o «centro del momento».

Para indicar que el momento de un vector $\overline{P}$ es con relación a un punto o, se simboliza así: $MoP = P \times \delta$.

Representación vectorial del momento

La representación del momento de un vector con relación a un punto o del espacio, se hace mediante un vector OL definido por las siguientes condiciones:

1ª. Punto de aplicación: el centro de momentos;

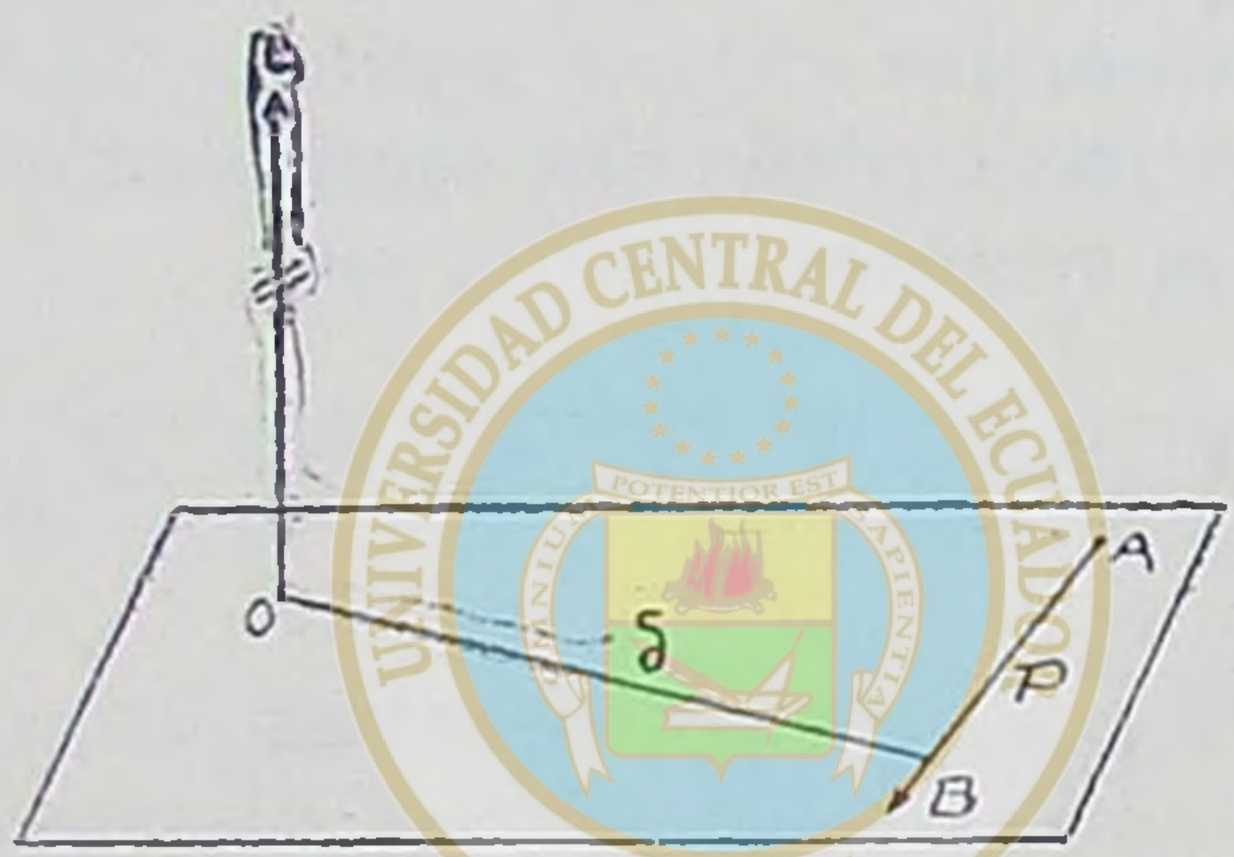


fig. 23

2ª. Magnitud: el producto $P \times \delta$;

3ª. Dirección: perpendicular al plano formado por el vector y el punto;

4ª. Sentido: el de un observador que, con los pies, en o y la cabeza en L, contempla siempre al vector $\overline{P}$ de izquierda a derecha, es decir en sentido de marcha de las agujas del reloj.

OBSERVACIONES:

a) El momento de un vector se anula con $P \times \delta = o$

1º. $P = o$; el vector es nulo;

2º. $\delta = o$; el brazo de palanca es nulo, es decir el centro o se encuentra sobre la dirección del vector.

b) El valor del momento es equivalente al doble de la superficie del triángulo formado con el vector $\overline{P}$ como base y el punto o como vértice.

c) El valor del momento no cambia (fig. 24) cuando el vector P se desplaza a cualquier punto de su dirección, pues $\overline{P}$ y δ no cambian de valor.

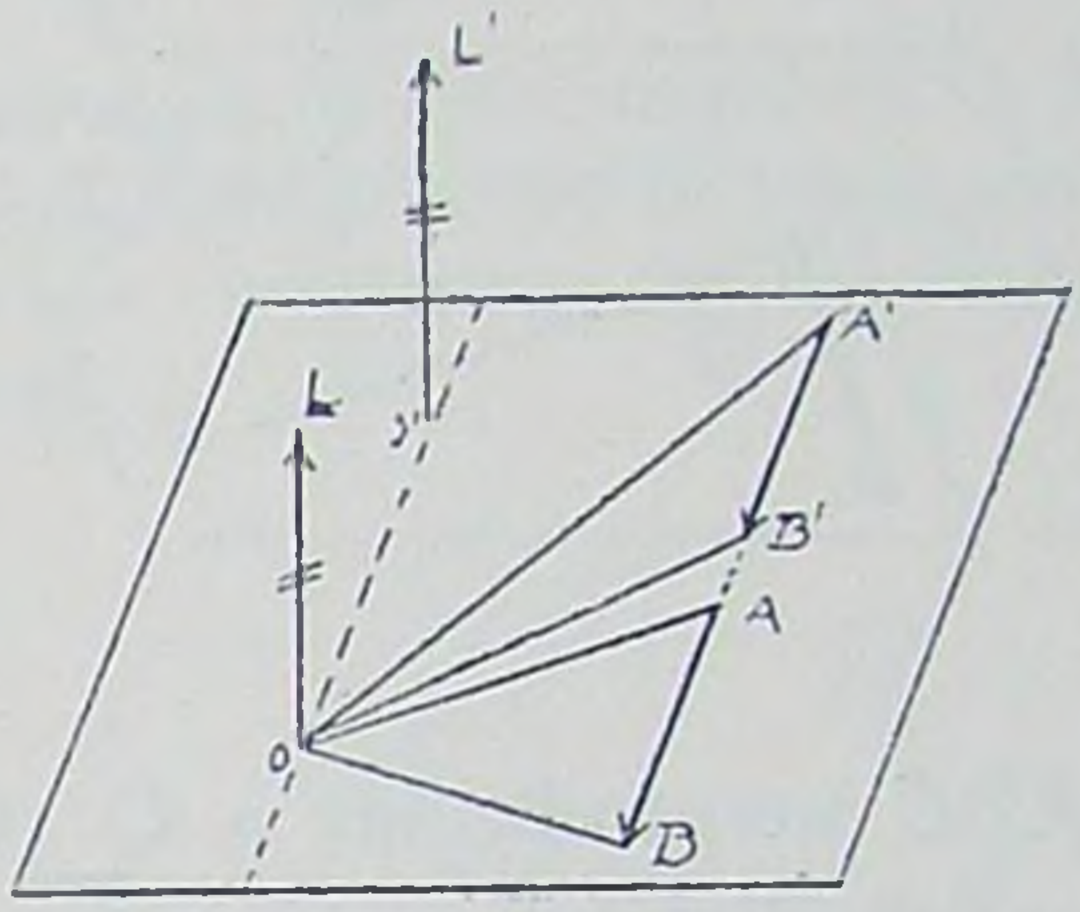


fig. 24

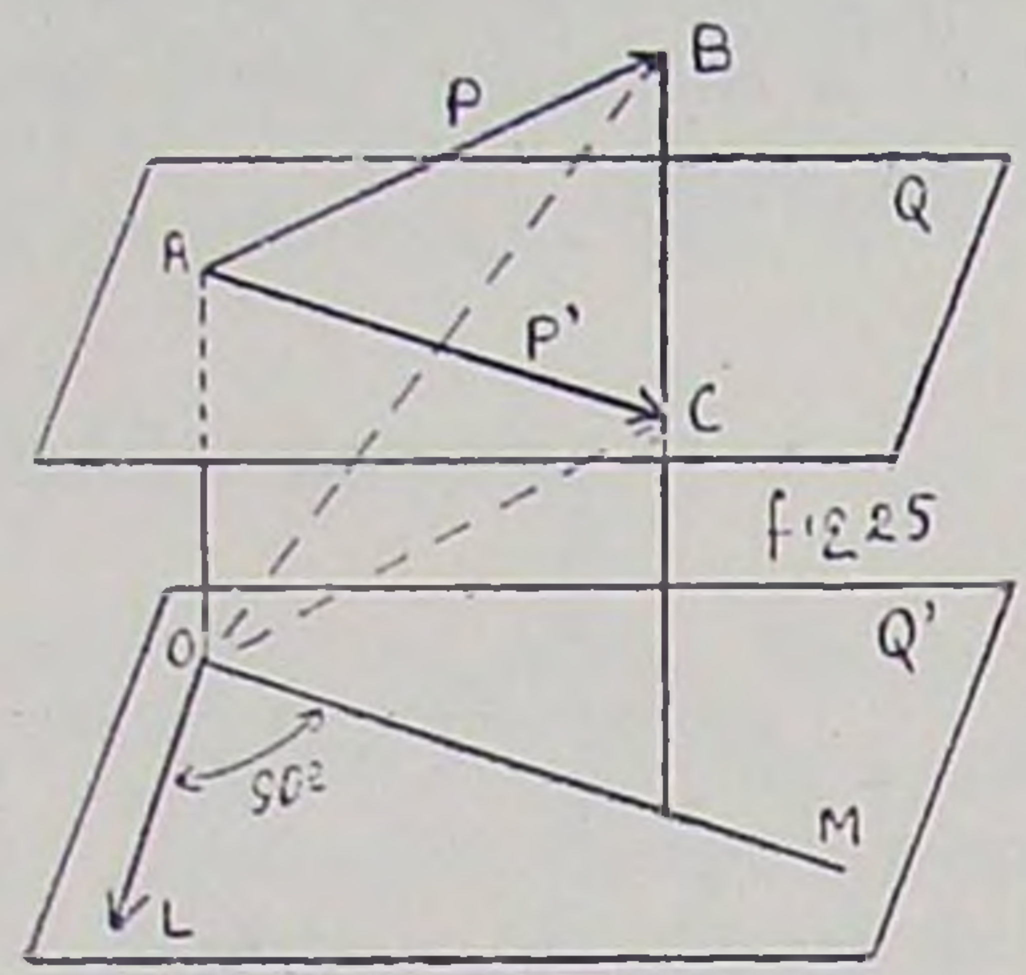
d) Los momentos son equivalentes y representados por vectores equipolentes OL y O'L' (fig. 24) cuando el centro *o* del momento, se encuentra en cualquier punto *o'* sobre una recta *oo'* paralela al vector $\overline{P}$.

e) El vector $\overline{OL} = \overline{P} \times \delta$ puede serlo de $P' \times \delta' = OL$ (producto constante).

Teorema

El momento de un vector P es el mismo que el de su proyección ortogonal sobre un plano perpendicular a la recta que une el centro de momento y el punto de aplicación del vector; este plano proyectante pasa por el punto de aplicación del vector.

Sea (fig. 25) un punto A de aplicación del vector $\overline{P}$ y *o* centro de momento; por A tracemos el plano Q perpendicular a la recta OA y proyectemos ortogonalmente en $\overline{P'}$ el vector $\overline{P}$.



El plano OABC perpendicular a Q (OA y BC perpendiculares a Q) contiene los dos vectores $\overline{P}$ y $\overline{P'}$. Los triángulos OAB y OAC son equivalentes por tener la base OA común y los vértices B y C en la paralela a dicha base; luego el vector $\overline{OL}$ perpendicular al plano común es el momento de cualquiera de los vectores P y P'.

Además, el vector $\overline{OL}$ (momento) se encuentra en un plano Q' perpendicular a OA, siendo su valor $P' \times OA$, es decir, la proyección de $\overline{P}$ por la distancia entre el centro de momento y el punto de aplicación del vector.

Momento resultante

Cuando un sistema compuesto de vectores $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$, $\overline{P_3}$, $\overline{Pn}$, se encuentran aplicados en puntos A_1, A_2, A_3, An del espacio, podemos considerar los momentos de cada uno con relación a un punto *o* centro de momentos y tendremos sucesivamente:

$$MoP_1 = P_1 \times \delta_1$$
$$MoP_2 = P_2 \times \delta_2$$
$$MoP_3 = P_3 \times \delta_3$$
$$MoPn = Pn \times \delta n$$

todos representados por vectores $\overline{OL_1}$, $\overline{OL_2}$, $\overline{OL_3}$, $\overline{OLn}$ aplicados al punto *o*.

La suma de estos momentos será un vector $\overline{OL}$ llamado «momento resultante» igual a $\Sigma MoPi = \Sigma OLi = \Sigma Pi \times \delta i$.

Teorema de Varignon

Cuando los vectores son concurrentes, es decir, aplicados en un mismo punto, el momento de la resultante es igual a la suma geométrica de los momentos de las componentes, o sea al momento resultante.

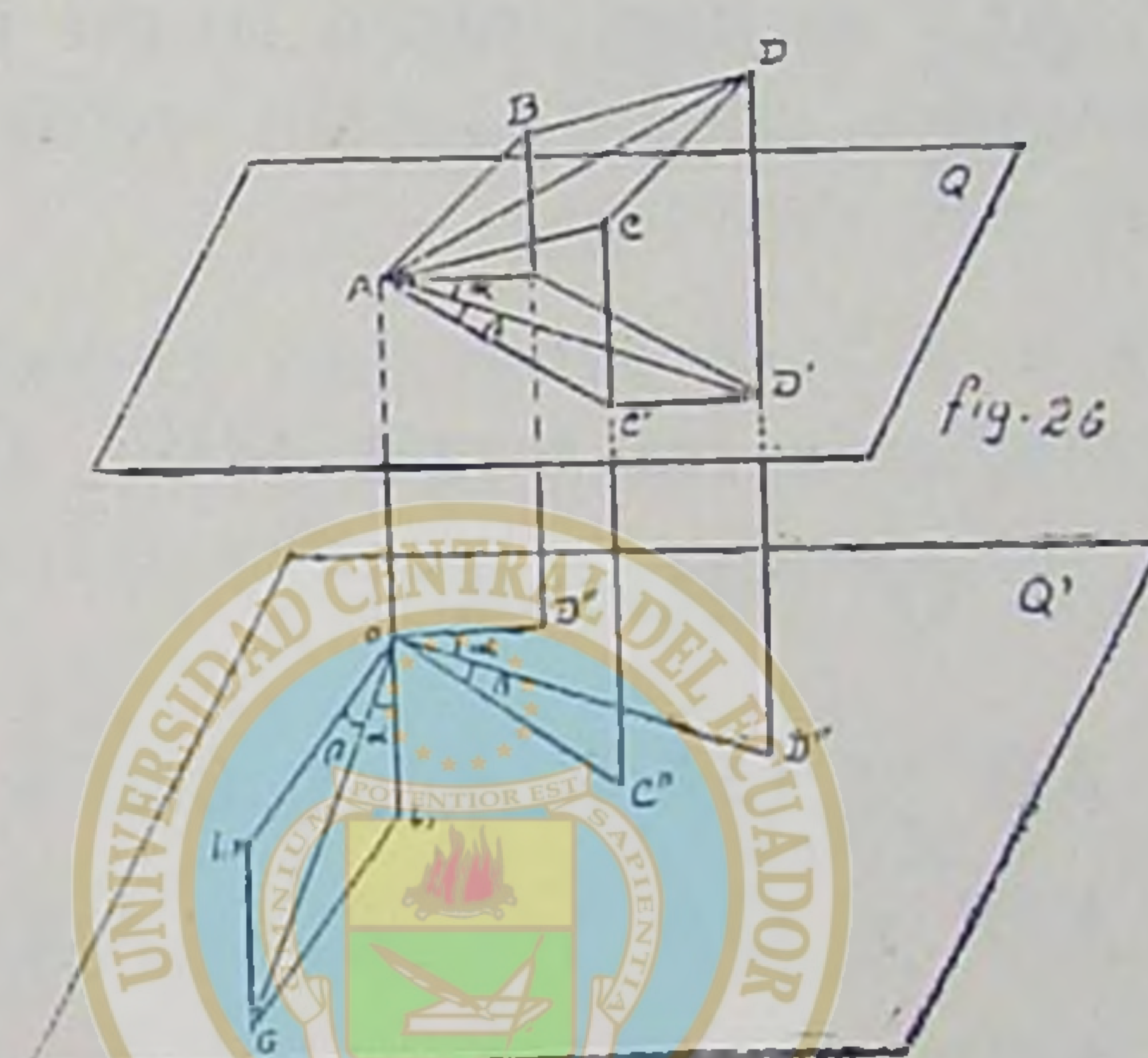


fig. 26

Sea A un punto del espacio en el cual están aplicados los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Siendo *o* el centro de momentos; por A trazamos el plano Q perpendicular a OA y por *o* el plano Q' paralelo a Q.

El vector $\overline{AD}$, diagonal del paralelogramo ABDC, es la resultante geométrica de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

El paralelogramo se proyecta en el plano *Q* según el paralelogramo AB'D'C' y los momentos de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, son los mismos que los momentos de $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$, $\overline{AD'}$, y sus valores son:

$$Mo\overline{AB} = AB' \times OA$$

$$Mo\overline{AC'} = AC' \times OA$$

$$MoAD' = AD' \times OA$$

por tanto los vectores momentos tienen como valor cada uno de los vectores del paralelogramo, multiplicados por una cantidad constante OA.

Como hemos visto anteriormente, los vectores momentos se encuentran en un plano Q' paralelo a Q y pasando por o; luego todos son perpendiculares a OA.

La recta OA es la arista común de los planos OAB', OAD' y OAC' que son los planos formados por el centro de momentos con cada uno de los vectores; como los vectores $\overline{AB'}$, $\overline{AD'}$, $\overline{AC'}$ se encuentran en un plano perpendicular a OA, los ángulos diedros están representados por los ángulos α y β de los vectores.

Los ángulos α y β se proyectan en verdadera magnitud en el plano Q' mediante las trazas OB'', OD'' y OC''.

Si en el plano Q' trazamos

$OL_1 = AB' \times OA$ perpendicular a OB''

$OG = AD' \times OA$ » a OD''

$OL_2 = AC' \times OA$ » a OC''

El paralelogramo OL_1GL_2 será homotético del paralelogramo AB'D'C' y finalmente OG suma geométrica de OL_1 y OL_2 es el momento de AD' o sea de la resultante AD de los vectores AB y AC.

Varios vectores

Consideremos la suma geométrica de vectores concurrentes $\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \overline{P}n.$

Si llamamos $\overline{R}_1 = \overline{P}_1 + \overline{P}_2$ tendremos $MoR_1 = MoP_1 + MoP_2$

» $\overline{R}_2 = \overline{R}_1 + \overline{P}_3$ » $MoR_2 = MoR_1 + MoP_3$

» $\overline{R} = \overline{R}_2 + \overline{P}n$ » $MoR = MoR_2 + MoPn$

Sumando tendremos $MoR = MoP_1 + MoP_2 + MoP_3 + MoPn.$

Momento con relación a dos puntos O y O_1

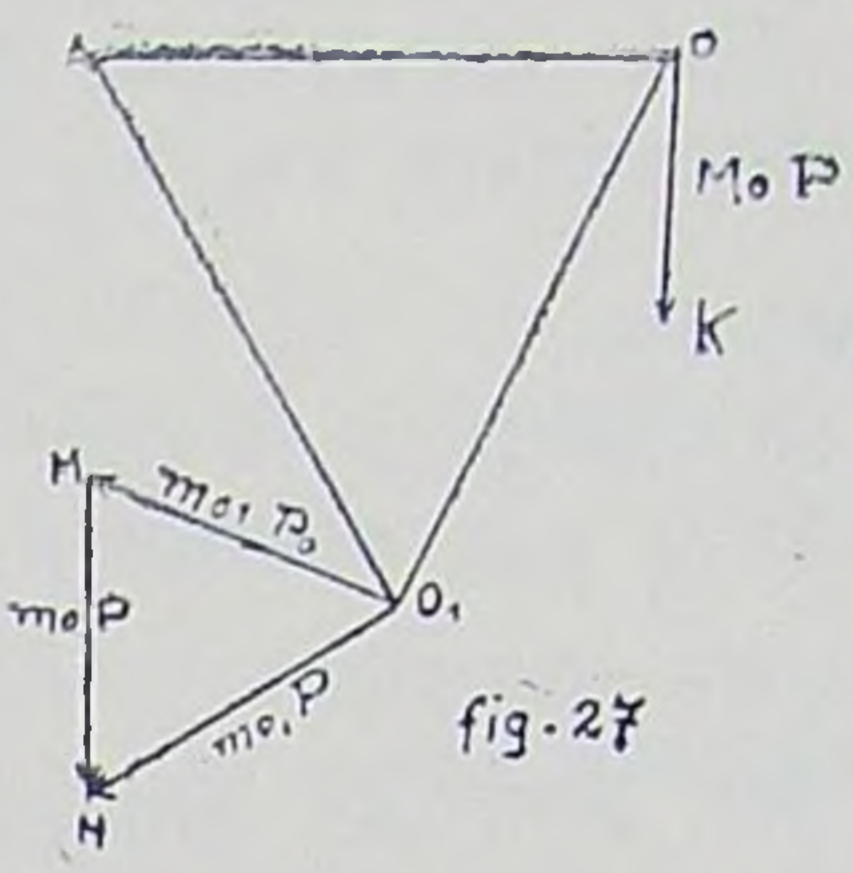


fig. 27

Consideremos un vector $\overline{P}$ colocado en A y perpendicular al plano del *papel;* el vector en estas condiciones estará proyectado en A. Los puntos *o* y o_1 centros de momentos los desplazamos en sus líneas proyectivas paralelas a la dirección de P, hasta el plano del papel y sabemos que los vectores momentos no cambian de valor.

Tomemos los momentos del vector P con relación a *o* y o_1; estos momentos estarán representados por

$$\left.\begin{array}{l} OK = P \times OA = MoP \\ O_1N = P \times O_1A = Mo_1P \end{array}\right\} \text{de donde } P = \frac{OK}{OA} = \frac{O_1N}{O_1A}$$

Por O_1 tracemos O_1M perpendicular a O_1O y por *N* una paralela *NM* a *OK.*

El triángulo O_1MN es semejante al triángulo O_1AO, por tener los lados perpendiculares entre ellos, de donde se deduce que:

$\frac{O_1N}{O_1A} = \frac{O_1M}{O_1O} = \frac{MN}{OA}$ pero como anteriormente teníamos

$\frac{O_1N}{O_1A} = P$ deducimos que $MN = OK = MoP$; $O_1M = P \times O_1O$.

$O_1M = P \times O_1O$ sería el momento con relación a O_1 de un vector equipolente a $\overline{P}$, pero colocado en O y por esta razón se lo simboliza por Po.

Considerando el triángulo O_1MN, vemos que, de acuerdo con los sentidos indicados por las flechas, el vector $\overline{O_1N}$ es igual a la suma geométrica de dos vectores: $\overline{O_1M}$ y $\overline{MN}$, los que respectivamente tienen los valores indicados en la figura y por tanto se deduce que:

El momento con relación a un punto O_1 de un vector $\overline{P}$ es igual a la suma geométrica del momento con relación a un punto O más el momento con relación a O_1 de un vector equipolente a P, colocado en O.

El teorema queda simbolizado así:

$$Mo_1P = MoP + Mo_1Po$$

Momento de un sistema de vectores con relación a dos puntos O y O_1 del espacio.

Sea un sistema de vectores P', P'', P''', etc. colocados en puntos cualesquiera de aplicación, y sean O y O_1 dos centros de momentos.

Considerando la relación anterior para cada uno de los vectores, tendremos las igualdades siguientes.

$$Mo_1P' = MoP' + Mo_1Po'$$
$$Mo_1P'' = MoP'' + Mo_1Po''$$
$$Mo_1P''' = MoP''' + Mo_1Po'''$$

Sumando las igualdades anteriores tendremos:

$\Sigma Mo_1P' = \Sigma MoP' + \Sigma Mo_1Po'$, pero $\Sigma Mo_1Po'$ o sea el mamento resultante con relación a O_1 de vectores colocados todos en *O*, es igual al momento de su Resultante de traslación colocada en el mismo punto *O;* es decir

$$\Sigma Mo_1Po' = Mo_1Ro$$

y la ecuación queda

$$\Sigma Mo_1P = \Sigma MoP + Mo_1Ro$$

Si se designa por G y G_1 los momentos resultantes con relación a los puntos *O* y O_1 del espacio, simbolizamos la ecuación anterior por:

$$\overline{G_1} = \overline{G} + \overline{Mo_1Ro}$$

Por tanto, el momento resultante de un sistema vectorial, con relación a un punto O_1 del espacio, es igual al momento resultante con relación a un punto O, más el momento con relación a O_1 de la resultante de traslación formada con los vectores del sistema, en el punto O.

Invariantes de un sistema de vectores

Para cualquier sistema de vectores P', P'', P''', etc., existen dos cosas invariables:

1º. La suma geométrica;

2º. La proyección del momento resultante sobre la dirección de la suma geométrica.

En efecto. sean O y O_1 dos puntos del espacio, arbitrariamente escogidos; si trasladamos equipolentemente los vectores del sistema a cada uno de los puntos considerados, en cualquiera de ellos obtendremos un polígono idéntico del cual la suma geométrica será siempre la misma, Si llamamos R_1 la suma geométrica de traslación en el punto O_1 y *Ro* la suma geométrica de traslación en el punto O, siempre tendremos

$$R_1 = Ro.$$

Consideremos ahora la ecuación vectorial

$$\overline{G_1} = \overline{G} + \overline{Mo_1Ro}$$

entre los momentos de un sistema con relación a dos puntos O y O_1 del espacio.

El vector $\overline{G_1}$ es igual al vector $\overline{G}$, más el vector $\overline{Mo_1Ro}$ proyectemos estas igualdades vectoriales sobre la dirección de R_1 o de Ro que le es paralela y tendremos:

proyección de $\overline{G_1}$ = proyección de $\overline{G}$ + proyección de $\overline{Mo_1Ro}$

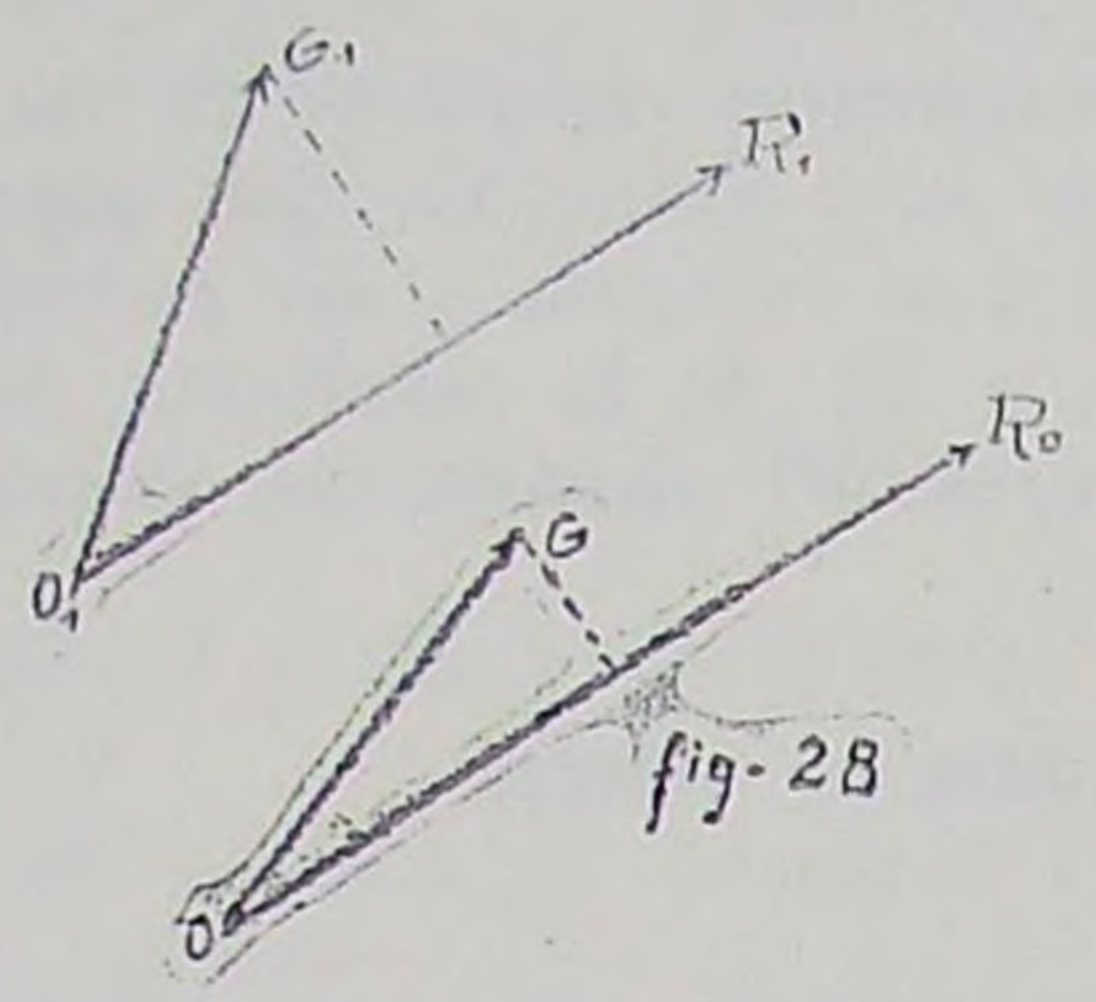


fig-28

El vector $\overline{Mo_1Ro}$, es un vector perpendicular al plano formado por los vectores paralelos R_1 y Ro y su proyección sobre la dirección de R_1 es nula; por tanto:

proyección de G_1 = proyección de G.

Momentos de vectores con relación a un eje

Definición:

Sea $x\,x'$ un eje y P un vector del espacio.

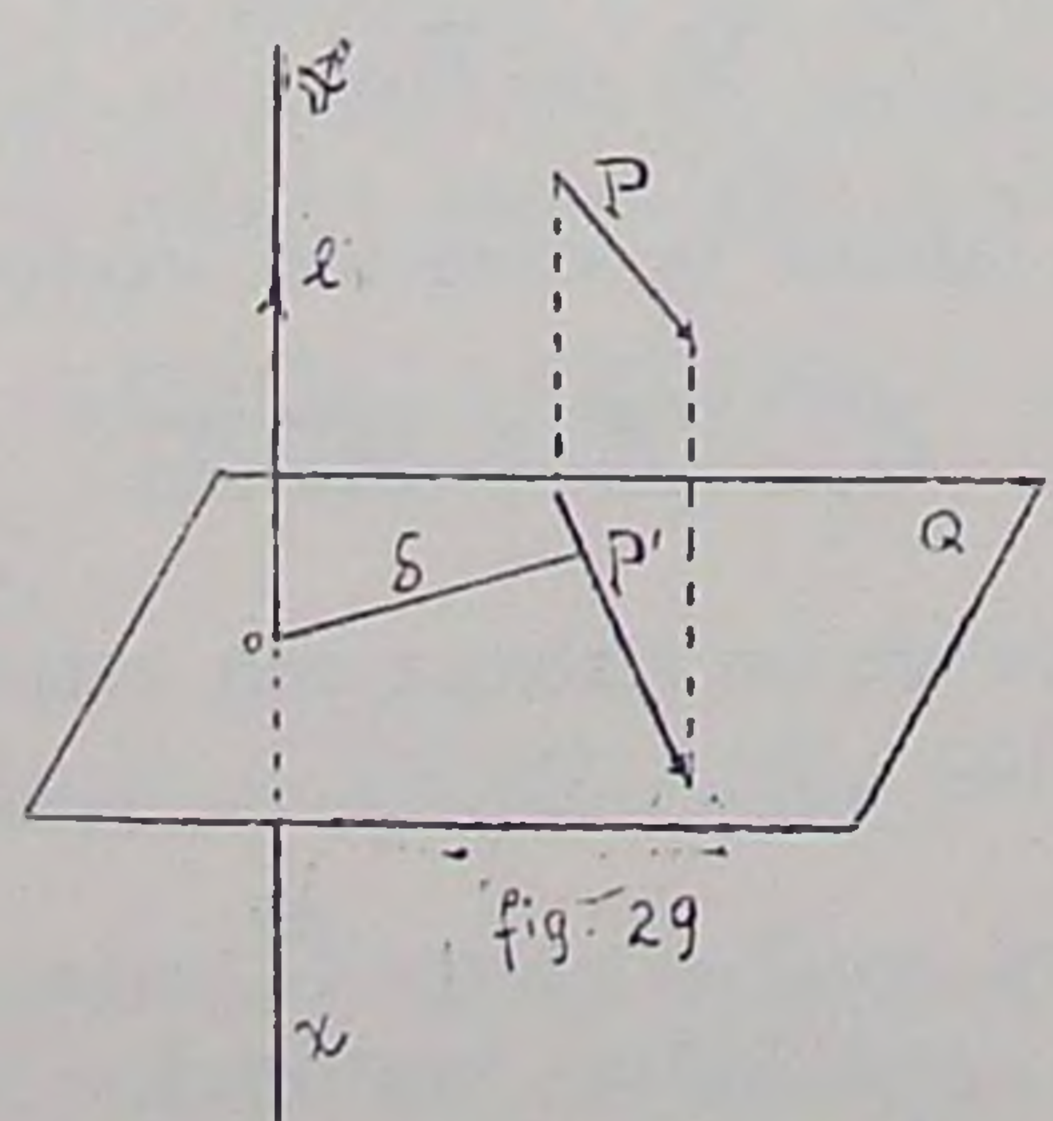


fig. 29

Tracemos un plano Q perpendicular al eje $x\,x'$ y proyectemos el vector $\overline{P}$ sobre el plano Q.

El punto O es aquel en que el eje $x x'$ encuentra al plano Q, es decir la intersección del eje y del plano; el vector $\overline{P'}$ es la proyección de $\overline{P}$ sobre el plano Q; por definición: el momento de P con relación al eje $x x'$, es el momento *lí-neal* de $\overline{P'}$ con relación *O*.

La representación vectorial del momento, de acuerdo con la convención primitiva, será hecha por medio del vector $\overline{ol}$ aplicado en *O* y perpendicular a *Q*, es decir, coincide con el eje y es aplicado en cualquier punto de este eje, ya que *O* es arbitrario, por serlo así la posición del plano Q perpendicular al eje.

Teorema

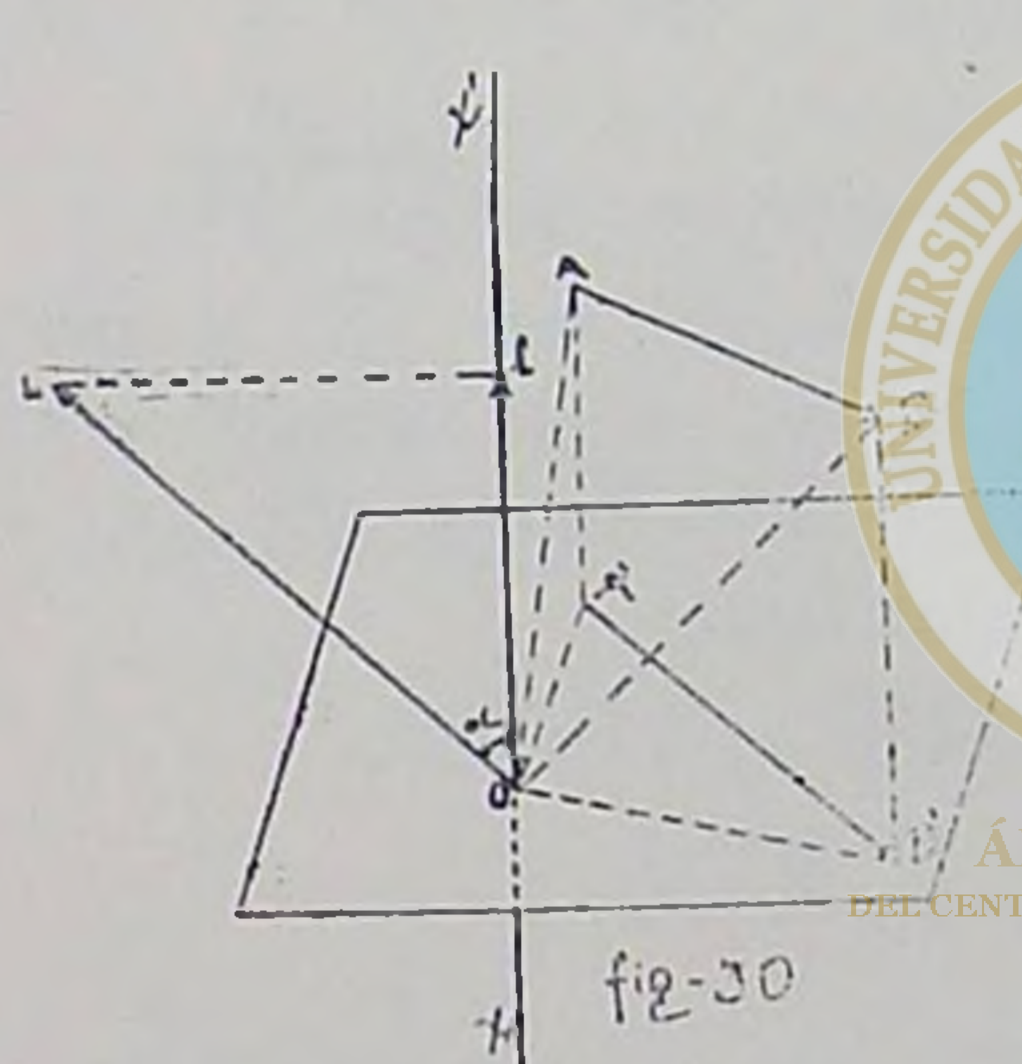


fig-30

El momento de un vector con relación a un eje, xx' es igual a la proyección sobre este eje, del momento lineal del vector con relación al punto *O* del eje.

Sea $\overline{AB}$ el vector y $\overline{A'B'}$ su proyección sobre el plano Q; por convención, el momento de $\overline{AB}$ con relación al eje, es el momento lineal de A'B' con relación a *O*, el que, representado por ol, es igual, en valor, al doble de la superficie del triángulo OA'B'. El momento lineal de AB con relación a *O* está representado por $\overline{OL}$ y es igual al doble del triángulo OAB. Pero OA'B' es la proyección del triángulo OAB, siendo su valor OAB $\times$ cos α; α es el ángulo diedro de los planos de los triángulos. Como *ol* es perpendicular al plano OA'B' y *OL* es perpendicular al plano OAB, las rectas *ol* y *OL* forman un ángulo que es precisamente α y como $ol = 2\overset{\Delta}{O}A'B'$.

$OL = 2OAB$ y como $OA'B' = OAB \times \cos\alpha$ sustituyendo valores, tendremos que:

$ol = OL \cos\alpha$, es decir $\overline{ol}$ es la proyección, sobre el eje, de $\overline{OL}$.

Teorema

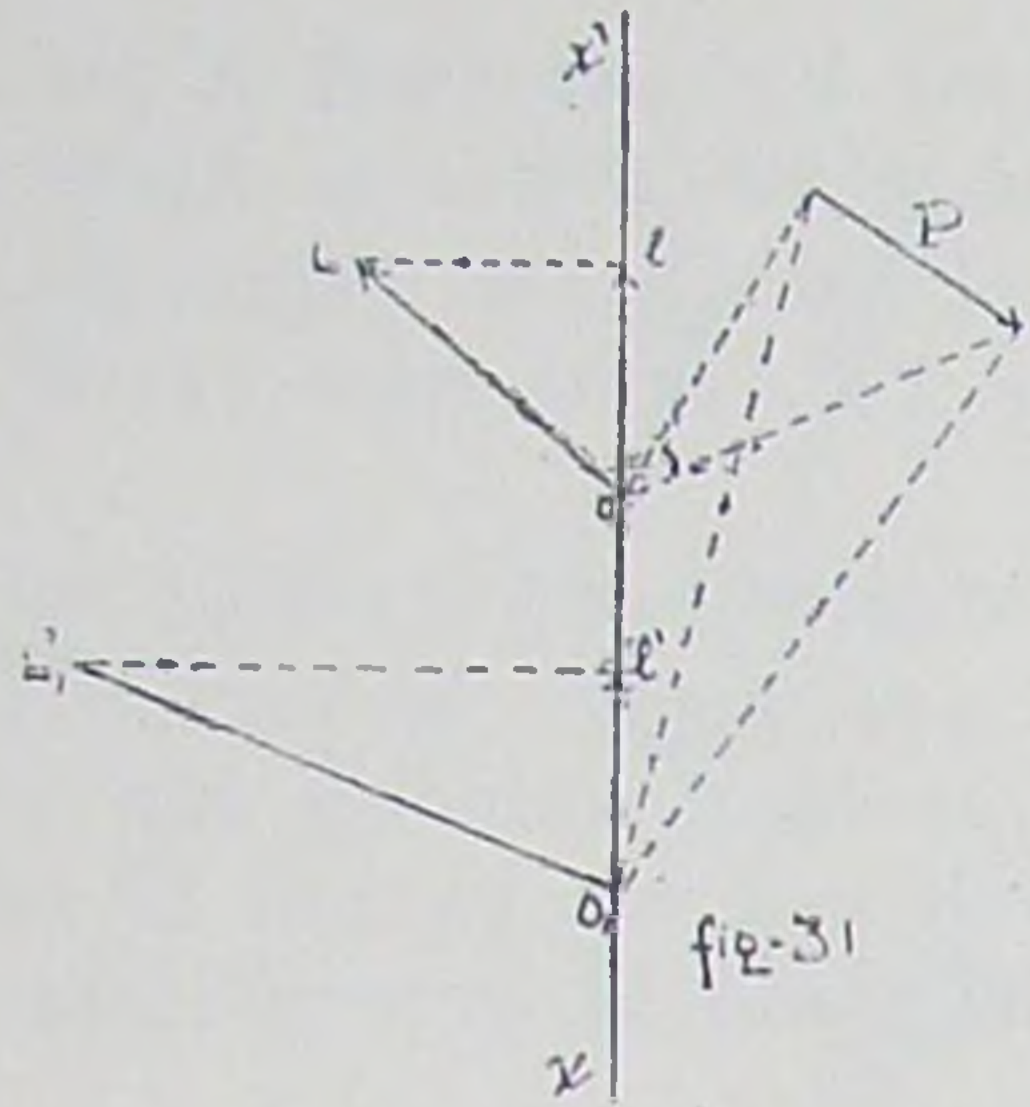


fig-31

Cualquiera que sea el punto O sobre el eje xx' la proyección sobre dicho eje del momento lineal de un vector con relación a un punto O del eje, es constante.

En efecto, sean O y O_1 dos puntos cualesquiera del eje; $\overline{ol}$ es es la proyección de $\overline{OL}$ y $\overline{o_1 l_1}$ es la proyección de $\overline{O_1 L_1}$.

Como $\overline{OL}$ y $\overline{O_1 L_1}$ son los momentos lineales de un vector $\overline{P}$ con relación a 2 puntos O y O_1 del espacio, entre los momentos hay la relación $\overline{OL_1} = \overline{OL} + \overline{Mo_1 Po}$. Si proyectamos sobre el eje xx' esta igualdad vectorial, tendremos:

$$\text{proyec. de } \overline{OL_1} = \text{proyec. de } \overline{OL} + \text{proyec. de } \overline{Mo_1 Po}.$$

El vector $\overline{Mo_1 Po}$ es un vector aplicado en O_1 y perpendicular al plano formado por o_1 y un vector equipolente a P aplicado en O; por tanto es perpendicular al eje xx' y su proyección sobre dicho eje es nula; luego

proyec. de $\overline{O_1 L_1}$=proyec. de $\overline{OL}$ (sobre xx') es decir

$$o_1 l_1 = ol.$$

Observaciones

La nulidad del momento de un vector con relación a un eje se realiza cuando el vector y el eje están en un mismo plano. En este caso, o son concurrentes y el brazo de palanca es nulo, o son paralelos y la proyección del vector sobre un plano Q perpendicular al eje, es nula.

Momento resultante con relación a un eje

Un sistema de vectores $\overline{P'}$, $\overline{P''}$, $\overline{P'''}$, considerados cada uno de los vectores, tendrá un momento representado por un vector de dirección del mismo eje, por tanto la suma geométrica que se reduce a una suma algébrica, se la llama momento resultante y se le simboliza por

$$g = Mxx'P' + Mxx'P'' + Mxx'P''' = \Sigma Mxx'P.$$

OBSERVACIÓN

Como la teoría vectorial está basada exclusivamente en la idea del movimiento y éste se relaciona a la orientación de trayectorias, un eje cualquiera $\underline{xx'}$ se lo supone orientado y por tanto los vectores $\overline{ol}$, $\overline{ol'}$, $\overline{ol''}$ representativos de momentos con relación al eje, tendrán los signos correspondientes a la orientación del eje.

Teorema

El momento resultante $\bar{g}$ con relación a un eje, es igual a la proyección sobre el eje, del momento resultante lineal $\overline{G}$ de un sistema vectorial con relación a un punto del eje.

En efecto: sea un sistema vectorial $\overline{P'}$, $\overline{P''}$, $\overline{P'''}$ y o un punto del eje xx'.

El momento resultante con relación a o es

$$\overline{MoP'} + \overline{MoP''} + \overline{MoP'''} = \overline{G}$$

proyectemos esta igualdad sobre el eje xx' y tendremos

$$Mxx'P' + Mxx'P'' + Mxx'P''' = \text{proyección de } G$$

pero el primer miembro de la ecuación es g, luego

$$g = \text{proyección de } G.$$

Corolario

Si los vectores son concurrentes hemos visto que el momento de la resultante, es el momento resultante, en otra forma:

$$MoR = G$$

proyectemos sobre xx' suponiendo que o está sobre el eje, tendremos:

$$M_{xx}R = g,$$

es decir que el momento de la resultante de vectores concurrentes con relación a un eje xx', es igual al momento resultante.

Expresión analítica de momentos

fig. 32

Sean *ox, oy, oz* tres ejes coordenados rectangulares.

A, un punto del espacio definido por las coordenadas *(x, y, z)*. En el punto *A* un vector P, definido por sus componentes X, Y, Z que no son otra cosa que las proyecciones del vector sobre los ejes. El vector P es, por tanto la resultante geométrica de tres vectores *concurrentes* $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ y como el momento de $\overline{P}$, es igual a la suma de momentos de sus componentes, por tanto, en lugar del momento de $\overline{P}$, considero simultáneamente los momentos de $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ con relación a cualquiera de los ejes.

Tratemos, pues, de buscar el momento del vector $\overline{P}$ con relación al eje *ox*.

De acuerdo con la convención, proyecto $\overline{P}$ sobre el plano *yoz* perpendicular a *ox;* pero en lugar de $\overline{P}$ proyectamos sus componentes: Y, Z, se proyectan en verdadera magnitud, siendo nula la proyección de X. *y, z,* son los brazos de palanca y el momento de $\overline{P}$ será igual al momento de Y más el momento de Z.

Luego: $M_{ox}\ P = yZ - zY$

tomando en cuenta que el momento de Y es negativo.

De idéntica manera obtendremos los momentos con relación al eje de oy y al eje de oz. Las tres expresiones son:

$$\mathrm{M}ox\mathrm{P} = y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}$$
$$\mathrm{M}oy\mathrm{P} = z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}$$
$$\mathrm{M}oz\mathrm{P} = x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}$$

Momento con relación al origen de los ejes

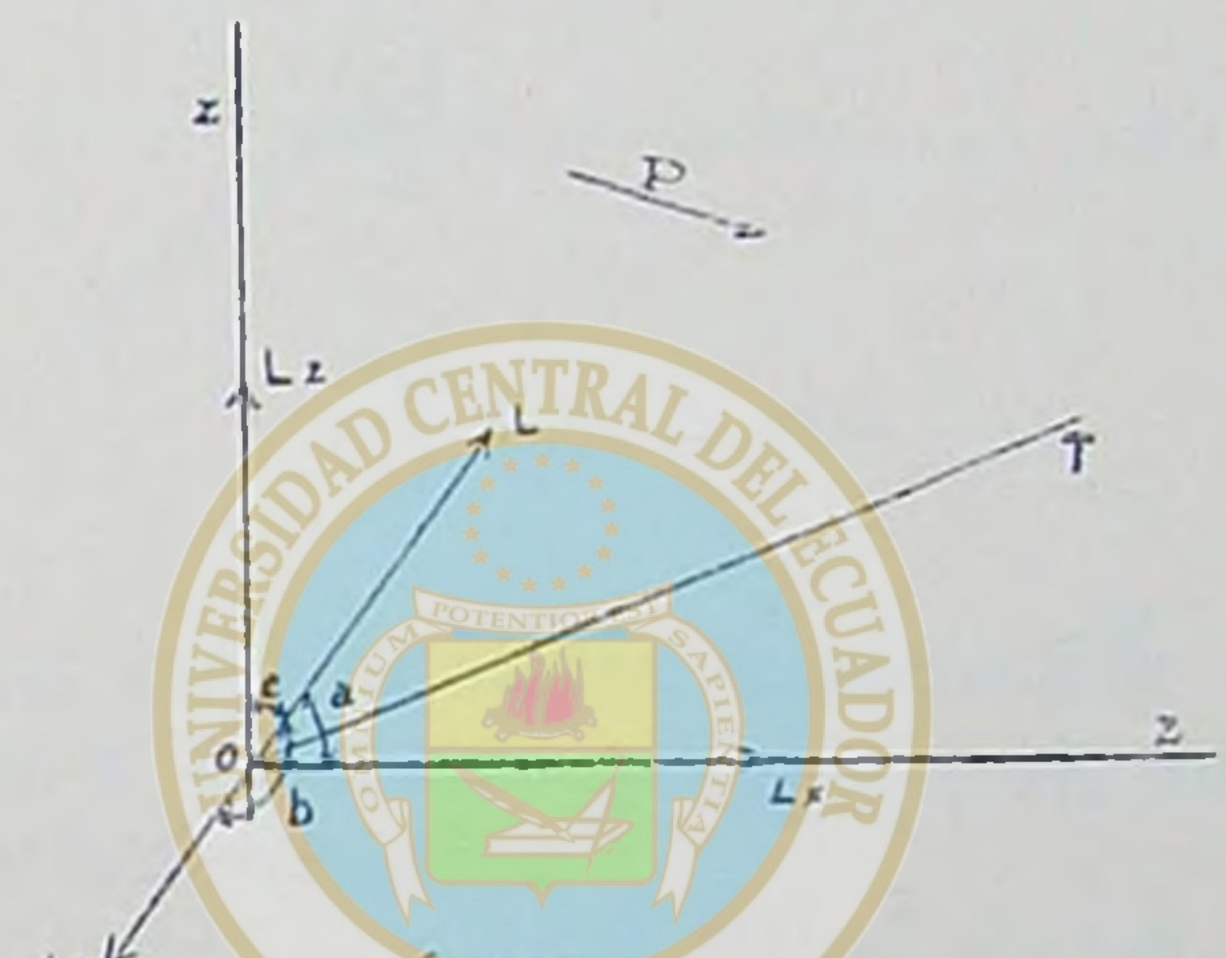


fig. 33

Ya hemos visto que el momento de un vector con relación a un eje es la proyección sobre dicho eje, del momento lineal con relación a un punto del eje.

En la (figura 33) tenemos O origen de los ejes, y por tanto, punto común de todos ellos. Si consideramos el vector $\overline{\mathrm{P}}$, el momento con relación al punto O estará representado por medio de un vector $\overline{OL}$; si proyectamos $\overline{OL}$ sobre cada uno de los ejes coordenados. encontraremos los momentos con relación a dichos ejes, es decir: si Lx, Ly, Lz son las proyecciones de $\overline{\mathrm{L}}$, resulta que:

$$\mathrm{L}x = \mathrm{M}ox\mathrm{P} = y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}$$
$$\mathrm{L}y = \mathrm{M}oy\mathrm{P} = z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}$$
$$\mathrm{L}z = \mathrm{M}oz\mathrm{P} = x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}$$

es decir, las expresiones encontradas anteriormente.

Conocemos Lx, Ly, Lz, que son las componentes de $\overline{L}$ según tres ejes coordenados rectangulares, luego, conocemos $\overline{L}$.

$$L = \sqrt{Lx^2 + Ly^2 + Lz^2} \text{ (en magnitud)}$$

Si llamamos a, b, c los ángulos que forma L con los ejes coordenados, tendremos sus valores por

$$\cos a = \frac{Lx}{L}$$

$$\cos b = \frac{Ly}{L}$$

$$\cos c = \frac{Lz}{L}$$

que nos dan la dirección y sentido deduciendo de $Lx = L \cos a$

$$Ly = L \cos b$$

$$Lz = L \cos c$$

Momento con relación a un eje oT que pasa por el origen de las coordenadas

Sea OT el eje, definido por medio de los ángulos α, β, γ con los ejes coordenados. El momento del vector $\overline{P}$ con relación al eje, es la proyección sobre este eje de $\overline{OL}$ puesto que O es punto del eje $\overline{OT}$. Para proyectar el vector $\overline{OL}$ sobre $\overline{OT}$, podemos proyectar sus componente Lx, Ly, Lz; la suma algébrica de estas proyecciones, es la proyección buscada; por tanto:

$$Mo_TP = Lx \cos \alpha + Ly \cos \beta + Lz \cos \gamma$$

esta expresión se puede también poner bajo otra forma, en función de L; basta reemplazar los valores de Lx, Ly, Lz.

Entonces

$$Mo_TP = L\,(\cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma).$$

Determinación analítica de la suma geométrica y del momento resultante de un sistema de vectores, con relación al punto O, origen de los ejes coordenados

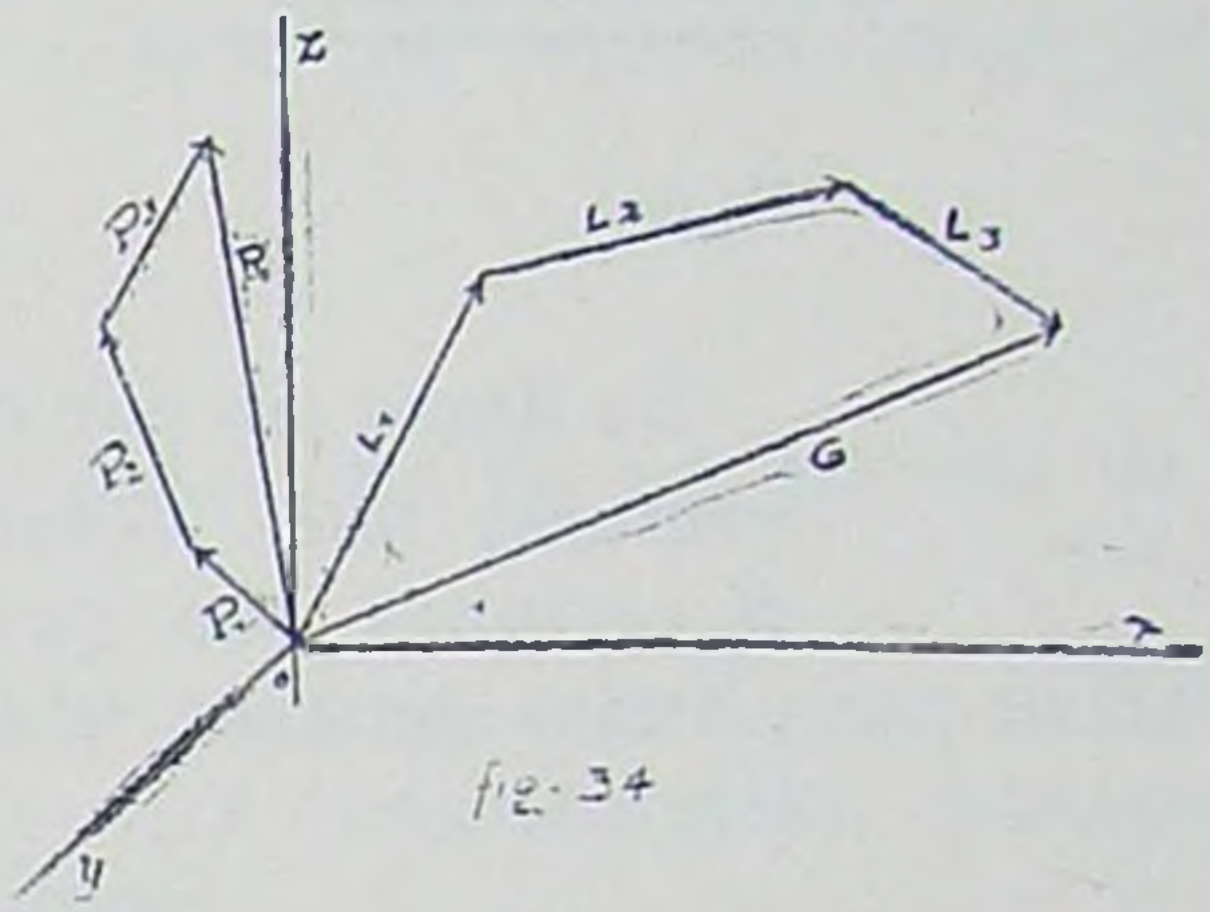


fig. 34

Consideremos un sistema de vectores $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$, $\overline{P_3}$...... etc, aplicados en puntos diferentes (en general) *del espacio;* sean *ox*, *oy*, *oz* los ejes coordenados.

Si consideramos el punto *o*, podemos trasladar a él, todos los vectores para obtener la suma geométrica de traslación $\overline{R} = \Sigma\overline{P}$, pero analíticamente $\overline{R}$ será dada por sus componentes Rx, Ry, Rz que no son otra cosa que las sumas algébricas de las proyecciones de los vectores sobre cada uno de los ejes.

$$Rx = X_1 + X_2 + X_3 = \Sigma X$$

$$Ry = Y_1 + Y_2 + Y_3 = \Sigma Y$$

$$Rz = Z_1 + Z_2 + Z_3 = \Sigma Z$$

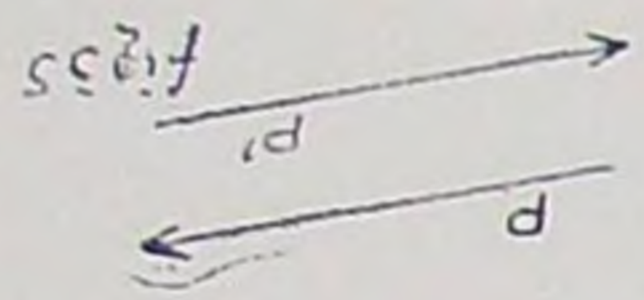
Así mismo, si con relación al punto *O*, tomamos los momentos de cada uno de los vectores, en el punto *O* serán representados por otros vectores $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$, $\overline{L_3}$ que a su vez se suman geométricamente para obtener

$$\overline{G} = \overline{L_1} + \overline{L_2} + \overline{L_3} = \text{Momento resultante;}$$

pero, los vectores $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$, $\overline{L_3}$ son dados analíticamente por medio de las proyecciones (Lx, Ly, Lz) sobre los ejes coordenados, luego:

$$Gx = L_1x + L_2x + L_3x = \Sigma(yZ - zY)$$
$$Gy = L_1y + L_2y + L_3y = \Sigma(zX - xZ)$$
$$Gz = L_1z + L_2z + L_3z = \Sigma(xY - yX)$$

Pares



Se llama un par de vectores, a dos vectores tales como $\overline{P}$ y $\overline{P'}$ cuyas direcciones son paralelas, sus magnitudes iguales y sus sentidos contrarios.

Brazo de palanca, del par de vectores, es la distancia δ de sus direcciones.

Teorema

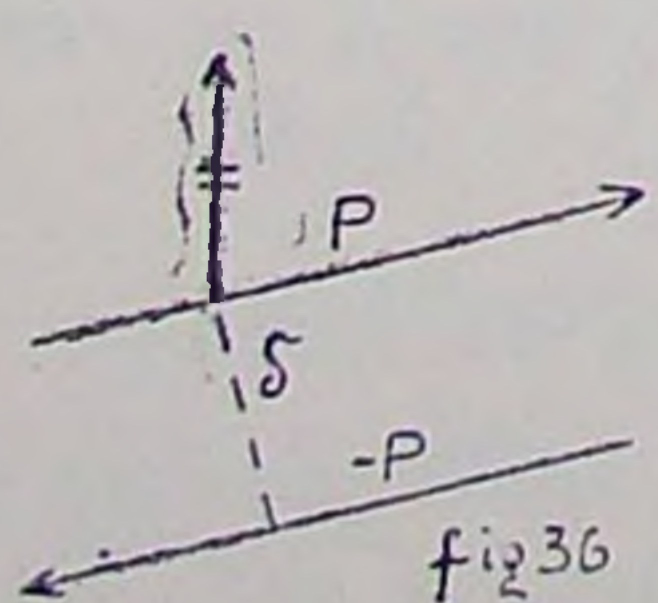
El momento resultante de un sistema vectorial, cuya suma geométrica es nula, es constante, cualquiera que sea el punto centro de momentos.

En efecto sean O y O_1 dos centros de momentos; los momentos resultantes están ligados por

$$\overline{G_1} = \overline{G} + \overline{Mo_1Ro},$$

pero si Ro = O el momento con relación a cualquier punto es nulo y $G_1 = G$, es decir, constante.

Eje representativo de un par



El momento resultante dé un par es el producto $P \times \delta$, pues siendo el momento constante, podemos tomarlo con relación a un punto en uno de los vectores. El momento de este vector será nulo y el momento resultante será el del otro vector, es decir, $P \times \delta$.

De acuerdo con lo convenido para la representación del momento del par, que lo es del vector $\overline{P}$, este momento estará representado por el vector $\overline{ON}$ perpendicular al plano del par y cuyo valor hemos visto ya. El sentido será también el convencional. El vector $\overline{ON}$, así definido, se llama *eje del par* y siendo constante, es el eje representativo del par.

Teorema

El momento resultante de un sistema de *Pares*, es constante.

En efecto, cada par tiene suma geométrica nula y la suma de todos los pares será también nula, por tanto, el momento resultante es constante.

Suma geométrica nula y momento resultante nulo

Si consideramos un punto *O*, siendo la suma geométrica nula para este punto de reducción, lo será para todo otro punto.

Siendo nula la suma, el momento es constante y como ya es nulo para un punto, lo será para todo otro centro de reducción del espacio.

Así mismo, si la suma geométrica es nula y el momento resultante nulo para cualquier punto del espacio, será también nulo el momento con relación a cualquier eje del espacio.

Lo anterior se traducirá por

$$\overline{R} = \Sigma\overline{P} = o \qquad y \qquad \overline{G} = \Sigma Mo\overline{P} = o$$

y analíticamente:

$$\begin{array}{ccc} \overline{R}x = o & & \overline{G}x = o \\ \overline{R}y = o & \text{con} & \overline{G}y = o \\ \overline{R}z = o & & \overline{G}z = o \end{array}$$

Equivalencia de vectores

Dos sistemas de vectores son equivalentes cuando, tomando en cuenta cualquier punto del espacio como centro de reducción, la suma geométrica de los vectores que componen el sistema, así como el momento resultante son iguales.

Si un sistema se compone de los vectores

$$\overline{P_1},\ \overline{P_2},\ \overline{P_3} \ldots\ldots \overline{Pn}$$

y el otro de los vectores

$$\overline{P_1'},\ \overline{P_2'} \ldots\ldots\ldots \overline{P'm}$$

la equivalencia se la traduce por:

$$\overline{R} = \overline{R'} \quad \text{y} \quad \overline{G} = \overline{G'}$$

Basándose en el principio de equipolencia así definido, es fácil comprobar que dos vectores equipolentes aplicados en dos puntos diferentes de una misma recta, constituyen dos sistemas equivalentes y esto se traduce diciendo que el punto de aplicación de un vector puede ser trasladado a un punto cualquiera de su dirección.

Además, un par vectorial, siendo representado por su eje, otro par que tenga como eje un vector equipolente, constituirá un sistema equivolente al anterior: para los dos la suma geométrica es nula y el momento resultante es el mismo.

La equivalencia de sistemas, analiticamente

Los dos sistemas de vectores referidos a ejes coordenados, darán como expresión de equivalencia las siguientes ecuaciones:

$$\overline{\Sigma X} = \overline{\Sigma X'} \quad \text{o sea} \quad \overline{Rx} = \overline{R'x}$$

$$\overline{\Sigma Y} = \overline{\Sigma Y'} \qquad\qquad \overline{Ry} = \overline{R'y}$$

$$\overline{\Sigma Z} = \overline{\Sigma Z'} \qquad\qquad \overline{Rx} = \overline{R'z}$$

además en cuanto a los momentos con relación a los ejes coordenados:

$$\Sigma(yZ - zY) = \Sigma(y'Z' - z'Y') \text{ o sea } \overline{Gx} = \overline{G'x}$$

$$\Sigma(zX - xZ) = \Sigma(z'X' - x'Z') \text{ o sea } \overline{Gy} = \overline{G'y}$$

$$\Sigma(xY - yX) = \Sigma(x'Y' - y'X') \text{ o sea } \overline{Gz} = \overline{G'z}$$

lo que equivale también a decir que el momento resultante con relación al origen de los ejes coordenados es igual.

Teorema

Cuando dos sistemas de vectores tienen la suma geométrica y el momento resultante igual para un centro de reducción, lo tienen también para cualquier otro centro y por tanto son equivalentes.

En efecto, supongamos que los sistemas

$$\overline{\Sigma P} = \overline{\Sigma P'} \text{ junto con } \overline{G} = \overline{G'}$$

lo realicen para un centro de reducción O; vamos a probar que lo realizarán para cualquier otro centro O_1.

En efecto, cualquiera que sea el punto del espacio, el polígono de vectores no varía y, si la suma geométrica es igual en un punto, lo será en cualquier otro, es decir $\overline{R} = \overline{R'}$ implica $\overline{Ro} = \overline{R'o}$ y $\overline{Ro_1} = \overline{Ro_1'}$, etc.

Los momentos de cada uno de los sistemas con relación a dos puntos diferentes O y O_1 están ligados por las ecuaciones:

$$\overline{G_1} = \overline{G} + \overline{Mo_1 Ro} \text{ para el un sistema}$$

$$\text{y } \overline{G_1'} = \overline{G'} + \overline{Mo_1 Ro'} \text{ para el otro.}$$

$\overline{Mo_1 Ro}$ y $\overline{Mo_1 Ro'}$ son iguales puesto que $\overline{Ro} = \overline{Ro'}$ y como por hipótesis $\overline{G} = \overline{G'}$, se deduce que cualquiera que sea el punto O_1 del espacio.

$$\overline{G_1} = \overline{G_1'}$$

Teorema

Si dos sistemas vectoriales son equivalentes, los momentos resultantes con relación a cualquier eje, son iguales.

En efecto, si son equivalentes tienen momento resultante igual con relación a un punto del eje; proyectando estos momentos sobre el eje, las proyecciones serán iguales.

Descomposición de vectores

De diferentes maneras se puede descomponer un vector, es decir encontrar un sistema que le sea equivalente:

a) En dos vectores que se encuentran en su mismo plano;

b) En tres vectores que no están en el plano del vector.

Estas dos descomposiciones son perfectamente definidas, es decir admiten una sola solución.

c) Para descomponer en mayor número de direcciones, el problema es indeterminado.

Fig 27

En la figura 27 vemos el vector $\overline{OR}$ descompuesto según las direcciones *ox* y *oy*, en dos vectores $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$.

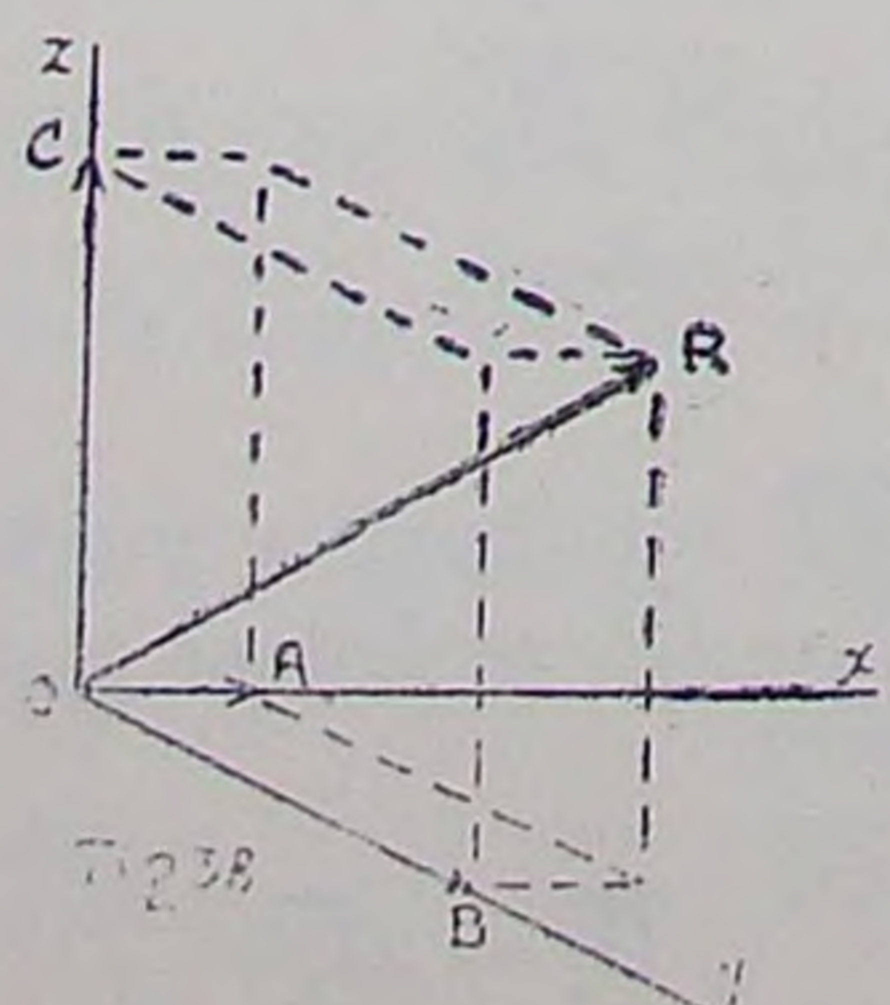


Fig 28

Los dos vectores forman un sistema equivalente al formado por el vector $\overline{OR}$.

La descomposición es posible cuando las direcciones *ox* y *oy* están en un mismo plano o en planos paralelos al vector $\overline{P}$. La descomposición se hace mediante el paralelogramo cuya diagonal es $\overline{OR}$.

En la figura 38, vemos tres direcciones *ox*, *oy*, *oz* según las cuales el vector $\overline{OR}$ se descompone, mediante la construcción del paralelepípedo, dando tres vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ que forman un sistema equivalente al formado por el vector $\overline{OR}$.

En cualquiera de estos casos es fácil ver que la condición de equivalencia se cumple siempre que cualquiera de los sistemas tengan los vectores aplicados en *O*.

Reducción de vectores

Se llama reducción de un sistema de vectores, la operación mediante la cual se encuentra el sistema más simple, que le sea equivalente.

Es evidente que el sistema más simple estaría representado por un vector único y luego por un par de vectores.

Cuando de la reducción de vectores se deduce un vector único, este vector constituye o se llama la resultante del sistema.

Teorema

Un vector $\overline{P}$ puede ser trasladado equipolentemente a cualquier punto A del espacio, añadiéndole un par cuyo valor es igual al momento de $\overline{P}$ con relación a A.

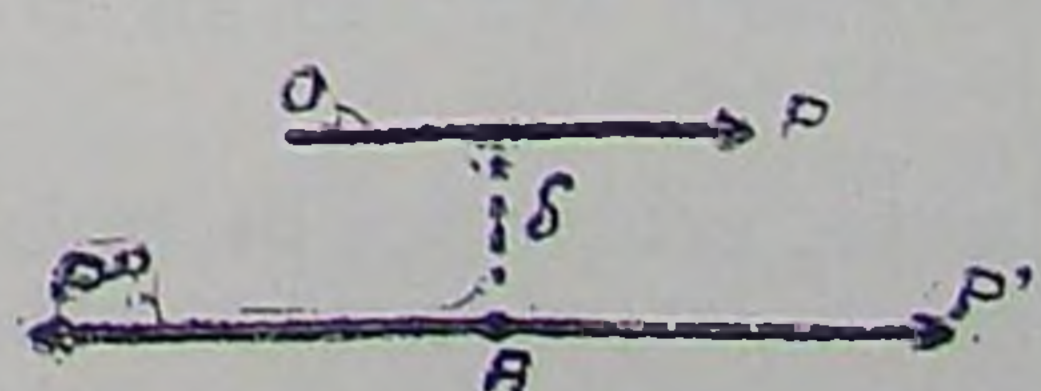


Fig 39

En el punto *O* tenemos un vector $\overline{OP}$ que lo trasladamos equipolentemente al punto A, según $\overline{AP'}$; en A tenemos un vector representativo del momento de $\overline{P}$ con relación a A y cuyo valor es $P \times \delta$. Pero este momento es el representativo del par del mismo valor formado por los vectores $\overline{OP}$ y AP" iguales en magnitud, sobre direcciones paralelas y de sentidos contrarios.

Para probar que los sistemas son equivalentes: 1°. La suma geométrica es la misma e igual al vector $\overline{P}$; 2°. El momento resultante debe ser igual con relación a cualquier punto: tomemos A como centro; para el un sistema formado por el vector único $\overline{OP}$, el momento es $P \times \delta$; para el otro sistema formado del vector AP' y del par, el momento es el del par $P \times \delta$, puesto que el momento de $\overline{AP'}$ es nulo.

Observación

A un sistema cualquiera de vectores se puede añadir o quitar dos vectores iguales de misma dirección y de sentidos contrarios, es decir, dos vectores iguales y opuestos, sin alterar el sistema, puesto que se obtiene un sistema equivalente. En efecto la suma geométrica de los dos vectores es nula y los momentos de los dos vectores con relación a cualquier punto del espacio, serán siempre iguales y de sentidos contrarios, es decir se anulan entre ellos y por tanto no pueden alterar el momento resultante.

Teorema

Un sistema de vectores concurrentes puede ser reemplazado por el vector resultante aplicado en el punto de concurrencia.

En efecto: la suma geométrica de ambos sistemas es la resultante y en cuanto a los momentos sabemos que, el momento resultante de las componentes es igual al momento de la resultante.

Teorema

Un sistema compuesto por pares de vectores, puede ser sustituído por otro compuesto de un solo par cuyo eje, es la suma geométrica de los ejes componentes.

En efecto todos los pares tienen suma geométrica nula, luego las sumas geométricas son iguales.

Los ejes de los pares son constantes e iguales a los momentos de cada par con relación a un punto cualquiera del espacio, luego si en un punto dado formamos el momento resultante, su eje representará un par que es precisamente el buscado.

Observaciones

Cuando se trata de dos o tres pares, el par resultante se obtendrá mediante el paralelogramo o el paralelepípedo formados con los ejes y de los cuales la diagonal respectiva será el eje resultante del par.

Un sistema cualquiera de vectores puede reducirse a un solo vector aplicado en el centro de reducción y a un par.

En efecto, sea A el punto escogido como centro de reducción.

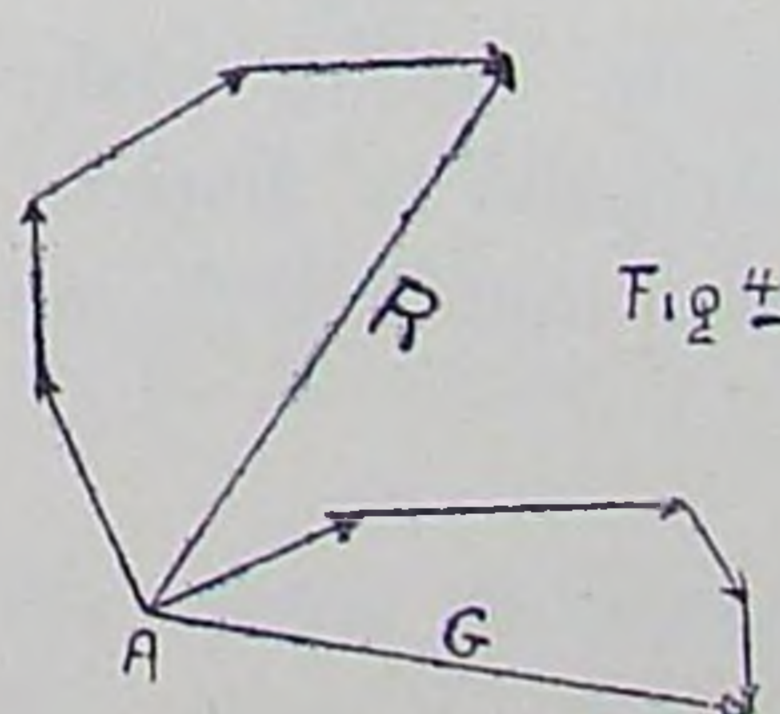
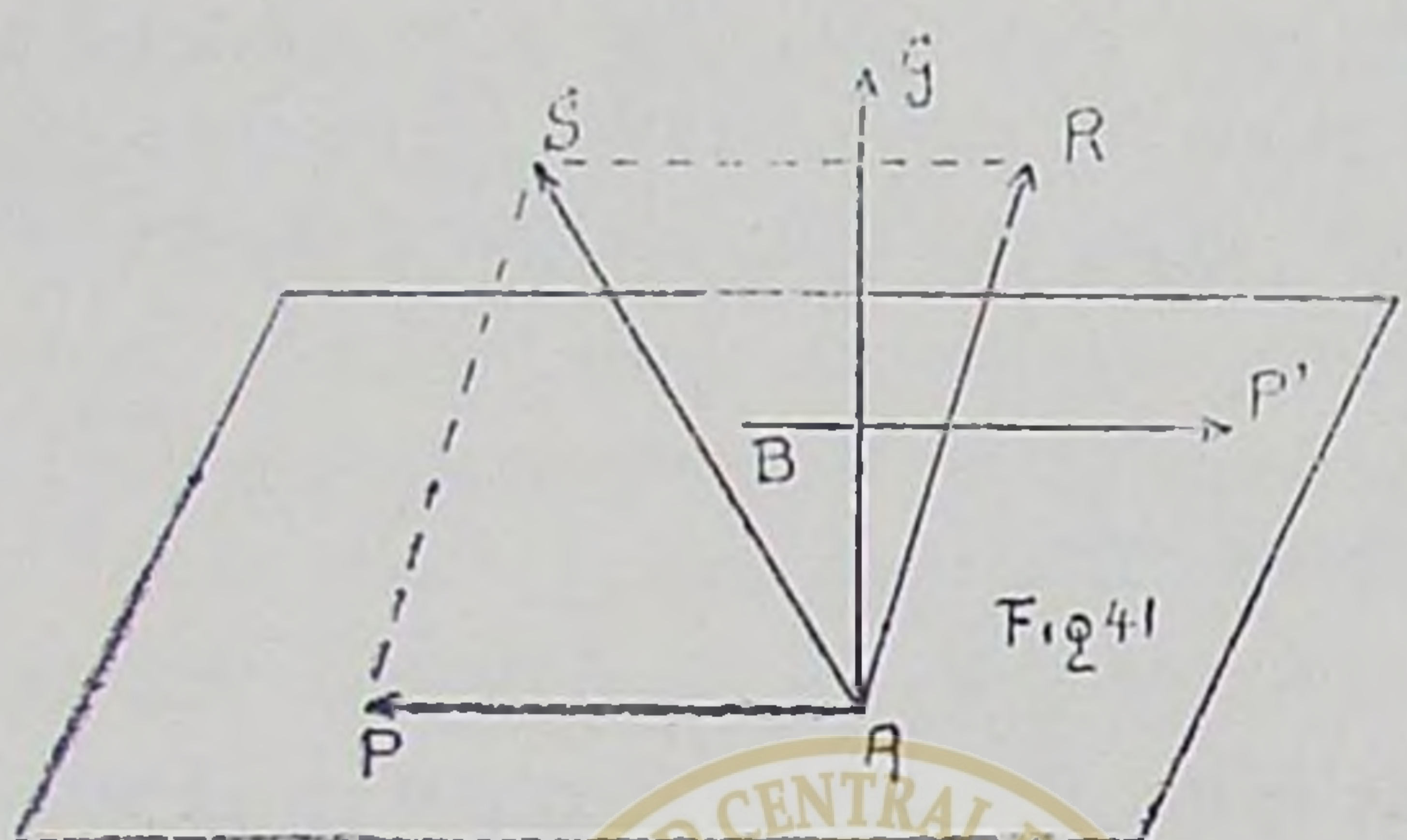


Fig 40

Cualquiera que sean los puntos de aplicación de los vectores que forman el sistema, cada uno de los vectores podemos trasladarlo equipolentemente al punto A añadiendo a cada uno un par cuyo eje sea el momento del vector con relación al punto A. Los vectores son ahora concurrentes en A y $\overline{R}$ los reemplaza en el sistema; los ejes de pares se suman para encontrar el par resultante $\overline{G}$ que los sustituye. Tenemos pues, en difinitiva, en el punto centro de reducción, un vector $\overline{R}$ igual a la suma geométrica de vectores y un par de eje $\overline{G}$, que no es otro que el momento resultante del sistema con relación al centro de reducción.

Teorema

Un sistema de vectores puede, en general reducirse a dos vectores de los cuales el uno pasa por el centro de reducción.



Acabamos de ver, como, un sistema cualquiera puede reducirse a un vector $\overline{R}$ aplicado en el centro de reducción A y a un par de eje $\overline{AG}$. El par $\overline{AG}$ en el plano perpendicular al eje, puede constituirse por sus vectores $\overline{AP}$ y $\overline{BP'}$; pero los vectores $\overline{AR}$ y $\overline{AP}$ concurrentes, pueden ser reemplazados por un vector $\overline{AS}$ aplicado en el centro de reducción $\overline{A}$ y el sistema se completa con otro vector $\overline{BP'}$.

Observaciones

En general $\overline{AS}$ y $\overline{BP'}$ no están en un mismo plano; siendo $\overline{AP}$ arbitrario y dependiendo de su valor la distancia de $\overline{BP'}$ al centro de reducción; hay pues una infinidad de maneras para efectuar la reducción.

Observaciones

(a) $\overline{R} \neq 0$

$\overline{G} = 0$

El sistema se reduce a un solo vector igual a la suma geométrica de vectores y aplicado en el centro de reducción.

$$(b) \qquad \overline{R} = O$$
$$\overline{G} \neq O$$

La suma geométrica siendo nula, el momento es constante y el sistema se reduce a un par de eje $\overline{G}$.

Casos particulares

$\overline{R}$ y $\overline{G}$ son perpendiculares entre ellos.

Cuando la suma geométrica y el momento resultante son perpendiculares, el sistema se reduce a un vector equipolente a la suma geométrica y aplicado fuera del centro de reducción.

Fig 42

En efecto; sean $\overline{OR}$ y $\overline{OG}$ los vectores de la reducción en el punto *o;* en un plano $\overline{Q}$ perpendicular a $\overline{OG}$ y conteniendo $\overline{OR}$, tracemos los dos vectores $-\overline{R}$ y $\overline{R'}$ que forman el par y a una distancia $OA = \delta$ de tal manera que $\overline{G} = R \times \delta$. Los vectores $-\overline{R}$ y $\overline{R}$ se destruyen y queda únicamente el vector $\overline{R'}$ colocado en A, según la enunciación del teorema.

Eje central de momentos

Se llama eje central de momentos a la recta, lugar geométricos de puntos para los cuales el momento del sistema es minimun.

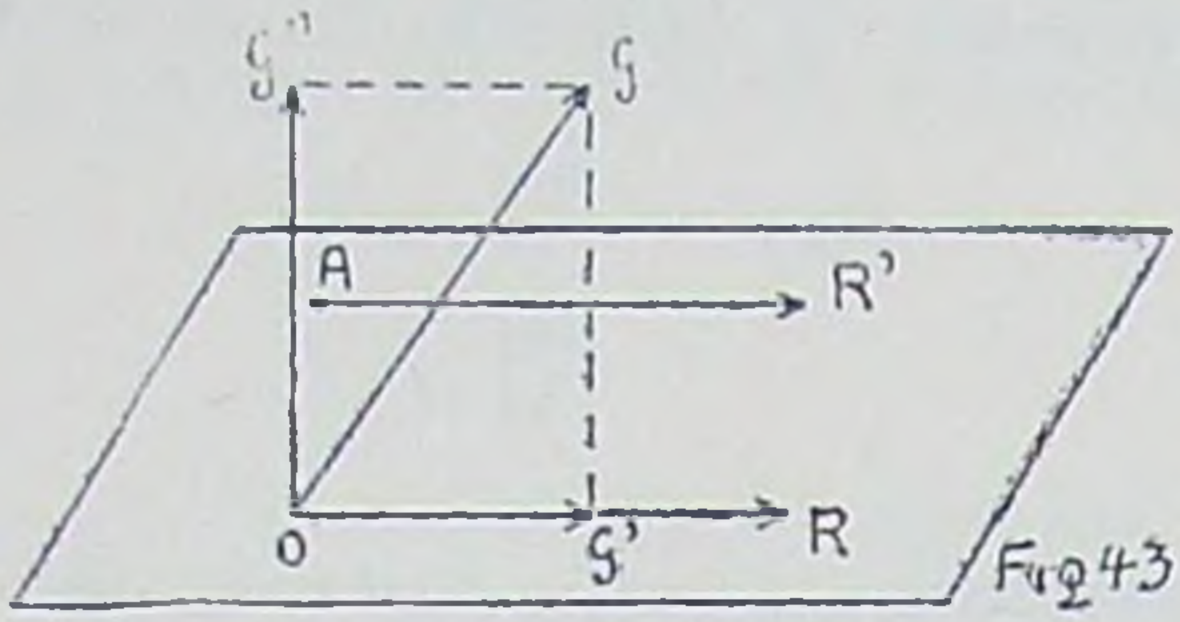


Fig 43

Para encontrar esta recta supongamos el sistema reducido a los vectores $\overline{OR}$ y $\overline{OG}$ en el centro de reducción O. Tracemos por O un plano perpendicular al formado por $\overline{OR}$ y $\overline{OG}$; en este plano tracemos OG'' perpendicular a OR y descompongamos $\overline{OG}$ en sus componentes $\overline{OG'}$ y $\overline{OG''}$. $\overline{OG''}$ y $\overline{OR}$ siendo perpendiculares, pueden reducirse a un vector $\overline{AR'}$ equipolente a $\overline{OR}$. El sistema se reduce a un vector $\overline{AR'}$ y a un par de eje $\overline{OG'}$, ambos paralelos, reducción que se enuncia así: «entre todos los sistemas equivalentes de vectores, hay uno para el cual, la suma geométrica y el momento resultante son paralelos.

Ahora bien: si tomamos el momento resultante del sistema con relación a cualquier punto de $\overline{AR}$, es fácil ver que este momento es igual a $\overline{OG'}$. El momento con relación a otro punto del espacio será mayor que $\overline{OG'}$, puesto que será la diagonal de un paralelogramo rectángulo, uno de cuyos lados es $\overline{OG'}$. Por tanto $\overline{AR}$ es la dirección o sea el eje central de momentos o sea también el eje de momento mínimo.

Sistema nulo

Se dice que un sistema de vectores es nulo o equivalente a cero, cuando la suma geométrica y el momento resultante son iguales a cero, para un punto del espacio.

Si le son para un punto, lo serán para todo punto del espacio. Además, si el momento resultante es nulo para cualquier punto del espacio, lo será para cualquier recta del espacio.

Las ecuaciones que, analíticamente definen un sistema nulo son:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma X = O\\ \Sigma Y = O\\ \Sigma Z = O\end{array}\right\} \text{con} \left\{\begin{array}{l}\Sigma(yZ - zY) = O\\ \Sigma(zX - xZ) = O\\ \Sigma(xY - yX) = O\end{array}\right.$$

Teorema

Si tenemos dos sistemas de vectores, el conjunto de ellos será nulo, si el uno es equivalente a un tercero formado de vectores iguales y de sentido contrario a los del otro.

En efecto

$$\overline{S_1} = (\overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{P_3} + \overline{Pn}) \quad \text{primer sistema}$$

$$\overline{S_2} = (\overline{P'} + P'' + P'' + P''') \quad \text{segundo sistema}$$

$$\overline{S_3} = (-\overline{P_1} - \overline{P_2} - \overline{P_3} - Pn) \quad \text{tercer sistema}$$

Si el primer sistema tiene $\overline{S_1}$ y $\overline{G_1}$ como resultante de traslación y momento resultante con relación a un punto *O*, el tercer sistema tendrá evidentemente $-\overline{S_1}$ y $-\overline{G_1}$ como valores equivalentes. Si el segundo sistema no fuera equivalente al tercero, tendría resultante y momento diferente de $-\overline{S_1}$ y $-\overline{G_1}$ y por tanto no formaría sistema nulo con $\overline{S_1}$ y $\overline{G_1}$.

La condición es suficiente pues siempre

$$S_1 + (-S_1) = O \text{ y } G_1 + (-G_1) = O$$

para cualquier punto del espacio.

De lo anteriormente expuesto se deduce:

a) Un sistema compuesto de dos vectores es equivalente a cero, cuando los dos vectores son iguales, de sentido contrario y dirigidos según la misma recta.

b) Un sistema de tres vectores de direcciones concurrentes es igual a cero, cuando cualquiera de los vectores es igual y directamente opuesto a la resultante de los otros dos. Los tres vectores deben estar en un mismo plano.

c) Un sistema compuesto de un vector y un par, no puede ser nulo.

d) Un sistema compuesto de dos pares es nulo, si los ejes son paralelos, las magnitudes iguales y dirigidas en sentidos contrarios.

Vectores en un mismo plano

En general, un sistema de vectores que se encuentran en un mismo plano, se reduce un solo vector que pasa fuera del centro de reducción y que es equivalente a la suma geométrica.

En efecto, si tomamos como centro de reducción un punto *O* del plano, el polígono de vectores será plano y la suma geométrica estará incluida en aquél. El punto estando en el plano, el eje de los momentos para cada uno de los vectores siendo perpendicular al plano, será una dirección común perpendicular al plano y pasando por *O;* el momento resultante es la suma algébrica de los momentos parciales y será de misma dirección que la de aquéllos: será, pues, perpendicular al plano y a la suma geométrica. Este caso se reduce a un vector único que pasa fuera del centro de reducción y es equipolente a la suma geométrica de traslación.

Analíticamente

Las seis ecuaciones de la reducción son:

$$\left.\begin{aligned} Rx &= \Sigma X; \\ Ry &= \Sigma Y; \\ Rz &= \Sigma Z; \end{aligned}\right\} \text{ con } \left\{\begin{aligned} Gx &= \Sigma(yZ - zY) \\ Gy &= \Sigma(zX - xZ) \\ Gz &= \Sigma(xY - yX) \end{aligned}\right.$$

Si tomamos el plano de xoy por plano de los vectores, las coordenadas z y las componentes Z son nulas y por tanto introduciendo estas condiciones en las ecuaciones, tendremos las que subsisten con un valor, en general.

$$\left.\begin{aligned} Rx &= \Sigma X \\ Ry &= \Sigma Y \end{aligned}\right\} \text{ con } Gz = \Sigma(xY - yX')$$

Si Rx y Ry son las componentes de un vector, quiere decir que el vector se encuentra en el plano xoy; si la componente del momento resultante es sólo $\overline{Gz}$, el momento resultante tiene la dirección de OZ, por tanto es perpendicular al plano xoy.

Las condiciones para que el sistema de vectores colocados en un plano sea nula son

$$Rx = O; \; Ry = O; \; \Sigma(xY - yX) = O$$

Vectores paralelos

Los vectores paralelos que forman un sistema, se componen o reducen, en general, a un solo vector equipolente a la suma *algébrica* y que pasa fuera del centro de reducción.

En efecto, para formar la suma geométrica, los vectores deben ser colocados uno a continuación del otro, desde el centro de momentos. Como son paralelos, todos los vectores coincidirán con la misma dirección común paralela a ellos y la suma geométrica se convertirá en suma algébrica, siendo la resultante un vector paralelo a todos, es decir, de la misma dirección común.

En cuanto a los momentos, cada uno está representado por un vector perpendicular al plano formado por el centro de momento y el vector respectivo, como la suma geométrica es paralela al vector, el vector momento será perpendicular a esta suma geométrica. Para cualquiera otro vector sucederá lo mismo, es decir, el vector momento será perpendicular a la suma geométrica; si todos los momentos son perpendiculares a la suma geométrica, están en un plano perpendicular a la misma, el que contendrá el momento resultante que será, por tanto, perpendicular a la suma geométrica. Caso ya analizado en que el sistema se reduce a un solo vector equipolente a la suma geométrica y que pasa fuera del centro de reducción.

Analíticamente

Sean los vectores $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$, $\overline{Pn}$ de mismo sentido y los vectores $\overline{P'_1}$, $\overline{P'_2}$, $\overline{P'm}$ de sentido contrario.

Si α, β, γ son los ángulos que los vectores P forman con los ejes coordenados, $(\alpha + 180^\circ)$, $(\beta + 180^\circ)$, $(\gamma + 180^\circ)$ serán los ángulos que los vectores P' forman con los ejes mencionados.

Los vectores P tendrán como componentes $\begin{cases} X_1 = P_1 \cos\alpha \\ Y_1 = P_1 \cos\beta \\ Z_1 = P_1 \cos\gamma \end{cases}$

Los vectores P' tendrán como componentes

$$X_1' = P_1' \cos(\alpha + 180) = P_1' x(-\cos\alpha) = -P_1' \cos\alpha$$

$$Y_1' = P_1' \cos(\beta + 180) = P_1'.(-\cos\beta) = -P_1' \cos\beta$$

$$Z_1' = P_1' \cos(\gamma + 180) = P_1'.(-\cos\gamma) = -P_1' \cos\gamma$$

Por lo tanto, las componentes de R o sea X, Y, Z se obtendrán mediante ΣX, ΣY, ΣZ, para obtener las cuales se multiplicarán los $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, por cada uno de los vectores tomando en cuenta sus signos, es decir $\overline{P}$ positivo y $\overline{P'}$ negativo y las expresiones de las componentes de $\overline{R}$ serán:

$$Rx = X = \Sigma X_1 = \Sigma P_1 \cos\alpha - \Sigma P_1' \cos\alpha$$
$$= \cos\alpha(\Sigma P_1 - \Sigma P_1') = \cos\alpha \Sigma P$$

$$Ry = Y = \Sigma Y_1 = \Sigma P_1 \cos\beta - \Sigma P_1' \cos\beta$$
$$= \cos\beta(\Sigma P_1 - \Sigma P_1') = \cos\beta \Sigma P$$

$$Rz = Z = \Sigma Z_1 = \Sigma P_1 \cos\gamma - \Sigma P_1' \cos\gamma$$
$$= \cos\gamma(\Sigma P_1 - \Sigma P_1') = \cos\gamma \Sigma P$$

La suma geométrica

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$
$$= \sqrt{\cos^2\alpha\,(\Sigma P)^2 + \cos^2\beta\,(\Sigma P)^2 + \cos^2\gamma\,(\Sigma P)^2}$$
$$= \sqrt{(\Sigma P)^2\,(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)}$$

como: $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \;;$$

$$R = \sqrt{(\Sigma P)^2} = \Sigma P$$

es decir la suma geométrica tiene como magnitud, la suma algébrica de los vectores componentes.

Los ángulos *a, b, c,* que forma R con sus componentes según los ejes coordenados están dados por las fórmulas

$$\cos a = \frac{X}{R} = \frac{\cos\alpha\ \Sigma P}{\Sigma P} = \cos\alpha$$

$$\cos b = \frac{Y}{R} = \frac{\cos\beta\ \Sigma P}{\Sigma P} = \cos\beta$$

$$\cos c = \frac{Z}{R} = \frac{\cos\gamma\ \Sigma P}{\Sigma P} = \cos\gamma$$

de donde se deduce que los ángulos de la Resultante son los mismos que los de la dirección común de los vectores paralelos.

Momento resultante

Busquemos las expresiones Gx, Gy, Gz, aplicando las fórmulas generales:

$$\begin{aligned} Gx &= \Sigma(yZ - zY) \\ &= \Sigma yZ - \Sigma zY \\ &= \Sigma y\, P\cos\gamma - \Sigma z P\cos\beta \\ &= \cos\gamma \Sigma yP - \cos\beta \Sigma zP \end{aligned}$$

$$Gy = \cos\alpha \Sigma zP - \cos\gamma \Sigma xP$$

$$Gz = \cos\beta \Sigma xP - \cos\alpha \Sigma yP$$

Si aplicamos la expresión del producto de dos vectores, tendremos, siendo Θ el angulo que forman la suma geométrica y el momento resultante,

$$R.\ G.\ \cos\Theta = RxGx + RyGy + RzGz.$$

$$RxGx = \cos\alpha\Sigma P\ [\cos\gamma\Sigma yP - \cos\beta\Sigma zP] \quad \text{o bien}$$

$$RxGx = \cos\alpha\cos\gamma\Sigma P\Sigma yP - \cos\alpha\cos\beta\Sigma P\Sigma zP$$

$$RyGy = \cos\beta\cos\alpha\Sigma P\Sigma zP - \cos\beta\cos\gamma\Sigma P\Sigma xP$$

$$RzGz = \cos\gamma\cos\beta\Sigma P\Sigma xP - \cos\gamma\cos\alpha\Sigma P\Sigma yP$$

sumando miembro

$$RxGx + RyGy + RzGz = O$$

es decir:

$$R.\ G.\ \cos\Theta = O$$

como, de manera general

$$G \neq O \text{ y } R \neq O$$

tendremos que

$$\cos\Theta = \Theta;\ \text{es decir}\ \Theta = 90^{\circ}$$

o sea, analíticamente encontramos que el angulo formado por la suma geométrica y el momento resultante, es recto; los dos vectores son perpendiculares y por tanto, el sistema se reduce, en general, a un solo vector que pasa fuera del centro de reducción y que es equipolente a la suma geométrica de traslación.

Casos particulares

$$R \neq O \text{ y } G = O$$

el sistema se reduce a un vector igual a la suma algébrica y pasando por el centro de reducción;

$$R = O \text{ con } G \neq O$$

el sistema se reduce a un par de eje perpendicular a la dicción común de los vectores paralelos.

Sistema nulo

Cuando $R = O$ y $G = O$ o sea un sistema nulo, las ecuaciones son

$$R_x = \cos\alpha \Sigma P = O \text{ o sea } \Sigma P = O$$

para cualquiera de los componentes.

de $$G_x = G_y = G_z = O$$

se saca $$\frac{\Sigma\, xP}{\cos\alpha} = \frac{\Sigma\, yP}{\cos\beta} = \frac{\Sigma\, zP}{\cos\gamma}$$

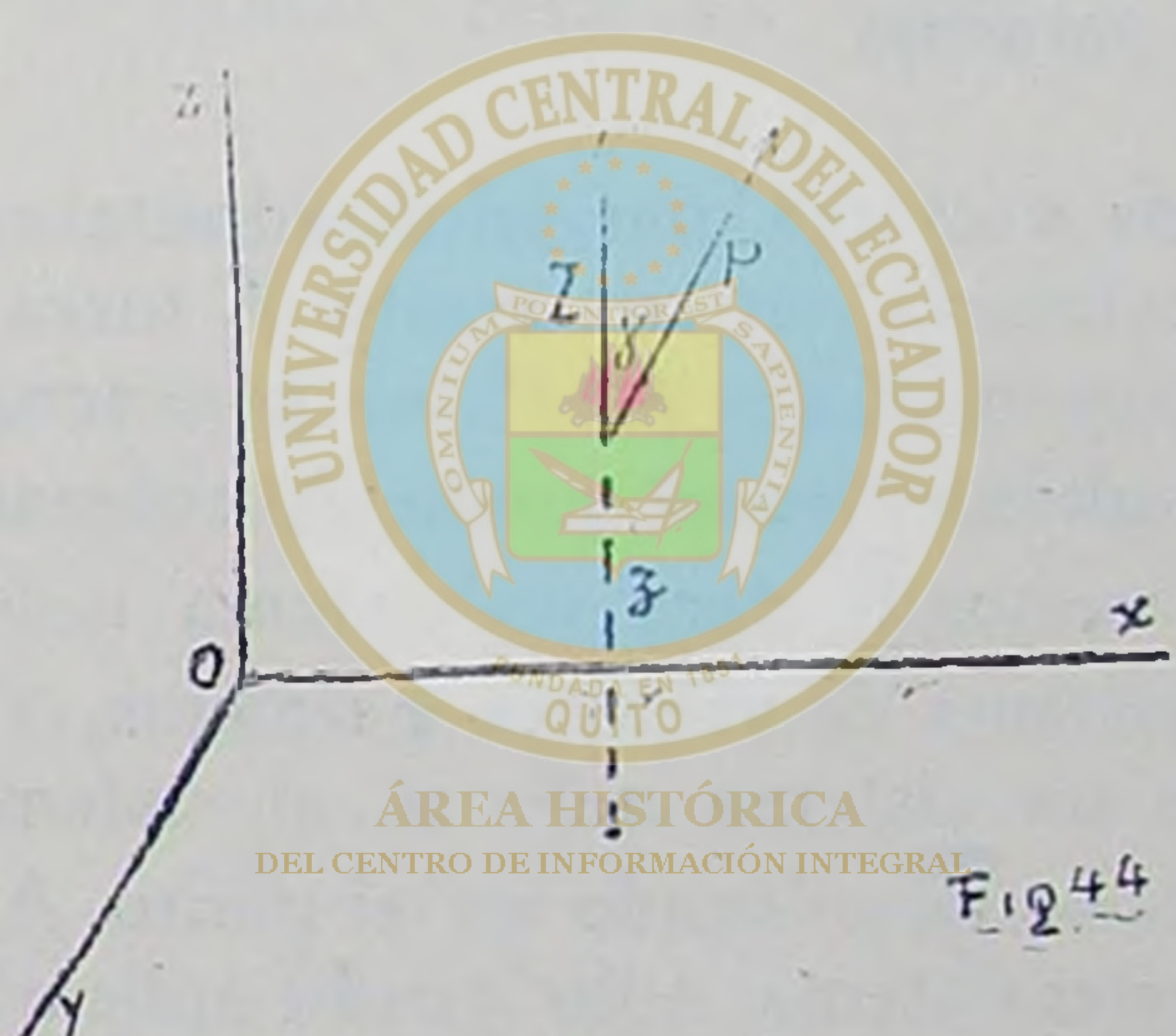


Fig 44

Consideremos el vector P referido a los ejes coordenados y examinemos lo que representa el producto $P \times z$; este producto es el de un vector P por la distancia z a un plano xoy, de su punto de aplicación.

Momento con relación a un plano

Se llama momento de un vector con relación a un plano el producto del vector por la *distancia* del punto de aplicación al plano, distancia llamada brazo de palanca.

Si consideramos la expresión anterior

$$\frac{\Sigma\, xP}{\cos\alpha} = \frac{\Sigma\, yP}{\cos\beta} = \frac{\Sigma\, zP}{\cos\gamma}$$

vemos que la suma de momentos con relación a los planos coordenados

$$\Sigma\, xP,\ \Sigma\, yP,\ \Sigma\, zP,$$

de vectores paralelos que forman un sistema nulo, son proporcionales a los cosenos de los ángulos α, β, γ que los vectores forman con las perpendiculares bajadas a los planos coordenados, o sean con sus brazos de palanca.

Centro de vectores paralelos

Un sistema de vectores paralelos admite en general una resultante única colocada en un punto A fuera del centro de reducción. Si llamamos x', y', z' las coordenadas de aquel punto y $\overline{R}$ la resultante; en el punto A colocamos un vector $-\overline{R}$ que con el vector $\overline{R}$ dará un sistema nulo; pero, como $\overline{R}$ reemplaza al sistema de vectores paralelos, es evidente que obtendré también un sistema nulo si al sistema de vectores añado un vector $-\overline{R}$ colocado en el punto A de coordenadas $x'y'z'$. A este sistema nulo puedo aplicarlo las proporciones encontradas antes:

$$\frac{-x'R + \Sigma\, xP}{\cos\alpha} = \frac{-y'R + \Sigma yP}{\cos\beta} = \frac{-z'R + \Sigma zP}{\cos\gamma}$$

ahora bien, el punto A de coordenadas $x'y'z'$ que es centro de vectores paralelos de dirección definida por los ángulos α, β, y γ, puede ser centro de los mismos vectores cualquiera que sea la dirección común si anulamos los numeradores es decir

$$-x'R + \Sigma xP = O$$

$$-y'R + \Sigma yP = O$$

$$-zR + \Sigma zP = O$$

de donde

$$x' = \frac{\Sigma\, x\, P}{R} = \frac{\Sigma\, x\, P}{\Sigma P}$$

$$y' = \frac{\Sigma\, y\, P}{\Sigma P}$$

$$z' = \frac{\Sigma\, z\, P}{\Sigma P}$$

expresiones que nos dan las coordenadas de este punto especial que se lo llama, centro de vectores paralelos.

Caso particular de dos vectores

En los puntos A y B del espacio, tomamos dos vectores P y Q paralelos y de mismo sentido.

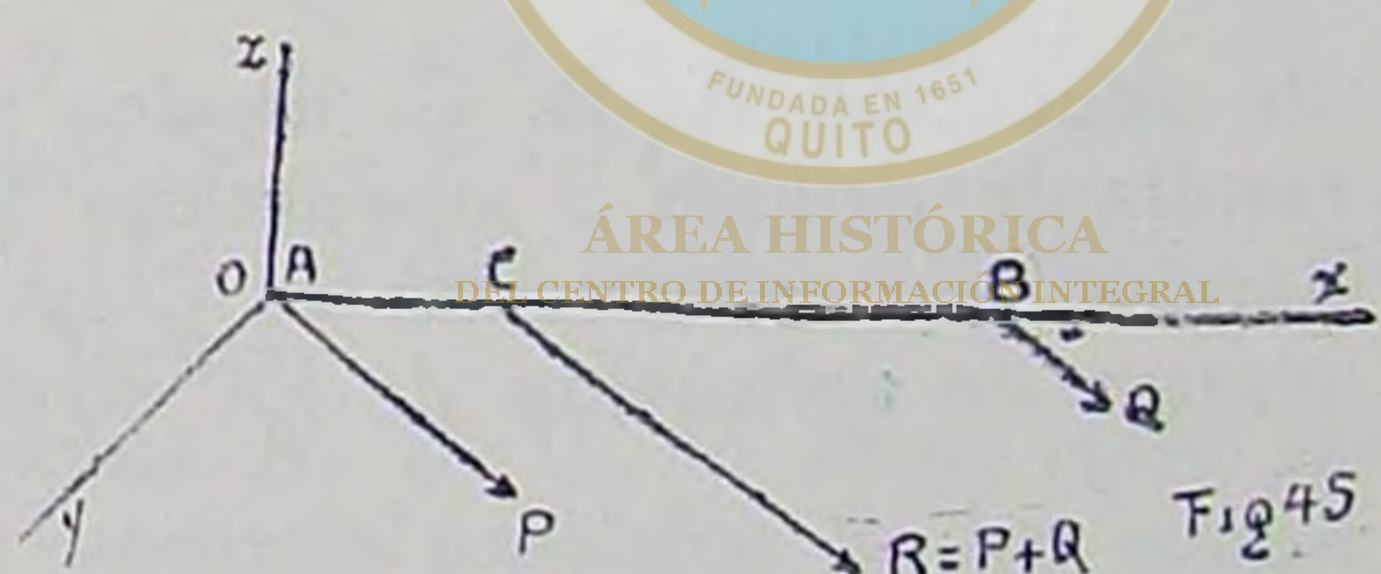


Fig 45

Si aplicamos la ecuación

$$R = \Sigma\, P$$

tendremos

$$R = P + Q$$

y como P y Q tiene el mismo signo,

$$R > P; \quad R > Q.$$

Tomemos la recta AB como eje *ox* y A como origen de coordenadas y observemos que las coordenadas correspondientes a *y*, *z*, son nulas por estar los puntos A y B sobre el eje de ox, luego C se encuentra sobre el mismo eje. La relación de momentos con relación al plano yAz nos da:

$$AC = \frac{AB \times Q}{R}; \qquad \frac{AC}{Q} = \frac{AB}{R}$$

como $$R > Q; \quad AB > AC$$

el punto C de aplicación se encuentra entre A y B.

Además

$$\frac{AB}{R} = \frac{AC}{Q} = \frac{AB - AC}{R - Q} = \frac{CB}{P}$$

que se define así,

$$\frac{R}{AB} = \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}$$

Los puntos de aplicación A, B, C, de dos vectores paralelos y de su resultante definen 3 magnitudes ligadas a los vectores, de tal manera que cada vector es proporcional a la distancia de los puntos de aplicación de los otros dos vectores.

Observación

Si en lugar de tener dos vectores $\overline{P}$ y $\overline{Q}$, tenemos el vector R aplicado en C, podemos descomponerlo en dos vectores aplicados en A y B, mediante las ecuaciones

$$R = P + Q$$

y $$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$$

$$AC + CB = AB.$$

Si los vectores son de sentido contrario, podemos buscar su resultante de la manera siguiente, aplicando lo deducido en la observación anterior.

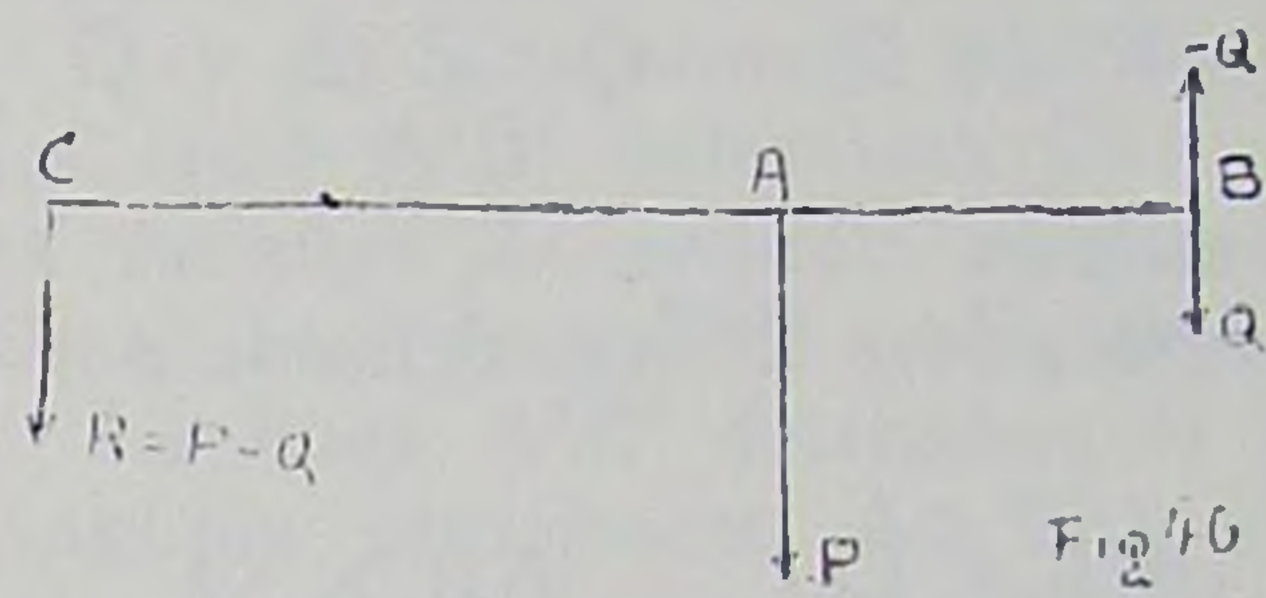


Fig. 46

Sea un vector $\overline{P}$ aplicado en A y — $\overline{Q}$ aplicado en B.

El vector $\overline{P}$ lo descomponemos en dos vectores $\overline{Q}$ y P — Q = R aplicados en B y en un punto C, de tal manera que

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{P - Q}{CB - AC} = \frac{R}{AB}$$

el punto C queda determinado; en el punto B tenemos dos vectores $\overline{Q}$ y $-\overline{Q}$ que se destruyen y en el punto C queda la resultante $\overline{R} = \overline{P} - \overline{Q}$.

Comparando los dos casos anteriores podemos generalizar en esta forma:

Tres puntos A, B, C, en línea recta son los de aplicación de tres vectores paralelos de los cuales el punto C es el de aplicación de la resultante $\overline{R}$.

Siempre tendremos las ecuaciones

$$R = P + Q$$

tomando en cuenta los signos y

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$$

si los vectores son del mismo sentido, el punto C está entre A y B; si son de sentido contrario, el punto C queda fuera de AB y del lado del mayor en valor absoluto.

OBSERVACIÓN

Si los vectores $\overline{P}$ y $-\overline{Q}$ son de igual magnitud

$$R = P - Q = O,$$

es decir, *tenemos un par.*

El punto de aplicación C está definido por la ecuación:

$$AC = \frac{AB \times Q}{R} = \frac{AB \times Q}{O} = \infty$$

Cuando los dos vectores de sentido contrario forman un par, el punto de aplicación de la resultante se encuentra al infinito.

De lo que se deduce que un par no puede reducirse a un solo vector.

Construcción gráfica

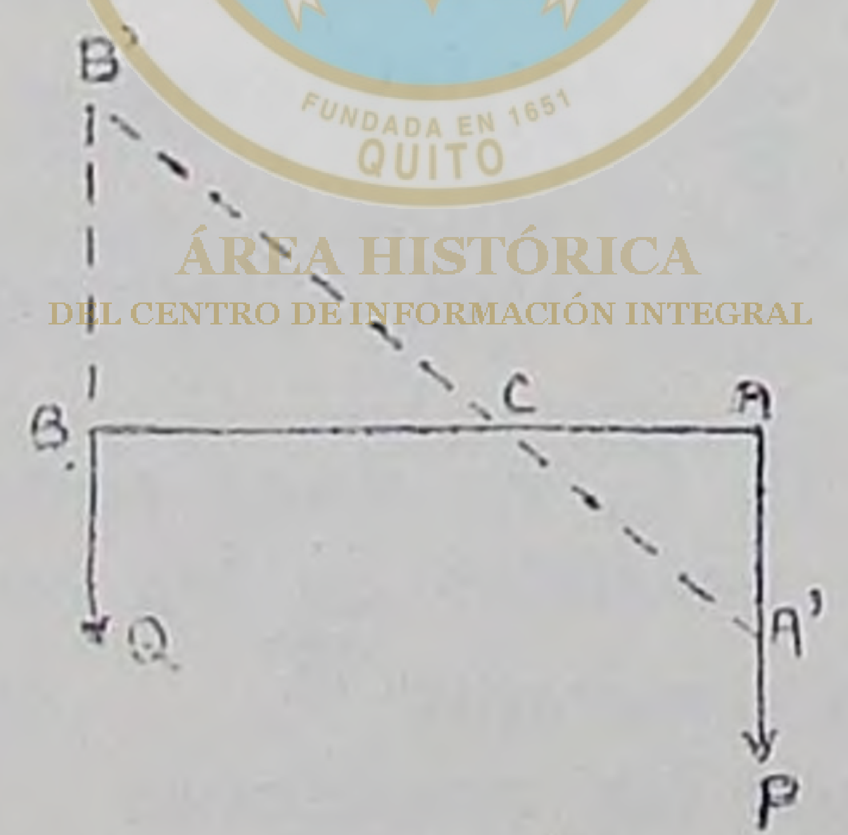


Fig 47.

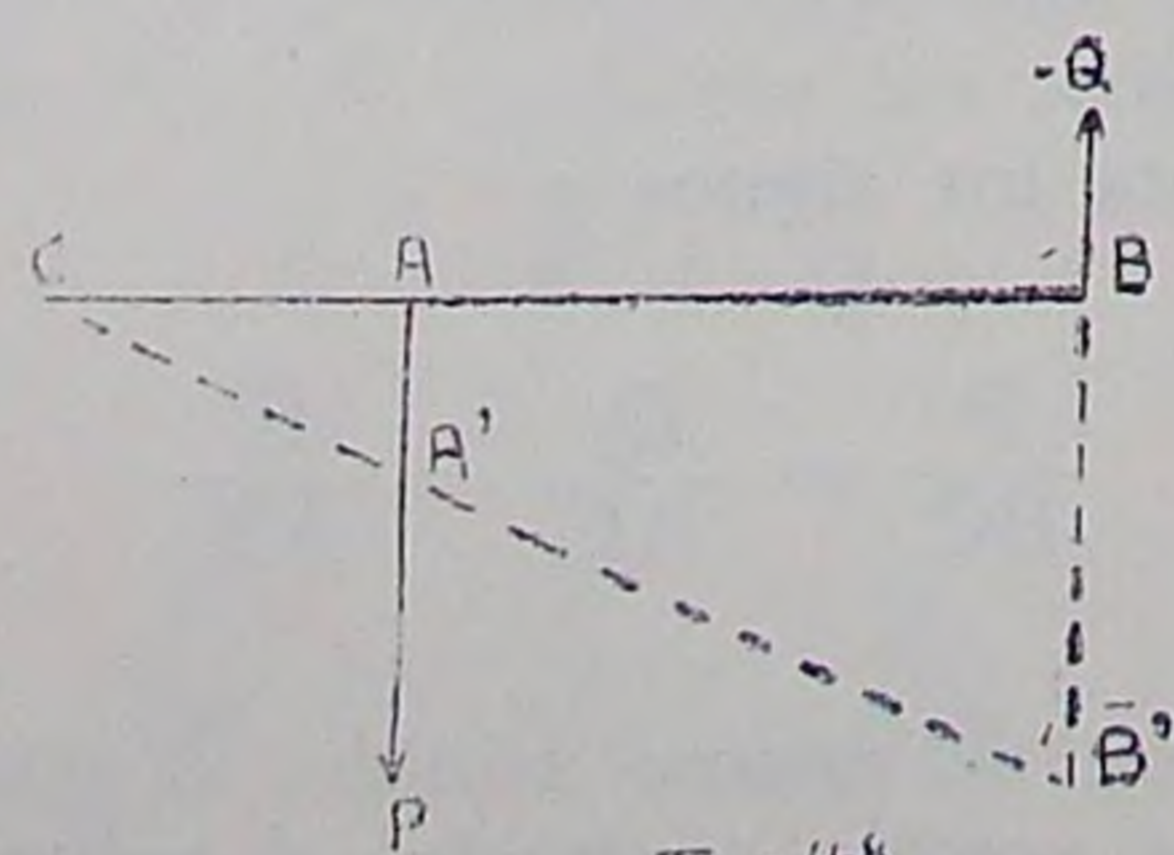


Fig 48.

Para encontrar gráficamente los puntos C de aplicación de la resultante, la construcción de las figuras 46 y 47 nos indica el método.

a) Cuando los vectores son del mismo sentido: en A se toma AA' = Q y en B se tomará BB' = P, pero en sentido contrario. La recta A'B' determina C.

b) Para vectores de sentido contrario: en A se pone AA' = Q; en B se pone BB' = P, ambas longitudes del mismo lado. La línea A'B' determina el punto C.

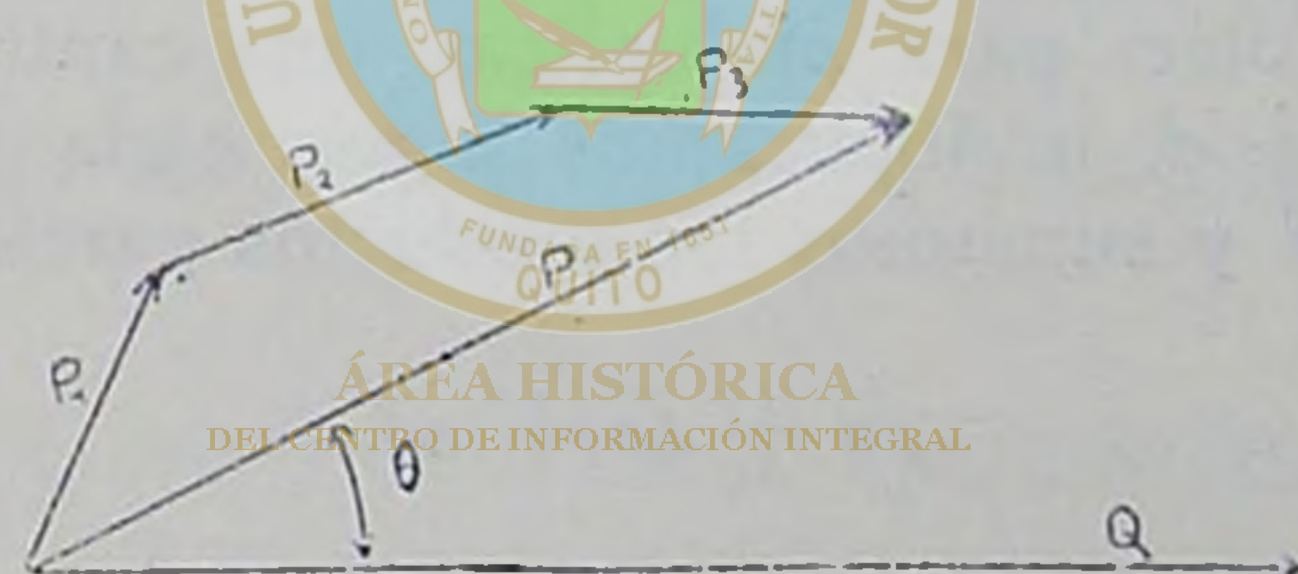
Los triángulos semejantes AA'C y BB'C en el primer caso y los triángulos semejantes AA'C y BB'C en el segundo caso nos probarán que el punto C es el de aplicación de la resultante.

APENDICE

Producto de sumas vectoriales

Al tratar de la composición o reducción de vectores paralelos, hemos visto que el producto Rx Gx cosΘ era nulo, deduciéndolo de la suma de productos parciales de las componentes de R y G.

Aun cuando esta deducción depende del estudio del análisis matemático, vamos a desarrollarlo apoyándonos en la teoría vectorial y en la definición del producto de vectores.



Hemos visto que si dos vectores $\overline{P}$ y $\overline{Q}$ forman un ángulo Θ, el producto de estos vectores es igual a

$$P \times Q \times \cos \Theta$$

Ahora bien, si consideramos la cantidad: Q cos Θ; no es otra cosa que la proyección de $\overline{Q}$ sobre $\overline{P}$ y diremos que el producto es igual al vector $\overline{P}$ multiplicado por la proyección de $\overline{Q}$ sobre $\overline{P}$. Así mismo el producto definido puede presentar esta forma equivalente $Q \times P \cos \Theta$ y como P cos Θ es la proyección de $\overline{P}$ sobre $\overline{Q}$, vemos que la expresión generalizada es la siguiente:

El producto de dos vectores es igual al primer vector, multiplicado por la proyección del segundo vector sobre el primero.

Supongamos que el primer vector es $\overline{Q}$ y, el segundo $\overline{P}$ es una suma geométrica de vectores $\overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{P_3}$; el producto de estos vectores será

$$Q \times \text{proyección sobre } Q \text{ de } (\overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{P_3})$$

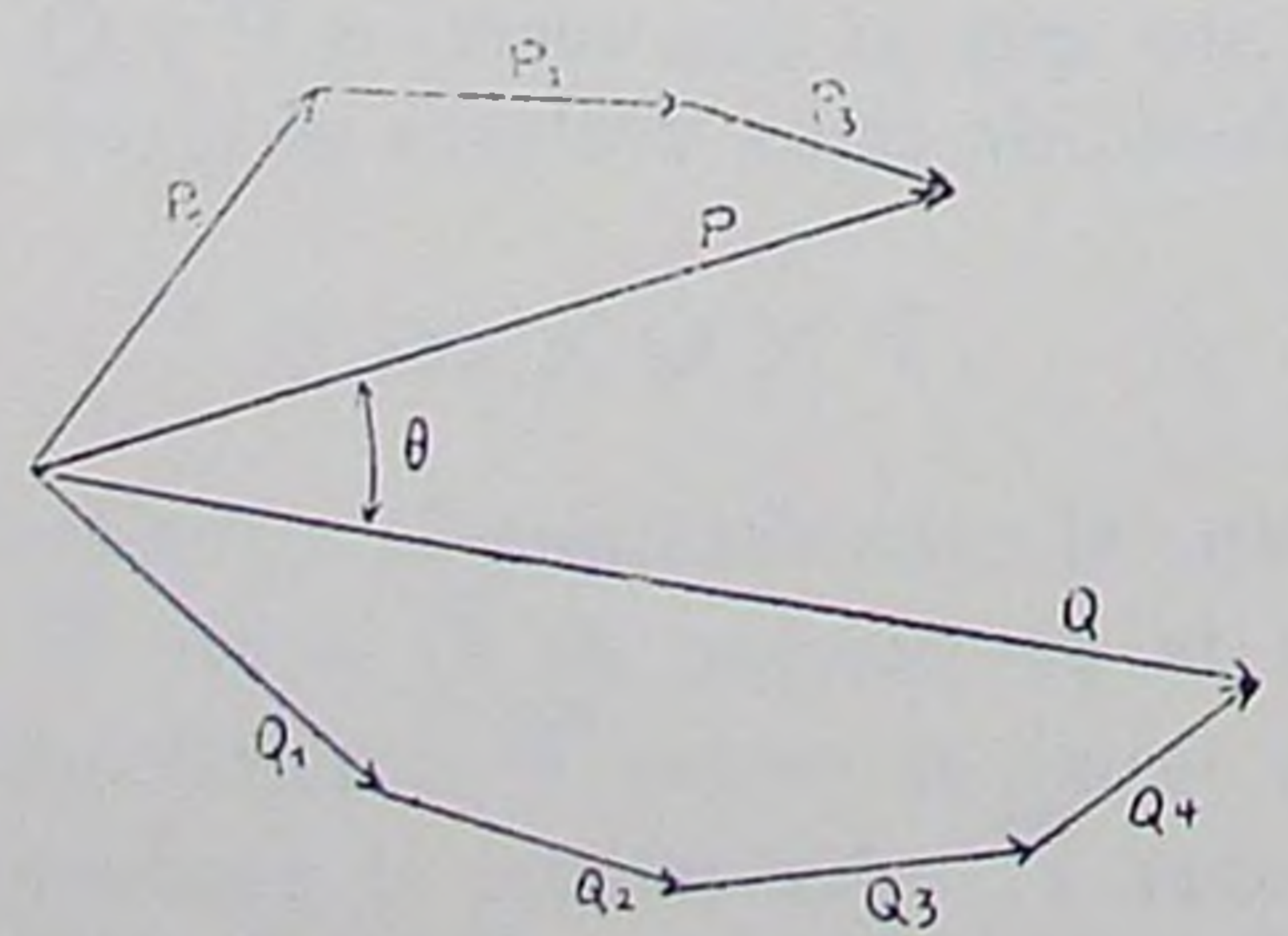
es decir

$$\begin{aligned} Q \times P\cos\Theta = {} & Q \times P_1 \cos\ (X \times Q, P_1) \\ & + Q \times P_2 \cos\ (Q, P_2) \\ & + Q \times P_3 \cos\ (Q, P_3) \end{aligned}$$

cualquiera de las expresiones del segundo miembro representan los productos parciales de Q y de los diferentes componentes de P, es decir, encontramos la propiedad de la multiplicación algébrica que dice: para multiplicar una cantidad *a* por una suma *b*, + *c*, + *d*, multiplicamos *a* por cada uno de los sumandos *b*, *c*, *d* y sumamos los productos parciales

$$ab + ac + ad..$$

Producto de sumas geométricas o vectoriales



Consideremos las sumas parciales encontradas en el caso anterior y llamémoslas

$$A_1 = Q \times P_1 \cos (Q, P_1)$$

$$A_2 = Q \times P_2 \cos (Q, P_2)$$

$$A_3 = Q \times P_3 \cos (Q, P_3)$$

La primera representa el producto de $\overline{Q}$ por $\overline{P_1}$; pero si Q está formado por la suma vectorial

$$\overline{Q_1} + \overline{Q_2} + \overline{Q_3} + \overline{Q_4},$$

encontramos el caso anterior y

$$\begin{aligned} A_1 = Q_1 \times P_1 \cos (Q_1, P_1) + Q_2 \times P_1 \cos (Q_2, P_1) \\ + Q_3 \times P_1 \cos (Q_3, P_1) \\ + Q_3 \times P_1 \cos (Q_3, P_1) \\ + Q_4 \times P_1 \cos (Q_4, P_1) \end{aligned}$$

Aplicando lo anterior a A_2 y A_3 encontraremos el producto total

$$P \times Q \times \cos \Theta = \Sigma \, Pn \times Qm \cos (Pn, Qm)$$

llamando $\overline{Pn}$ un vector cualquiera de los que componen el vector $\overline{P}$, y $\overline{Qm}$ cualquiera de los que componen el vector $\overline{Q}$.

$$\Sigma PnQm \cos (Pn, Qm)$$

significa la suma de todas las combinaciones posibles, dos a dos, de cada uno de los vectores

$$\overline{P_1}, \ \overline{P_2}, \ \overline{Pn}$$

con cada uno de los vectores

$$\overline{Q_1}, \ \overline{Q_2}, \ \overline{Q_3}, \ \overline{Qm}.$$

Con lo cual queda demostrada la generalización absoluta de la multiplicación aplicada a los vectores.

Refiriéndonos a ejes coordenados rectangulares, llamemos $\overline{X_1}$, $\overline{Y_1}$, $\overline{Z_1}$, las componentes del vector $\overline{P}$ y $\overline{X_2}$, $\overline{Y_2}$, $\overline{Z_2}$ las componentes del vector $\overline{Q}$.

Aplicando las propiedades anteriores, tendremos la expresión del producto de $\overline{P}$ por $\overline{Q}$.

$$
\begin{aligned}
P \times Q \cos\Theta = {} & X_1 X_2 \cos(X_1, X_2) + X_1 Y_2 \cos(X_1, Y_2) \\
& + X_1 Z_2 \cos(X_1, Z_2) \\
& + Y_1 X_2 \cos(Y_1, X_2) + Y_1 Y_2 \cos(Y_1, Y_2) \\
& + Y_1 Z_2 \cos(Y_1, Z_2) \\
& + Z_1 X_2 \cos(Z_1, X_2) + Z_1 Y_2 \cos(Z_1, Y_2) \\
& + Z_1 Z_2 \cos(Z_1, Z_2)
\end{aligned}
$$

los cosenos (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) y (Z_1, Z_2) son iguales a ± 1 por tratarse de componentes de una misma dirección.

Todos los otros cosenos son nulos porque las componentes son perpendiculares, dos a dos; los productos son, por tanto, nulos.

La expresión analítica del producto vectorial es pues

$$P \times Q \times \cos\Theta = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

que es lo que queríamos establecer.