

Por el Profesor de Estática Gráfica de la Universidad Central

Sr. Ingeniero Dn. Abel S. Troya

Curso de Estática Gráfica



ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

(Continuación)

CAPITULO VII

Esfuerzos cortantes y momentos de flexión

PRELIMINARES

58.—*Fibra neutra o media.* Es la línea recta o curva formada por los diferentes centros de gravedad de las secciones elementales del cuerpo. Así en la fig. 56 la línea AB es la fibra neutra.

El área plana generatriz del cuerpo, es la sección transversal. En la fig. 56, mn es una sección transversal.

En las construcciones en general, es usual considerar a la fibra neutra en un solo plano, y las fuerzas que actúan sobre el cuerpo están situadas en el plano de esta fibra.

59.—Sea un cuerpo cualquiera AB, en el que actúan diferentes fuerzas: R_1 , R_2 , F_1 , F_2 , que se hacen equilibrio, fig. 56.

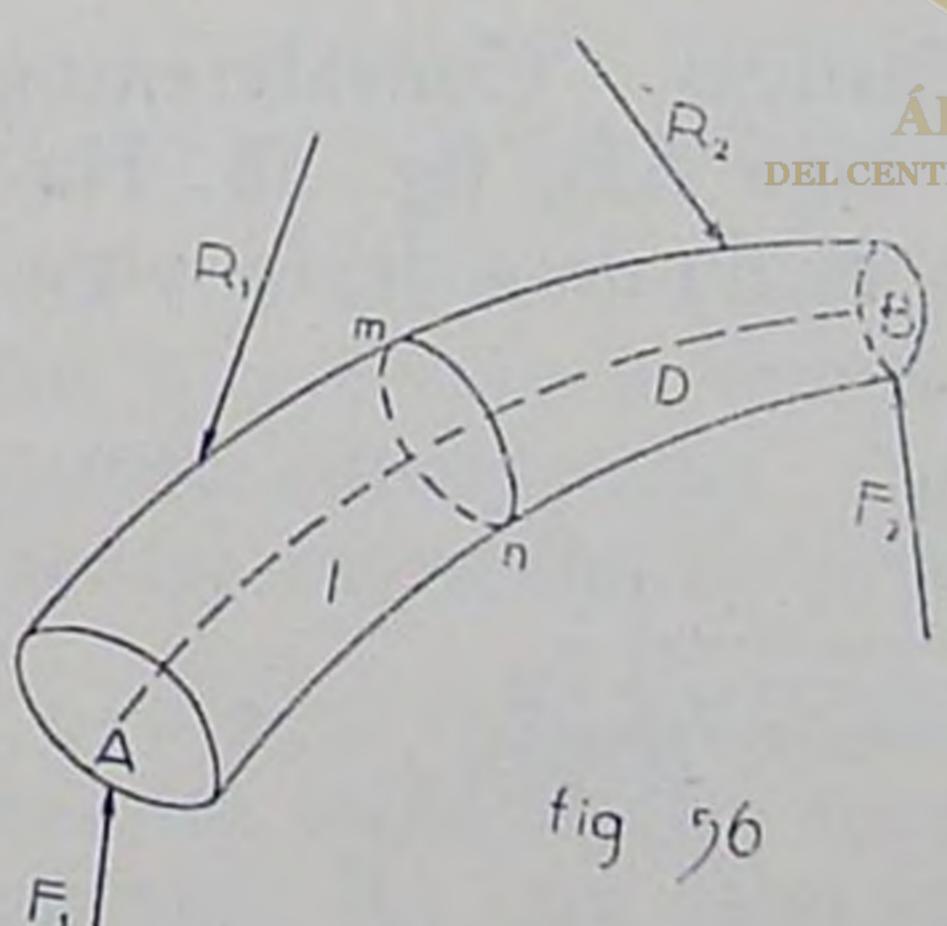


fig 56

Supongamos por un momento que este cuerpo se divide en dos partes, por medio de la sección mn, normal u oblicua a la fibra neutra. La parte de la derecha D del cuerpo puede suprimirse o quitarse de la izquierda I, siempre que apliquemos en todos los puntos de la sección mn, fuerzas iguales a las acciones que estos puntos sufren de la parte de D.

- Se puede constatar que, si el seccionamiento se hace efectivamente, y que a pesar del contacto que se establezca, después de la operación entre las dos partes, no se manifiesta ya ninguna acción entre ellas.

Estas acciones son las que se denominan fuerzas elásticas o interiores y no se ejercen, de una manera sensible sino a distancias muy pequeñas, y se puede, por consiguiente, admitir

que la sección mn contiene todos los puntos de aplicación de estas acciones.

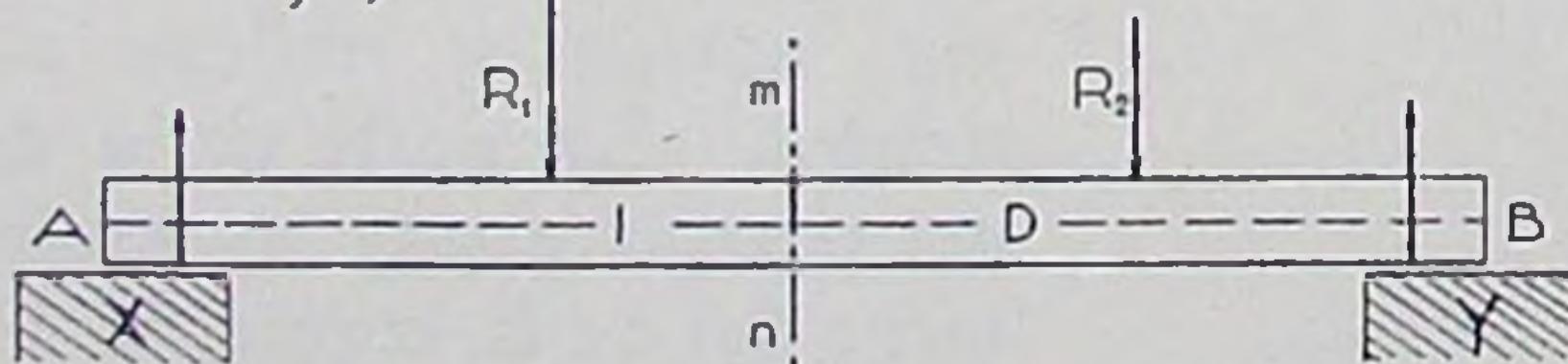
Por lo expuesto, hay que hacer una salvedad: cuando determinábamos las reacciones de los apoyos, aplicamos las reglas de la Estática, como si se tratase de un sólido invariable, permitiendo, por lo tanto, desplazar los puntos de aplicación de las fuerzas a lo largo de su línea de acción; a fin de hacer las composiciones que pueden ser útiles para la solución de los problemas. Mientras que cuando se trata de las fuerzas elásticas, vemos que no es posible el desplazamiento en su línea de acción, pues los puntos de aplicación son fijos.

Un ejemplo nos aclarará este principio:

Consideremos fig. 57, que AG represente un alambre suspendido en uno de los extremos, en G por ejemplo; si hacemos que en el punto B actúe una fuerza de arriba hacia abajo, la parte GB será la única parte que trabaje, haciendo equilibrio a la fuerza, sufriendo por lo tanto una extensión; mientras que la parte AB no trabajará, lo que sucedería sólo en el caso de cambiar el punto de aplicación de la fuerza de B a A.

60.—Análisis de las fuerzas elásticas. Consideremos una pieza prismática, por ejemplo una viga AB, fig. 58. Hágamos una sección mn , en un punto cualquiera de la viga,

fig. 58



normal a la fibra neutra y no como antes que podía ser inclinada.

Sea R_1 y R_2 las resultantes de las fuerzas exteriores aplicadas en la parte de la izquierda y de la derecha de la viga. La fuerza R_1 se puede trasladar al centro de gravedad de la sección mn , siempre que añadamos el par de traslación, cuyo momento es M , e igual a la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas a la izquierda, con relación al centro de gravedad de la sección.

Ahora, la fuerza R_1 , resultante de las fuerzas exteriores de la izquierda, hace equilibrio a las fuerzas elásticas que se desarrollan en la sección mn , de la acción que resulta de la parte D sobre la I. Y como las fuerzas elásticas debidas a la acción de la parte I sobre la D son iguales y de sentido contrario a las precedentes, se deduce que las fuerzas elásticas que se ejercen en la sección mn por la parte I sobre la D, tienen la misma resultante aplicada en el centro de gravedad y un mismo par; ambos son iguales al de las fuerzas exteriores que actúan en la parte de la izquierda I.

La resultante de translación R_1 al centro de gravedad de la sección mn , puede reemplazarse por su proyección, N , sobre la fibra neutra, es decir, perpendicular a la sección y por su proyección C sobre el plano de la sección, fig. 59.

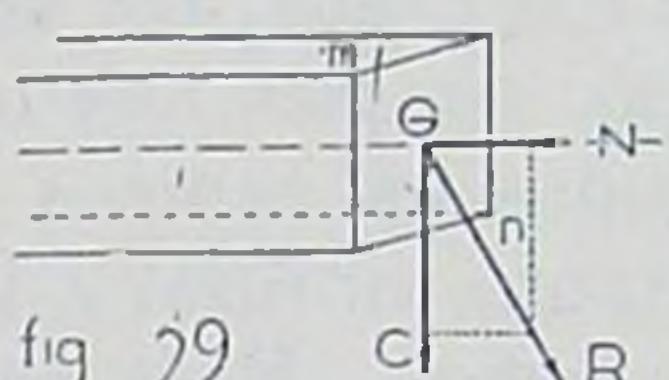


fig 59

Sobre la fibra neutra, es decir, perpendicular a la sección y por su proyección C sobre el plano de la sección, fig. 59.

La componente N se llama *esfuerzo normal*. La componente C se la denomina *esfuerzo cortante*.

El momento \mathcal{M} , del par de translación puede igualmente descomponerse en dos, proyectando sobre los dos planos: el de la sección y el plano de la fibra neutra.

La proyección en el plano de la sección que tiende a torcer el cuerpo considerado, se llama a causa de esto, par de torsión y su momento común es el *momento de torsión*.

La proyección sobre el plano de la fibra neutra dà un par que tiende a romper el contacto de las dos partes del cuerpo considerado. Se les llama par de flexión y su momento, *momento de flexión*.

En el caso general de las construcciones, las fuerzas exteriores están todas en el plano vertical que contiene la fibra neutra. En este caso la proyección que dà el par de torsión es nulo y por consiguiente su momento.

Además de esto, las aplicaciones más frecuentes son las relativas a las vigas rectas, cuya fibra neutra es una línea recta y que está sometida a fuerzas normales a esta fibra.

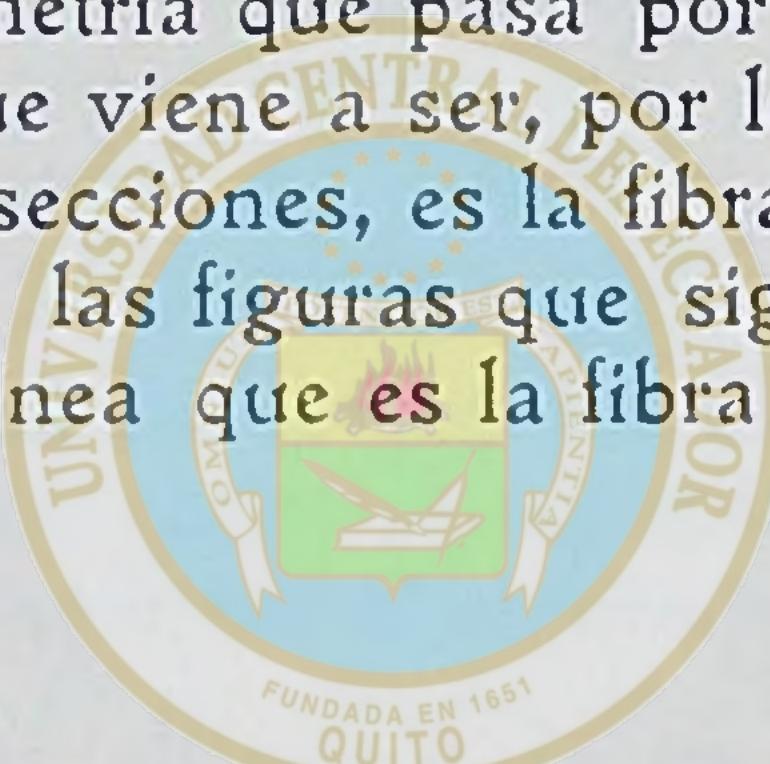
Para estas piezas, el esfuerzo normal desaparece. y no queda sino el esfuerzo cortante y el momento de flexión.

De donde resulta que, el *momento del par de flexión* en un punto dado, tiene por valor, el producto de la resultante de las fuerzas exteriores, a la izquierda de la sección incluida la reacción del apoyo, por la distancia de esta resultante al punto considerado.

Y también, el esfuerzo cortante es la suma de las fuerzas situadas a la izquierda o a la derecha de la sección considerada, allí incluidas las reacciones de los apoyos.

El esfuerzo normal es la suma de todas las fuerzas horizontales, es decir, a la suma de las proyecciones de las fuerzas externas, situadas a la izquierda de la sección considerada sobre la tangente a la fibra neutra.

OBSERVACIÓN. En la mayor parte de los casos, las secciones transversales, son figuras geométricas simples que admiten una línea de simetría que pasa por todos los centros de gravedad; esta linea que viene a ser, por lo tanto, normal a los planos de las infinitas secciones, es la fibra neutra. Para simplificar el trazado, en las figuras que siguen, la viga está representada por una linea que es la fibra neutra o la linea de simetría.



DETERMINACIÓN DE LOS ESEFUERZOS CORTANTES Y MOMENTOS DE FLEXIÓN EN UNA VIGA HORIZONTAL SOBRE DOS APOYOS.

61.—Sea una viga XY, en la que actúan tres fuerzas verticales, ab , bc y cd , con las que trazamos el dinámico y el fúnicular; luego se determina las reacciones X y Y de los apoyos, Fig. 60.

Hagamos un seccionamiento de la viga en ss. Entonces el sistema de fuerzas — $X + ab$, que actúan en la porción de la izquierda de la viga, están en equilibrio con el sistema de fuerzas, $bc + cd$, — Y , que están en la porción de la derecha.

Sí se suprime la porción izquierda de la viga, para que no se altere el equilibrio, es necesario añadir al sistema que actúa sobre la porción de la derecha, la resultante de — $X + ab$ y el par de translación de estas fuerzas a la sección ss.

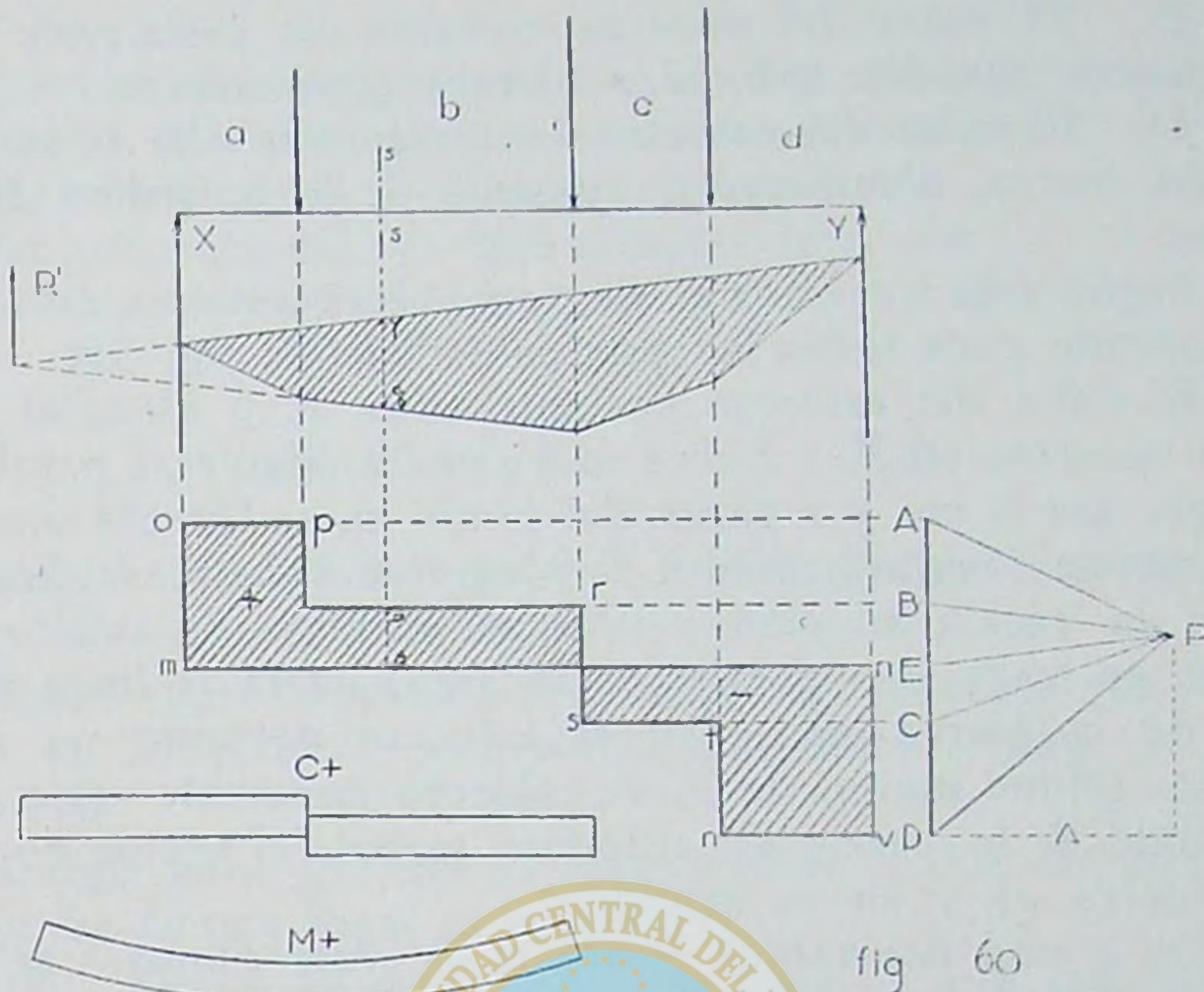


fig 60

De suerte que, las reacciones de una porción de la viga sobre la otra se reduce a una resultante y un par.

Hay pues dos resultantes en equilibrio y dos pares en equilibrio.

Estas dos resultantes aplicadas en ss, son de sentido contrario, y de intensidad común, que expresa el valor del *esfuerzo cortante* en la sección ss.

Además, para otro punto de la viga tomado entre la fuerza ab y bc, la resultante de las fuerzas de la derecha o de la izquierda queda constante e igual a R.

Y también se nota que para cualquier punto de la viga, entre X y ab, la resultante de las fuerzas de la derecha o de la izquierda aumenta de la magnitud de ab; mientras que para cualquier otro punto situado entre bc y cd, la resultante de las fuerzas de la derecha o de la izquierda, disminuye de la magnitud de bc.

Estas propiedades se enuncian así:

1º. El valor del esfuerzo cortante de una viga, en un punto cualquiera, está dado por la magnitud de la resultante de las fuerzas, tomadas indiferentemente, a la derecha o a la izquierda de este punto;

2º. El valor del esfuerzo cortante no varía para todos los puntos situados entre dos fuerzas consecutivas;

3º. El valor del esfuerzo cortante, más allá o más acá de una fuerza, disminuye o aumenta de la magnitud de esta fuerza.

Según esto tracemos el diagrama representativo del esfuerzo cortante para todos los puntos de la viga, fig. 59.

El valor del esfuerzo cortante entre X y ab es el valor de la reacción en X. Sobre una linea cualquiera, paralela a la viga, sea la mn y a partir del punto m, se levanta una vertical mo de longitud igual a la magnitud de la reacción en X, según la escala adoptada. Por el extremo de este vector, por o, se traza una paralela a la viga, hasta la linea de acción de la fuerza ab; pues el esfuerzo cortante no varía. De este último punto, de p, el esfuerzo constante varía de la magnitud de la fuerza ab; entonces se baja el vector pq igual a la fuerza ab y en su sentido.

De q una horizontal hasta r; de este punto r se baja una magnitud rs igual a bc.

Hay que notar que en este punto, r, se pasa de la región superior de mn a la inferior; el esfuerzo cortante cambia de signo, cortando al eje mn.

Y así se sigue sucesivamente para las demás fuerzas, hasta llegar al punto n.

Si el trazado está bien hecho, del punto v se debe llegar al punto n, trazando la magnitud de la reacción en Y. Para facilitar el trazado, el dinámico se pone en lugar conveniente de manera de proyectar las magnitudes de las fuerzas, como está en la fig. 60.

El diagrama representativo de los esfuerzos cortantes es el área mopqrstuvn, que está sombreada.

Para conocer el esfuerzo cortante en un punto cualquiera de la viga, es suficiente bajar, por este punto, una perpendicular, hasta que encuentre el perímetro del área. Así el vector $\alpha\beta$, medido a la escala de las fuerzas, dà el esfuerzo cortante para el punto ss.

Ahora nos queda por considerar, el par de traslación de la resultante de las fuerzas situadas a la derecha o a la izquierda de la sección.

Estos dos pares, de la derecha y de la izquierda, tienden a romper el contacto de las dos porciones de la viga; estos son

los pares de flexión, que están en el plano de la fibra neutra y como están en equilibrio, tienen el mismo momento.

La resultante de $-X$ y ab es R' .

El momento del par de translación de R' es:

$$\mathcal{M}. R' = \gamma \hat{\delta} \times \Delta \quad (1)$$

$$\mathcal{M}. R' = \gamma \hat{\delta} \quad (2)$$

Llamando Δ a la distancia polar. En la segunda expresión, $\gamma \hat{\delta}$ se medirá a la escala de momentos.

Estas expresiones son deducidas, al aplicar, lo que hemos dicho en lo relativo a momentos estáticos, (pág. 54 y siguientes).

Luego para conocer el momento de flexión en un punto cualquiera de una viga, es suficiente:

1º. Trazar en este punto, una paralela a la resultante de las fuerzas de la derecha o de la izquierda; es decir, una vertical, puesto que todas las fuerzas son verticales, y comprendida entre los lados extremos del funicular;

2º. Multiplicar este segmento por la distancia polar.

La ordenada del funicular se medirá a la escala de las fuerzas y la distancia polar a la escala de longitudes o viceversa.

De donde se deduce que el funicular constituye el área representativa de los momentos de flexión.

Si se quiere, por comodidad, que el lado de cierre sea paralelo a la viga, para medir directamente en cada punto el segmento comprendido en el área de los momentos de flexión, se procede así: construidos ya el dinámico y un funicular, se traza por E (punto que determina las reacciones) una paralela a la viga sobre la que se toma un nuevo polo P' , con una distancia polar igual a Δ . El funicular de polo P' , se construye, de manera que la misma viga sea el lado de cierre.

OBSERVACIONES. El área de momentos demuestra, que todas las ordenadas como $\gamma \hat{\delta}$ que corresponden a sus vértices, coinciden siempre con las líneas de acción de las fuerzas.

Para encontrar el momento máximo, que es exactamente la parte que corresponde en la viga a la sección peligrosa, se traza una paralela al lado de cierre por el vértice del área

que se obtenga la ordenada máxima. A partir de ésta, los momentos van disminuyendo hasta anularse en los apoyos.

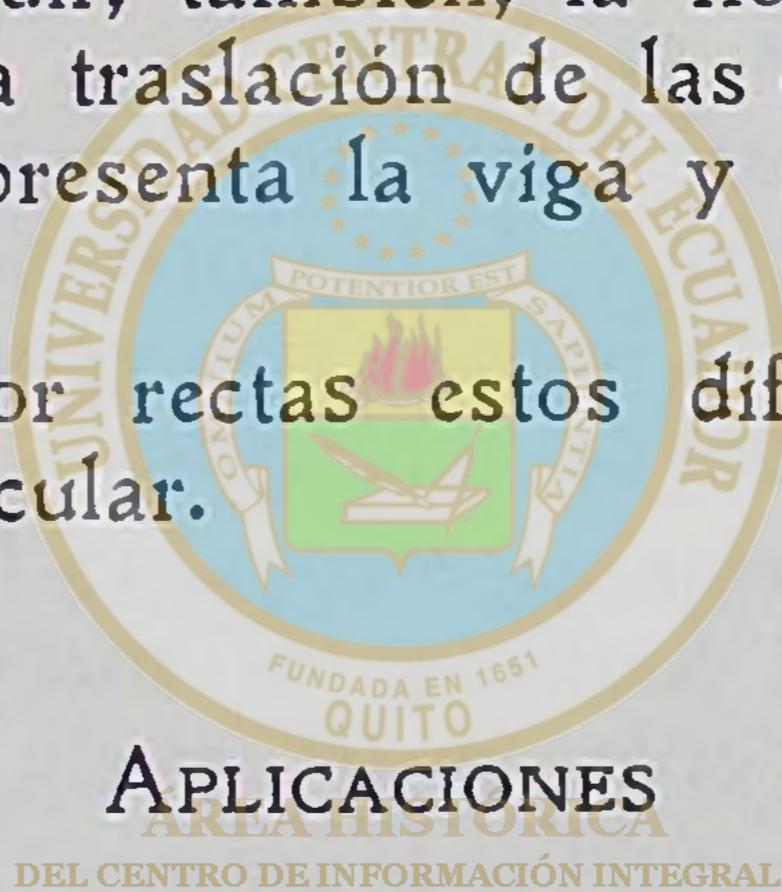
La condición algebraica de máximos en los momentos de flexión es $dM/dx = 0$. Y como se sabe también que $dM/dx = C$, en la que C es el esfuerzo cortante, se deduce: que el momento máximo de flexión, o lo que es lo mismo la sección peligrosa, se encuentra en el punto en que el esfuerzo cortante cambia de signo, o se anula, y por tanto, corta al eje del diagrama.

En la fórmula (1) si la distancia polar Δ es igual a la unidad de longitud, las ordenadas del funicular dan directamente el valor del momento para el punto correspondiente.

Hay interés para que la misma viga constituya el lado del cierre del funicular.

Se puede conseguir, también, la horizontalidad del lado de cierre, haciendo la traslación de las ordenadas del funicular a la línea que representa la viga y sobre cada línea de acción.

Luego se une por rectas estos diferentes puntos y se obtiene el nuevo funicular.



62.—1º. Momentos de flexión y esfuerzos cortantes de una viga simple con carga uniformemente repartida.

Sea la viga de la fig. 51 de luz l y con la carga p por unidad de longitud.

Por la simetría de la carga, las reacciones son iguales entre ellas e iguales a la mitad de la carga total: $pl/2$.

Se sabe que para cualquier sección distante x del apoyo izquierdo, el esfuerzo cortante es igual a la suma de las fuerzas de la izquierda de la sección.

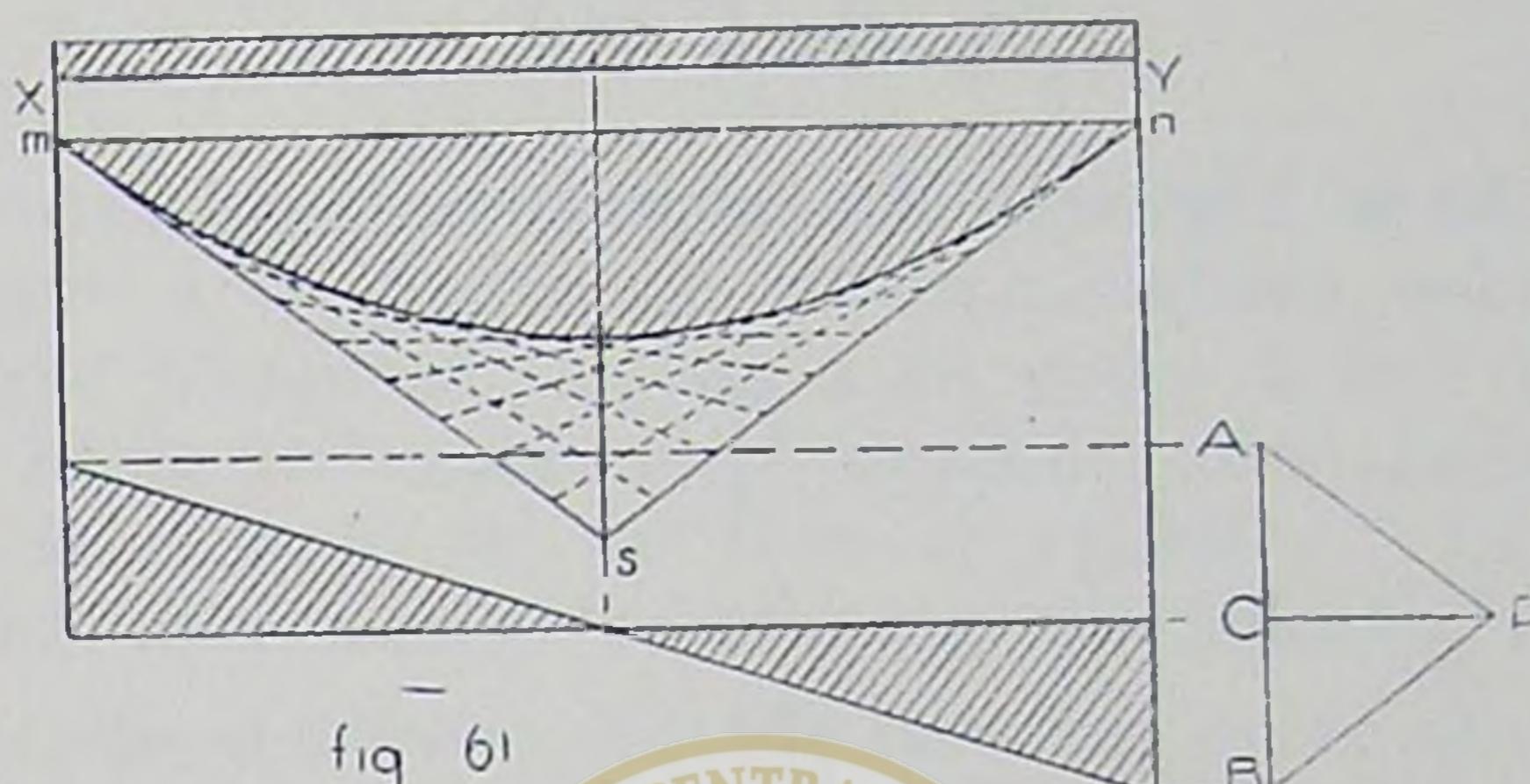
$$C = \frac{pl}{2} - px = p\left(\frac{1}{2} - x\right) \quad (1)$$

Si C es la ordenada correspondiente a una abscisa x , entonces esta ecuación es la de una línea recta:

$$\text{Cuando } x = 0 \quad \dots \quad C = pl/2$$

$$\text{« } x = 1/2 \quad \dots \quad C = 0$$

$$\text{« } x = 1 \quad \dots \quad C = -pl/2$$



Luego el diagrama de los esfuerzos cortantes se construye haciendo gi igual a la luz de la viga, y trazando gf e ik igual a la reacción $pl/2$, y entonces se une f y k .

El momento de flexión, para un punto x del apoyo izquierdo, es igual a la suma de los momentos a la izquierda de la sección:

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$M = \frac{pl}{2} x - px \frac{x}{2} = \frac{1}{2} p (lx - x^2) \quad (2)$$

Esta es la ecuación de la parábola:

$$\text{para } x = 0 \quad \dots \quad M = 0$$

$$\text{» } x = 1/2 \quad \dots \quad M = \frac{pl^2}{8} \text{ (máximo)}$$

$$\text{» } x = 1 \quad \dots \quad M = 0$$

El diagrama de los momentos se construye, trazando mn igual a la luz de la viga; entonces se traza la magnitud qr en la mitad e igual al momento máximo y entonces se construye la parábola mnr .

Si la totalidad de la carga fuera concentrada en la mitad de la viga, AB sería el dinámico y BC y CA las dos reacciones, de polo P, con una distancia polar Δ , y el funicular msn . De los triángulos semejantes PAC y msq se tiene:

$$\frac{\Delta}{\sqrt{2} \text{ pl}} = \frac{1/\omega_0}{qs}$$

Si se hace Δ igual a la unidad, la ordenada:

$$qs = \frac{\pi l^2}{4} \quad (3)$$

y como

$$qr = \frac{\rho l^2}{8} \quad (4)$$

se deduce que el momento máximo para una carga concentrada en la mitad, es el doble del valor que se obtiene para una carga uniformemente repartida.

Este otro procedimiento, para trazar la parábola, suele ser a veces más expedito, fig. 61 a.

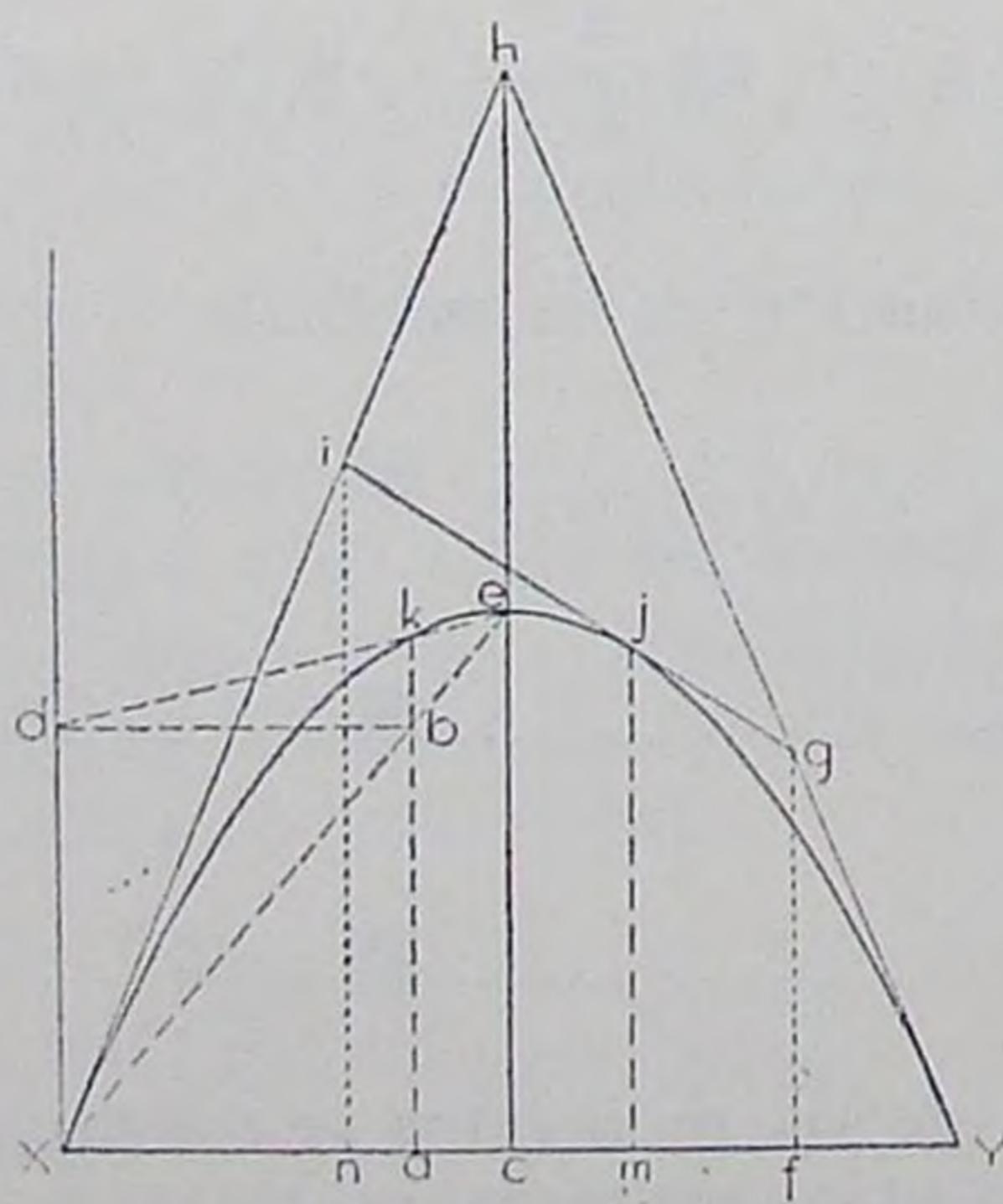


fig 61-a

Sea XY la luz de la viga y sobre XY como cuerda y ch, la perpendicular en la mitad de la luz, vamos a dibujar la parábola, de manera que sea tangente en los puntos X y Y.

Se traza primero la línea indefinida XZ paralela a ch, luego se toma

$$ch = 2 \cdot ce = \frac{pl^2}{4}.$$

Entonces, para determinar un punto de la parábola correspondiente a un punto cualquiera a, tomado sobre la viga, es suficiente trazar ak paralela a ce y por b una paralela a la viga, hasta la intersección con XZ, entonces se tiene el punto d; este punto se une con el vértice e. El punto de encuentro k de de con ak es el punto buscado de la parábola.

Se repite el mismo trazado para cualquier otro punto de la viga, hasta tener un número suficiente de puntos de la parábola que permita unirlos por medio de una curva continua.

Las líneas Xh y Yh serán las tangentes en los apoyos de la viga, haciendo que $ce=eh$.

Para trazar la tangente en un punto j de la parábola, se proyecta este punto en m, luego se toma las mitades de los segmentos, mY y mX, por estos dos puntos f y n se trazan paralelas al eje mayor y se obtienen las intersecciones i y g con las tangentes extremas; se une estos puntos que es la tangente buscada.

63.—2º. Caso particular.—Determinar los diagramas de los esfuerzos cortantes y momentos de flexión para una viga sometida a la acción de una carga única F.

En la fig. 62 sea la viga de 6 metros de longitud y una carga $F = 1.500$ kilos.

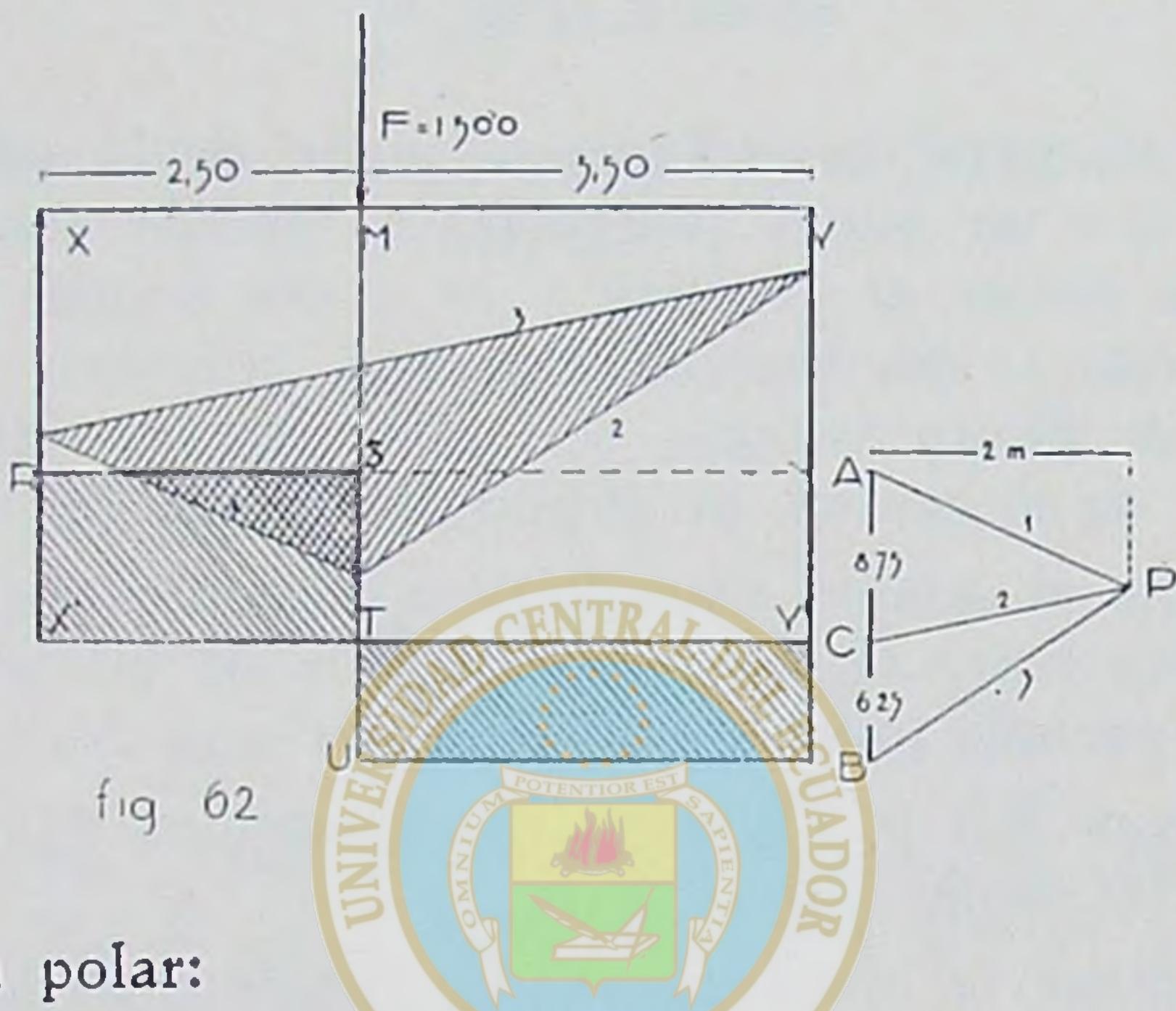
En este caso el dinámico se reduce a la magnitud $AB = F = 1.500$ kilos, y el funicular a un triángulo 1-2-3 que tiene sus vértices en las líneas de acción de los apoyos y en la de la fuerza F.

Por comodidad se hace la distancia polar igual a un número entero de la unidad de longitud, digamos 2 metros.

Con el polo P, se ha trazado el funicular de lados 1, 2 y 3; la paralela al lado de cierre 3 trazada por P da la magnitud de las reacciones:

$$CA = X = 875 \text{ kilos} \quad \text{y} \quad BC = Y = 625 \text{ kilos.}$$

Este funicular representa el diagrama de los momentos de flexión, a causa de la carga F . Se observa que la ordenada máxima, o sea el momento máximo tiene lugar bajo la carga F y es igual a $h = 1.090$ kilos multiplicado por



la distancia polar:

$$M_m = 1.090 \times 2 = 2.180 \text{ km.}$$

ÁREA HISTÓRICA

DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Verificando por la expresión analítica da:

$$M_m = \frac{Fa(1-a)}{l} = \frac{1.500 \times 2,5(6-2,5)}{6} = 2.187 \text{ km.} \quad (1)$$

la diferencia depende de la apreciación con la escala, al medir la ordenada.

En la expresión anterior a es la distancia de la carga al apoyo izquierdo; l la luz o longitud de la viga.

También el valor de las reacciones se puede comprobar por la fórmula:

$$X = \frac{F(1-a)}{1} = \frac{1.500 \times 3,5}{6} = 875 \text{ k.} \quad (2)$$

$$Y = \frac{F \cdot a}{1} = \frac{1.500 \times 2,5}{6} = 625 \text{ k.} \quad (3)$$

Con estos valores se proyectan los extremos de las fuerzas del dinámico para tener el diagrama del esfuerzo cortante, que es el área poligonal X'RSTUVY'.

Se observa que cuando el esfuerzo cortante cambia de signo o pasa por cero, sobre esta vertical está la ordenada máxima del momento de flexión. Esto se puede probar también analíticamente, en efecto:

Para $a < x$; es decir, cuando la fuerza F está entre el punto M y el apoyo izquierdo, el momento es:

$$\mathcal{M} = \frac{F \cdot x (1-a)}{l} \quad (1)$$

y la derivada de esta expresión dará el esfuerzo cortante C:

$$\frac{d\mathcal{M}}{dx} = d \left[\frac{F \cdot x (1-a)}{l} \right] = \frac{F (1-a)}{l} = C \quad (5)$$

y para $x > a$, el momento es:

$$\mathcal{M} = \frac{F \cdot a (1-x)}{l} \quad (6)$$

y la derivada es:

$$C = -\frac{F \cdot a}{l} \quad (7)$$

Las expresiones (5) y (7) son idénticas a la (2) y (3); esta última cambiada de signo, que es el esfuerzo cortante negativo.

Se observa también que el momento de flexión máximo, se produce siempre bajo el punto de aplicación de la carga.

En efecto si tomamos otro punto de aplicación de la carga, el N por ejemplo: la línea representativa de los momentos de flexión es también un triángulo, el XVY, fig. 62-a. Este triángulo tiene siempre por base la luz de la viga y por altura la expresión (1).

En este trazado hemos hecho, que el lado de ciene sea siempre horizontal; para lo cual el polo se tomará sobre la horizontal trazada por el punto que determina las reacciones,

pues éstas cambian en relación con la posición de la carga. En efecto, tomaremos la misma distancia polar del de la fig. 62; así las ordenadas mediremos a la misma escala. Se ve que las ordenadas bajo el punto M son iguales en las dos figuras, puesto que la posición de la carga es la misma.

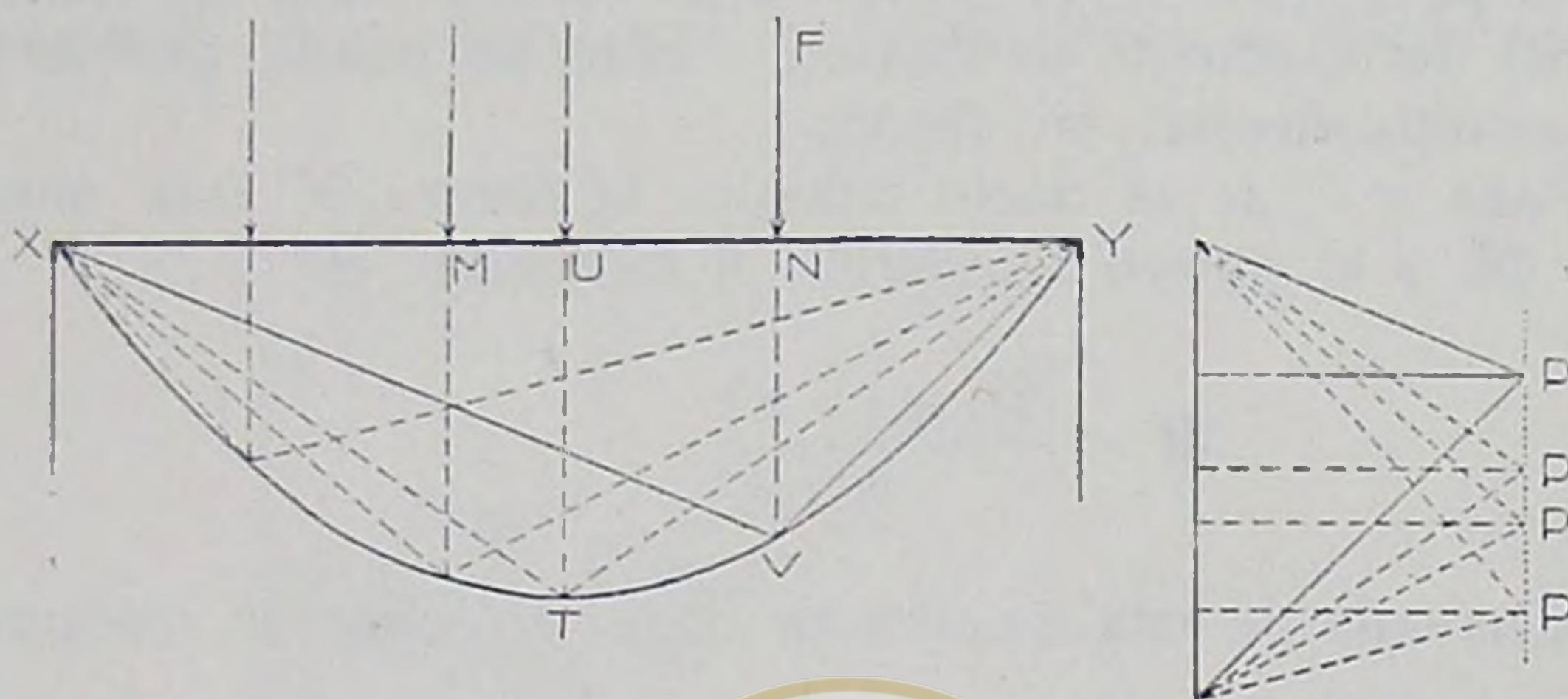


fig. 62-a

Si la carga se desplaza, la fórmula (1) indica que el vértice V describe una parábola y el mayor de los momentos se produce en la mitad de la luz, siendo su valor el ya conocido:

$$\mathcal{M} = UT = \frac{F \cdot l}{4}$$

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

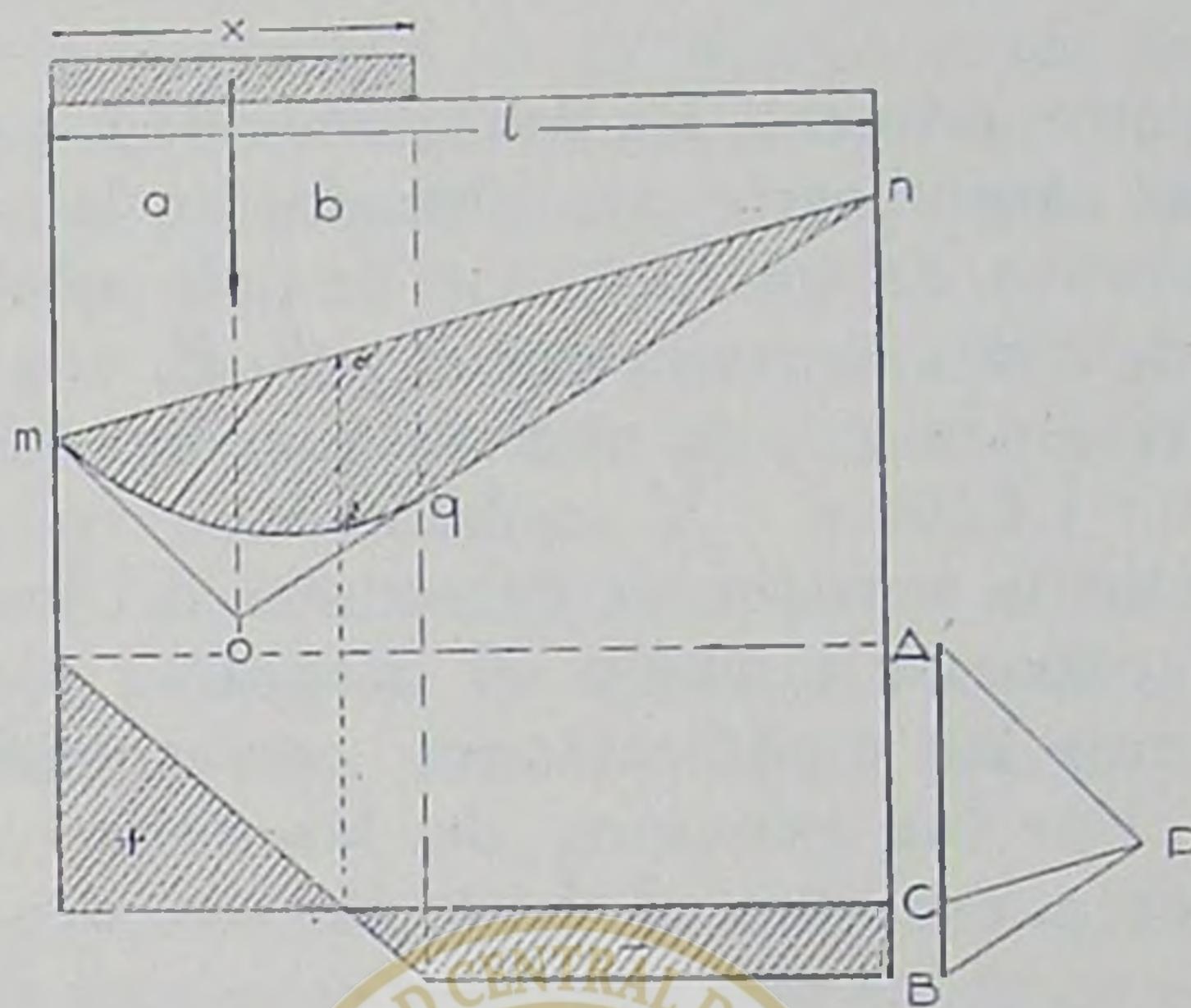
La parábola la trazaremos según el método indicado en el Nº. 62; haciendo

$$UT = \frac{F \cdot l}{4}$$

Entonces el diagrama representativo de los momentos de flexión, para una posición cualquiera N de la fuerza F, se encuentra bajando una vertical por este punto hasta que encuentre la parábola; luego se une este punto a los apoyos y el triángulo XUV será la línea buscada.

Ya tendremos ocasión de aplicar estos conocimientos cuando hablemos de cargas móviles.

64.—3º. Caso particular. Encontrar los diagramas de los momentos de flexión y esfuerzos cortantes para una viga de dos apoyos libres, en la que se aplica una carga uniformemente repartida, sólo en una parte de la longitud.



Sea la viga XY de longitud l ; a partir del apoyo X tiene una carga uniforme de longitud x .

Para obtener el diagrama de los momentos de flexión se opera como en el caso precedente. Se traza la carga concentrada en la mitad de la zona cargada y equivalente a la carga uniforme. El dinámico es $ABC\bar{A}$ y el funicular correspondiente, que se reduce a un triángulo es mon , cuyo lado de cierre es mn .

Las proyecciones de los extremos de la carga uniforme sobre el funicular, dan los puntos de tangencia m y q de la parábola, que es la curva que limita en el diagrama de momentos, para esta clase de carga; que se la traza según el procedimiento ya conocido. La ordenada máxima es $\alpha\beta$ que debe estar en la misma vertical donde el esfuerzo cortante es nulo.

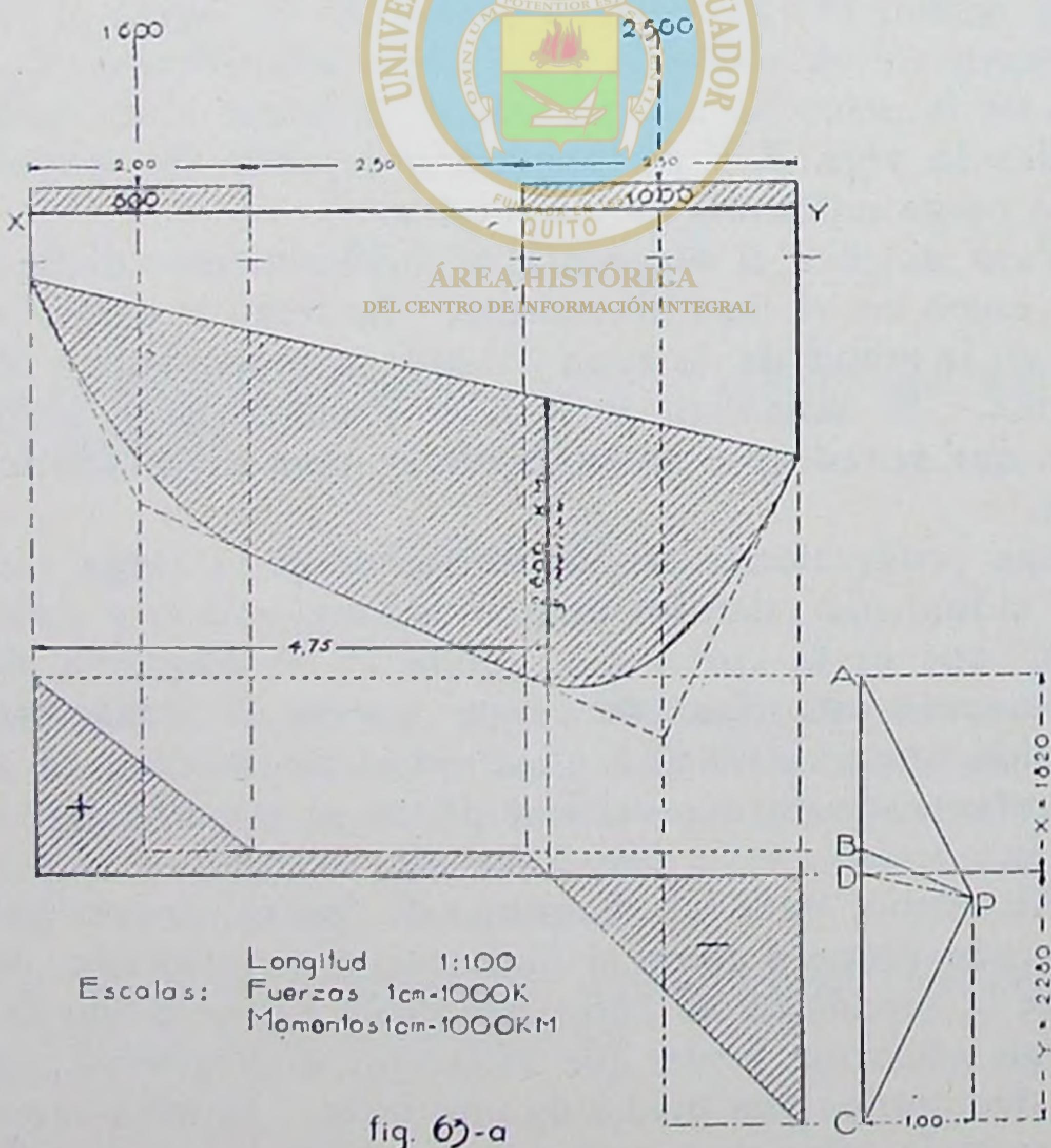
Asimismo, para el diagrama de los esfuerzos cortantes se procede primero como si fuera carga concentrada; después se hace la modificación correspondiente proyectando la zona de carga uniforme hasta que intercepte al diagrama, luego se une estos puntos por medio de una recta. El área superiores positiva y la inferior negativa.

65.—Aplicación.—Sea una viga de 7 m. de luz, sobre la que actúan cargas parciales y uniformes de 2,00 m. y 2,50 m. de longitud y de intensidades de 800 a 1.000 kilos por metro lineal; situadas en cada extremidad de la viga. Vamos a trazar los diagramas de momentos y de esfuerzos cortantes.

Se encuentra primero las reacciones de los apoyos, considerando a las cargas como concentradas en la mitad de cada zona y valiéndonos de un funicular de polo arbitrario; la paralela al lado de cierre, trazada por el polo P, nos determina el punto D, en el dinámico; de manera que, fig. 63 a.

$$X = 1.820 \text{ k.; } Y = 2.280 \text{ k.}$$

Para el cálculo anterior, se necesitaba del funicular que a la vez nos representa también el diagrama de momentos. En éste haremos las modificaciones correspondientes a carga repartida. Por los extremos de las zonas cargadas, se bajan verticales que cortan al funicular en dos puntos que



son los de tangencia de la parábola. La curva deberá estar comprendida entre estos dos puntos; tal como claramente se ve en la fig. 63 a.

Así queda completamente definida el área de momentos, la que está sombreada.

El momento máximo se encuentra sobre la vertical trazada por el punto donde el esfuerzo cortante pasa por cero, que ocurre a los 4,75 m. del apoyo izquierdo y su valor es $M = 2.600$ km.

El diagrama de los esfuerzos cortantes se han trazado por los métodos conocidos, con ayuda del dinámico que se le sitúa en lugar conveniente.

El esfuerzo cortante máximo, se presenta en el apoyo derecho y cuyo valor es de 2.280 k., igual al valor de la reacción de este apoyo, y es de signo negativo.

66.—Caso en que la carga no está repartida uniformemente, sino que va aumentando sucesivamente de un punto de valor de cero a otro de valor máximo.

Estas cargas se presentan cuando se trata de la presión de tierra o cualquier otro material pulverulento.

Sea una viga de 8 m. de luz y soporta arena en talud natural de 3:1.

Distan entre sí las vigas de 0,80 m. La densidad de las tierras es de 1,60. Encontrar los diagramas de momentos de flexión y esfuerzos cortantes, fig. 63 b.

La repartición de las cargas se indica en la figura, por el triángulo VXY. Los demás datos numéricos constan en la figura.

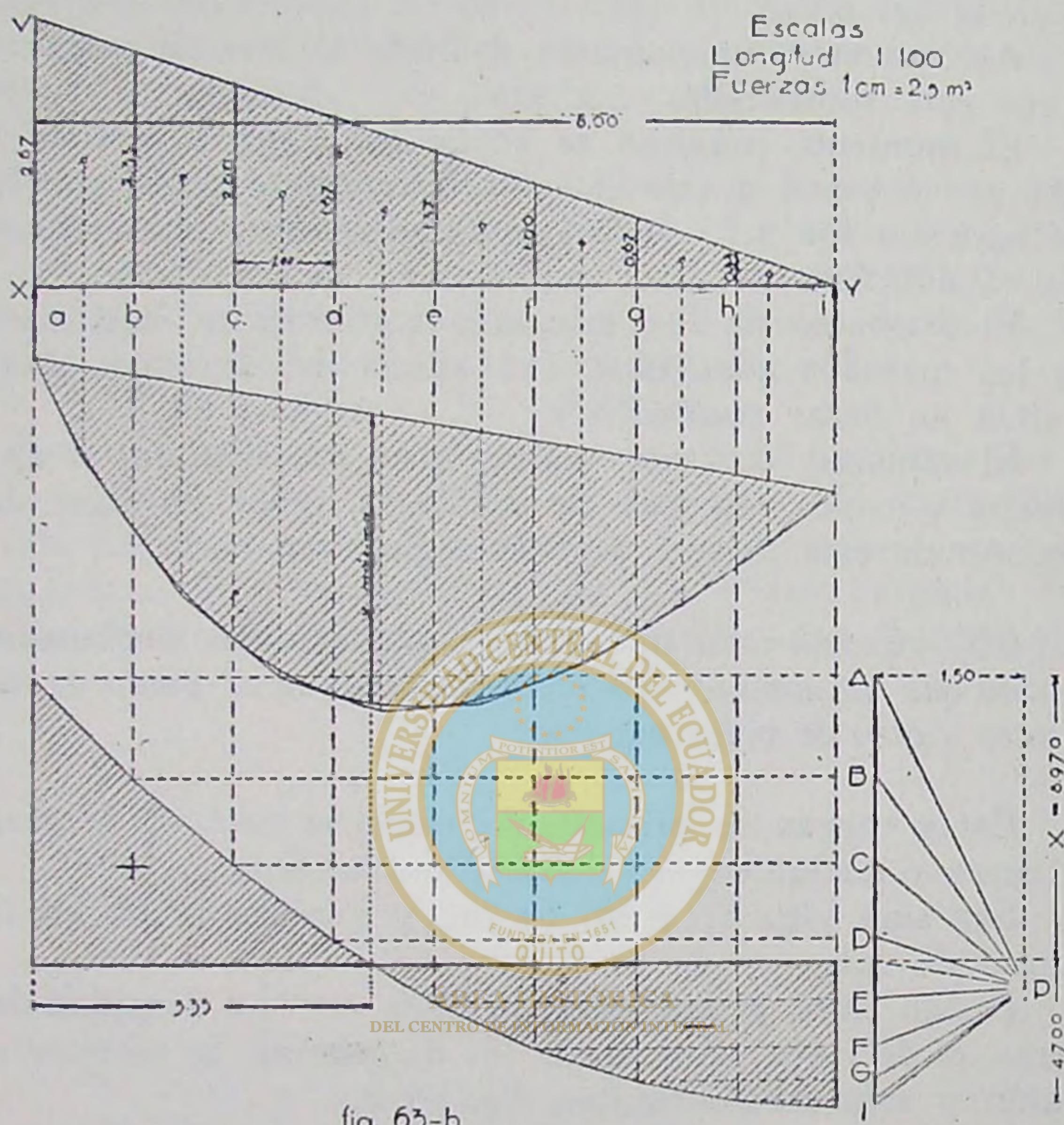
El peso total que gravita sobre la viga es:

$$\frac{2,67 \times 8}{2} \times 0.80 \times 1.600 = 13.670 \text{ kilos.}$$

Como no es uniformemente repartida la carga, se divide el triángulo VXY en fajas estrechas; para concretar ideas hemos dividido en 8 fajas de 1 m. de ancho. Cada una de estas figuras así descompuestas son trapecios y la última un triángulo.

Se averigua las áreas de estos trapecios y luego multiplicando por la densidad se encuentra el peso. Entonces se

determina los centros de gravedad, por medio de los métodos indicados en las págs. 31 y 32.



En estos centros de gravedad actúan los pesos correspondientes a cada trapecio.

En el caso presente, para simplificar los cálculos, hemos hecho igual a la base media respectiva; puesto que tienen la misma altura y profundidad.

Con estas bases medias hemos trazado el dinámico AB.....I y el funicular de polo P. La distancia polar es de 1,5 m.

La paralela al lado de cierre, trazada por P nos determina las reacciones,

$$X = 8,970 \text{ k.;} \quad Y = 4,700 \text{ k.}$$

Después se hacen las modificaciones del funicular para carga repartida; que en este caso el área de momentos está limitada por una parábola cúbica.

El diagrama de los esfuerzos cortantes se construye proyectando las divisiones de la carga hasta que se corten con las horizontales trazadas por los extremos de los pesos del dinámico. La figura explica muy bien por sí misma.

La linea que limita el diagrama de los esfuerzos cortantes es una parábola cuadrática.

El momento máximo de flexión se encuentra, sobre la vertical trazada por el punto donde el esfuerzo cortante se anula. Este punto dista del apoyo izquierdo 3,25 m.

La ordenada máxima mide 28 m/m. Como la escala del dinámico es 1 centímetro por 2,5 metros cuadrados, tendremos:

$$I = 2,8 \times 2,5 = 7,00 \text{ m}^2.$$

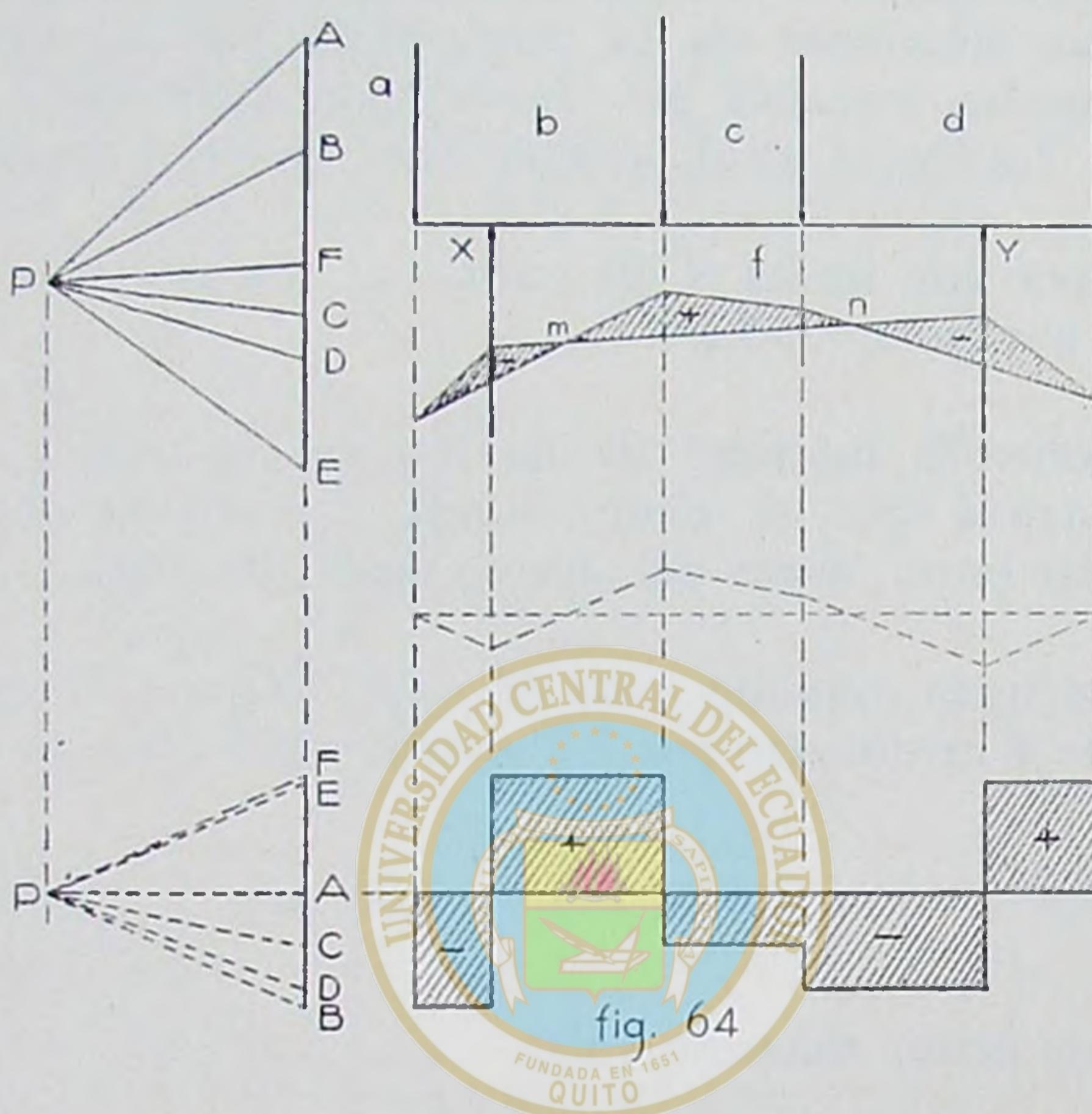
Luego el momento máximo vale:

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$M = 7 \times 0,8 \times 1.600 \times 1,50 = 13.440 \text{ km.}$$

El esfuerzo cortante máximo ocurre en los apoyos y es igual a las magnitudes de las reacciones de los apoyos, con su signo respectivo: es positiva el área que está sobre la horizontal y negativo la que está bajo esta línea.

67.—5º. Momentos de flexión y esfuerzos cortantes para una viga salidiza en ambos extremos y sometida a cargas concentradas.



ÁREA HISTÓRICA

Sea la viga XY, en la que actúan las cuatro fuerzas representadas en la fig. 64.

La primera fuerza ab y la última de, están aplicadas en los extremos volados de la viga.

Las intersecciones del primero y último lado del funicular con la vertical de los apoyos, determinan el lado de cierre, y una paralela a esta línea por el polo nos dá las magnitudes de las reacciones X y Y.

El diagrama de los esfuerzos cortantes se traza, llevando, a partir de una línea horizontal la magnitud de la primera fuerza, la ab, hacia abajo, o sea en el sentido de la fuerza, de allí una horizontal hasta la línea de la reacción y de este punto, hacia arriba, la magnitud de la reacción X, y así sucesivamente.

El diagrama de los momentos de flexión, está hecho, con el trazado del funicular y su lado de cierre, que forman tres áreas diferentes; que se interpreta diciendo que el área que

está bajo el lado de cierre los momentos son negativos; en el caso contrario, los momentos son positivos. Pero como las áreas del funicular pueden cambiar, las de arriba poniéndose bajo la linea de cierre y reciprocamente, con sólo cambiar el polo P, situándolo al otro lado del dinámico, vale más analizar así:

Los esfuerzos cortantes cambian de signo, tanto en los apoyos, como bajo la fuerza bc y según lo establecido antes, se deduce que hay tres momentos máximos. En cualquier punto de la viga, a la izquierda del apoyo X, la resultante de las fuerzas exteriores (esfuerzo cortante), está dirigida hacia abajo y actúa a la izquierda del apoyo; engendra, pues, un momento negativo. En los puntos de la viga, comprendidos en la región entre X y m, la resultante tiene su punto de aplicación a la derecha y está dirigida hacia arriba; luego también engendra un momento negativo.

En los puntos m y n no hay momento: por esto se les llama puntos de momento nulo. La deformación de la viga cambia en estos puntos, razón por la cual también se les llama a estos puntos, de inflexión.

El área que está entre los puntos m y n, los momentos son positivos.

En la figura 64, se ha trazado en líneas de puntos el funicular con el lado de cierre horizontal: para esto, se dibuja el dinámico trasladando las fuerzas en el orden que se las encuentra: de suerte que después de ab, se traza la reacción X, en su propio sentido y así con las demás; la distancia polar se hace también igual a la primera.

Mas simple es, a partir de una línea horizontal, trasladar las ordenadas del diagrama de momentos en las respectivas líneas de acción de las fuerzas y después se une los extremos y se tiene un diagrama idéntico al trazado con líneas de puntos en la fig. 64.

68.—Diagrama de los momentos de flexión y esfuerzos cortantes para una viga salidiza en ambos extremos y con carga uniforme.

1º. Caso.—La parte salidiza de la viga es igual en ambos extremos y mide 2 m.; la longitud entre apoyos es de 5 m.; la carga uniforme es de 500 kilos por metro.

Por la simetría de la carga, respecto de la mitad de la viga, las reacciones X y Y son iguales, cada una soporta la mitad de la carga total.

Debemos considerar separadamente las cargas repartidas sobre las partes UX, XY y YV. Las intensidades de las cargas son evidentemente proporcionales a la longitud de cada una de estas partes.

Habiendo así determinado las intensidades de cada una de las fuerzas, que consideraremos por lo pronto aplicadas en la mitad de cada una de las regiones, construyamos el dinámico, tomando el polo P sobre una horizontal. Del punto A de esta horizontal se lleva la fuerza A-B igual a 1.000 kilos, porque la carga repartida tiene una intensidad de 500 kilos por metro y como tiene 2 metros de largo dá 1.000. A partir del punto B se lleva la magnitud de la reacción en X = CB igual a 2.250 kilos, que es la mitad de la carga total. Del punto C la magnitud C D igual a 2.500 kilos, que es la carga sobre la parte intermedia. De D la magnitud de la reacción Y = D E igual a 2.250 kilos. Y por fin la fuerza E A, magnitud de la tercera porción e igual a 1.000 kilos, que cierra el dinámico.

Se construye el funicular hijkl; teniendo cuidado de trazar estos lados paralelos al respectivo radio polar; fijándonos el orden en que colocamos las fuerzas en el dinámico.

Pero como la carga que lleva la viga, es uniformemente repartida, hay que hacer las modificaciones convenientes en el funicular.

A cada una de las tres porciones en que está dividida la viga, por las verticales de los apoyos, corresponde una parábola, tangente en los puntos que las limitan. Los puntos m y i, para la parábola que corresponde a la sección U X. Para la sección simétrica los puntos k y n.

Para la región intermedia los puntos i y k son los puntos de tangencia.

Se puede también proceder de otra manera: Para lo cual se traza primero el diagrama de los momentos de flexión para la región intermedia X Y, con prescindencia de las dos partes voladas, para carga uniformemente repartida y se obtiene el área encerrada dentro de la parábola i' o' k' (fig. 65).

Luego se pone el valor del momento que la carga sobre la viga salidiza ejerce sobre el apoyo, que es igual $pl^2/2$; en la que p es la carga uniforme por unidad y l es la longitud de

la parte salidiza. Las dos partes salidizas son iguales, los momentos serán también iguales y cuyo valor es de 1.000 km. Este valor se traslada a escala a partir de los puntos i' y k' y así se tiene los puntos h' y l' ; se une estos puntos por una línea; entonces se trazan los arcos de paráolas $l'n'$ y $h'm'$. Las áreas sombreadas son las que representan el diagrama de los momentos de flexión para este caso de carga.

Por la simple inspección de la figura se notará que las dos áreas de momentos trazadas son iguales.

Los momentos máximos se obtienen en los dos apoyos y en el medio de la viga.

Los momentos de los apoyos son negativos y valen

$$if = i'h' = gk = k'l' = 1.000 \text{ km.}$$

En momento en la mitad de la viga es positivo y vale

$$op = o'p' = 560 \text{ km.}$$

Estos momentos hemos medido con la escala de momentos, en la que un centímetro equivale a 1.000 km.

Para la construcción del área representativa de los esfuerzos cortantes, se hace, lo que hemos dicho antes por analogía en casos de carga uniformemente repartida.

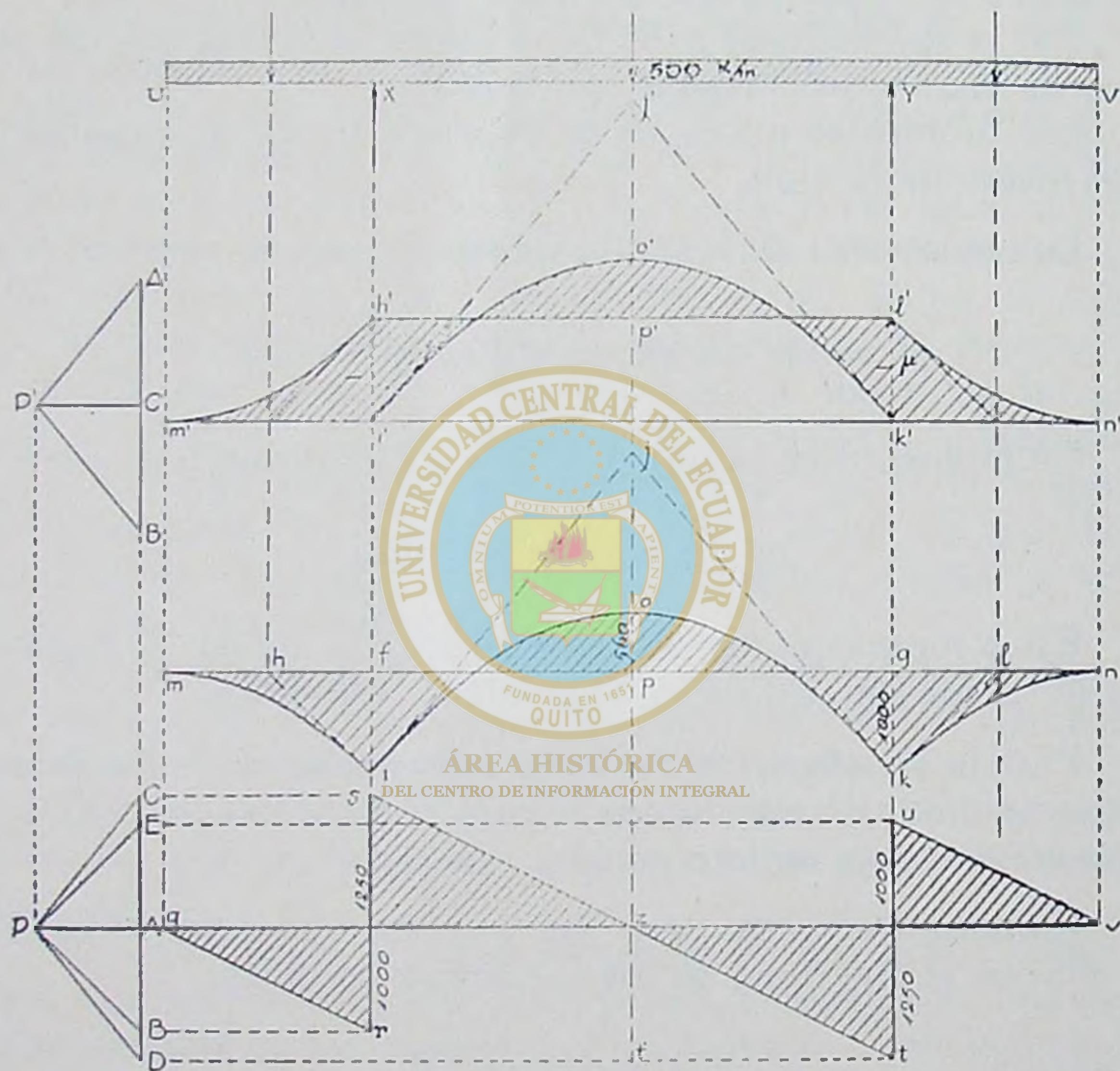
Primero trazamos para las tres fuerzas concentradas y se obtiene el diagrama de los esfuerzos cortantes

$$q' r' rss' t' tuu' v'.$$

Luego se hace las modificaciones que corresponde a carga uniforme, trazando las líneas $q - r$, $s - t$ y $u - v$. Se tiene así el área sombreada $qrstuv$.

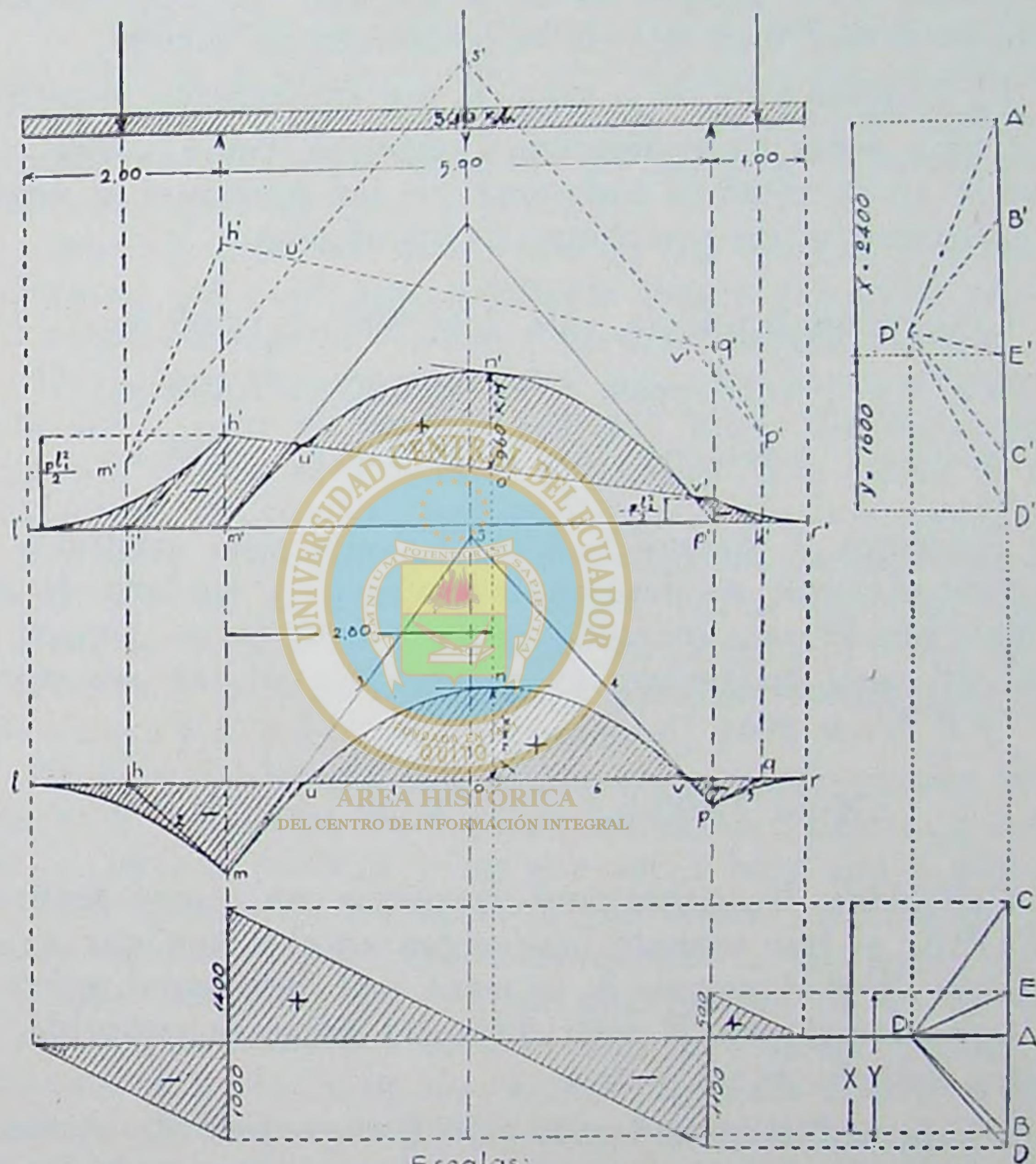
Como antes, las áreas que están sobre la horizontal son positivas; las que están debajo negativas.

Se observará que en el punto z , el diagrama de los esfuerzos cortantes pasa por cero y luego cambia de signo; la proyección de este punto nos dà el punto del momento máximo. También cambia de signo, el esfuerzo cortante, en los apoyos que corresponde a momentos máximos negativos.



Escalas : longitud: 1:100
 fuerzas : 1 cm = 1000 K.
 momentos: 1 cm = 1000 K.M

fig. 67



Escalas:

longitud 1:100
 fuerzas 1cm = 1000 K.
 momentos 1cm = 1000 K.M

fig. 69 a

69.—2º. Caso. La parte salidiza es desigual.

En la fig. 65 a, consideramos así mismo, una carga repartida de 500 kilos por metro.

La luz entre apoyos es de 5 metros. La parte salidiza izquierda mide 2 metros y la de la derecha un metro.

La longitud total de la viga, es por consiguiente 8 metros.

Como antes, consideraremos primero como carga concentrada en la mitad de cada una de las porciones y vamos así a determinar las reacciones de los apoyos.

La porción izquierda vale $2 \times 500 = 1.000$ k.

» » intermedia » $5 \times 500 = 2.500$ k.

» » derecha » $1 \times 500 = 500$ k.

Tracemos el dinámico A'B'C'D' con polo arbitrario P' y el funicular que se desprende *l'm's'p'q'* y su lado de cierre *h'q'*; por P' una paralela a esta linea y se obtiene el punto E' que determina las magnitudes de las reacciones D'E' y E'A', o sea:

$$X = 2.400 \text{ k.; } Y = 1.600 \text{ k.}$$

ÁREA HISTÓRICA

DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Conocidas las reacciones tracemos un nuevo dinámico ABCDEA, se han tomado las fuerzas en el orden que se encuentran. Por el origen A, se traza una horizontal, sobre la que tomamos el polo P cuya distancia polar es conocida, en nuestro ejemplo es un metro.

Dibujemos el funicular de polo P cuyo lado de cierre es horizontal. Para evitar confusiones hemos numerado los radios polares y los mismos números tienen los lados correspondientes del funicular. Este es el *lhmspqr*.

Ahora hagamos las modificaciones en el funicular, últimamente trazado, para carga uniformemente repartida; para esto tracemos los arcos de parábola, bajo cada una de las porciones en que se ha dividido la viga: la parábola *lm* para la porción de dos metros y tangente en estos puntos; la parábola *mnp*, para la región intermedia y tangente en *m* y *p*; y la parábola *pr* para la porción izquierda y tangente en los puntos *p* y *r*.

El área sombreada será el diagrama representativo de los momentos de flexión para una viga con extremos salidizos y con carga uniformemente repartida.

Las áreas que están sobre el lado de cierre del funicular son positivas, las que están bajo negativas.

Se puede también proceder como en el caso primero: Trazando primero la parábola sólo para la región intermedia, con exclusión de las porciones salidas, para carga uniforme. Se tiene entonces la parábola $m'n'p'$; pues la ordenada en la mitad tiene que ser igual a $pl^2/8$.

Determinemos los momentos en los apoyos a causa de la carga en las porciones salidas; tienen por valor $pl_1^2/2$ y $pl_2^2/2$ para la izquierda y para la derecha respectivamente.

Con los valores numéricos nos dá para el primero 1.000 km.; para el segundo es 250 km. Se lleva sobre la vertical de los apoyos estas magnitudes a la escala de momentos y se obtiene los puntos h' y v' . Se une estos puntos con una recta, pues los momentos no cambian en esta región; entonces se trazan las líneas $h'i'$ y $v'k'$. Se trazan los arcos de paráolas tangentes a las líneas $l'i'$ y $h'i'$ en los puntos l' y h' para la izquierda; y para la derecha tangentes a las líneas $v'k'$ y $k'r'$ en los puntos v' y r' .

El área sombreada será el diagrama representativo de los momentos de flexión para carga uniforme. El área sobre el lado de cierre es positiva y las que están bajo son negativas.

El diagrama de los esfuerzos cortantes se traza de una manera semejante a los casos anteriores: se proyecta el dinámico, que nos sirvió para trazar el diagrama de los momentos de flexión, hasta que corte a cada una de las fuerzas que actúan sobre la viga y en sus respectivas líneas de acción para cargas concentradas; luego se hace las modificaciones para cargar uniformes como hemos hecho ya en otros casos. El gráfico explica por sí mismo el proceso.

Los momentos máximos ocurren en tres puntos: en los dos apoyos y en un punto más o menos intermedio entre éstos. Se observa en los diagramas, que cambia el punto del momento máximo a medida que una de las porciones salidas es más grande que la otra. Es por esto que el momento máximo no está en la mitad de la viga; sino en un punto donde la parábola tiene la tangente paralela al lado de cierre $l'r$ o $h'v'$. En el caso presente, está a 2,80 m. del apoyo izquierdo, y vale:

$$\mathcal{M} = \text{on} \times \Delta = 960 \times 1 = 960 \text{ km.}$$

La una magnitud a la escalas de las fuerzas y la otra a la de las longitudes; pero en nuestro caso, la distancia polar es igual a la unidad, será suficiente medir las ordenadas a la escala de las fuerzas, que es también la escala de momentos.

Otra manera de obtener el punto de momento máximo es el de proyectar el punto donde el esfuerzo cortante es nulo: en efecto, en la fig. 65 a, sobre la misma linea de esfuerzo cortante nulo, está el momento máximo.

Así mismo los momentos máximos negativos, corresponde donde el esfuerzo cortante cambia de signo, o sea en la región de los apoyos.

El esfuerzo cortante máximo ocurre en los apoyos. Midamos las ordenadas del diagrama a la escala de las fuerzas:

Para el apoyo izquierdo dá:

antes del apoyo $C = -1.000 \text{ k.}$

después del apoyo $C = +1.400 \text{ k.}$

Para el apoyo derecho:

A HISTÓRICA

DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

antes del apoyo $C = -1.100 \text{ k.}$

después del apoyo $C = +500 \text{ k.}$

Verifiquemos los trazados anteriores por medio de las fórmulas que nos dá la Resistencia de Materiales: el momento máximo entre los apoyos es:

$$\mathcal{M}_m = \frac{p}{8} \left[\frac{l^2 - l_2^2 + l_1^2}{l} \right]^2 - \frac{p l_1^2}{2} = \frac{500}{8} \left[\frac{5^2 - 1^2 + 2^2}{5} \right]^2 - \frac{500 \times 2^2}{2} = 960 \text{ k.m.}$$

y está a una distancia del apoyo izquierdo de:

$$x = \frac{l^2 - l_2^2 + l_1^2}{2l} = \frac{25 - 1 + 4}{10} = 2,80 \text{ m.}$$

que está de acuerdo con los resultados anteriores.

70.—4º. Momentos de flexión y esfuerzos cortantes para una viga cantiliver; o lo que es lo mismo una viga empotrada en una extremidad y libre en la otra, con carga uniforme y luego con cargas concentradas.

Este caso también estudiemos en conexión con datos numéricos:

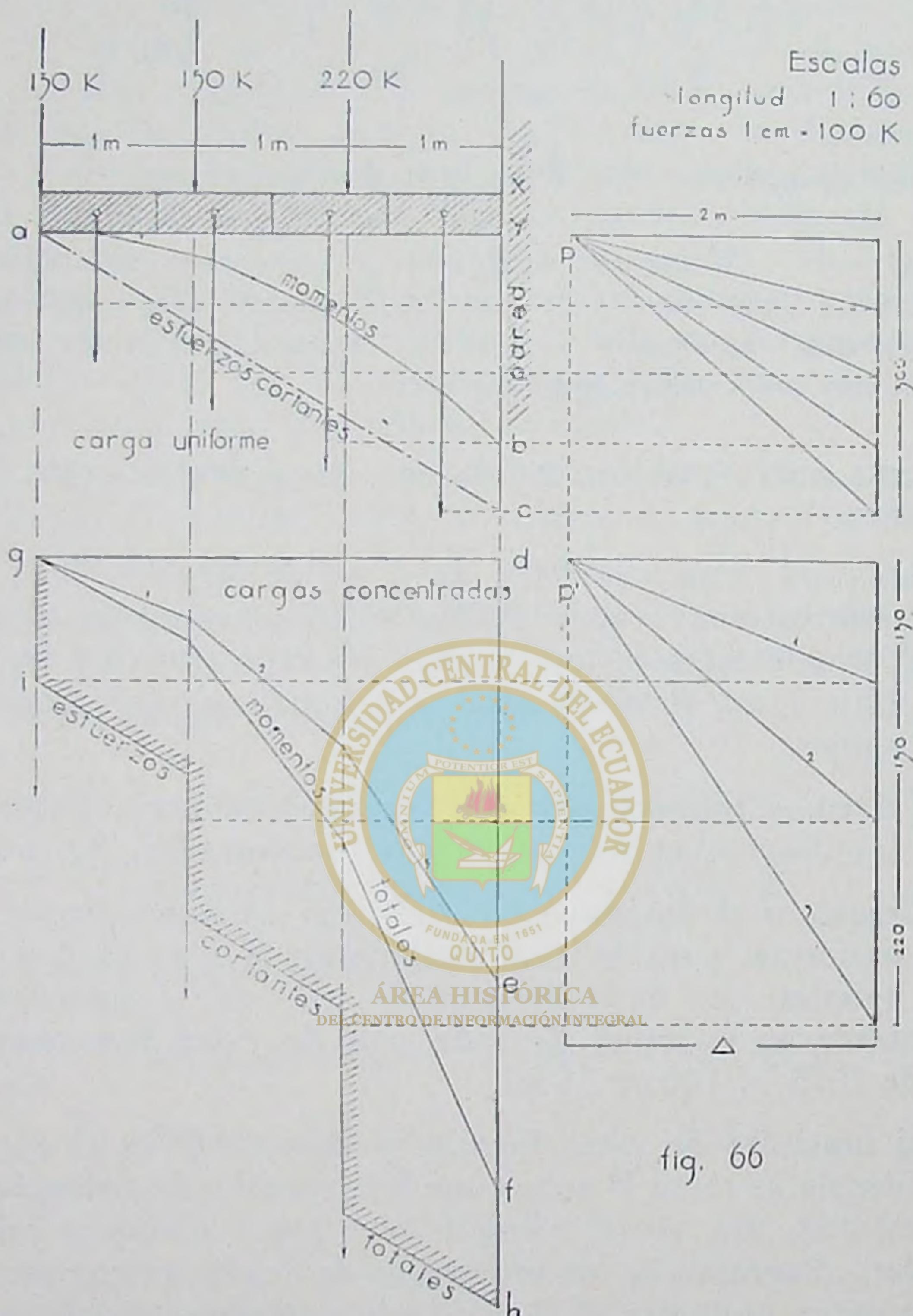
Sea una viga cantiliver de 3 m. de largo y lleva una carga uniformemente repartida de 100 kilos por metro; además de ésta, actúan también tres fuerzas concentradas de 130, 150 y 220 kilos a una distancia de 3, 2 y 1 metros, respectivamente, del apoyo.

Tratemos primero sólo con la carga uniforme, luego haremos los diagramas con las cargas concentradas, fig. 66.

Tracemos el dinámico y el funicular correspondiente a la carga uniforme; para lo cual dividiremos la viga en 4 o más partes iguales; sea cada división de 0,75 m., y supondremos concentrada en la mitad de cada una de estas divisiones, un peso de $0,75 \times 100 = 75 \text{ k.}$

El funicular de estas fuerzas y de polo P es el ab; por conveniencia se toma P sobre una horizontal y de distancia polar conocida, sea en el ejemplo $\Delta = 2 \text{ m.}$ Como se sabe el verdadero diagrama de los momentos de flexión es una parábola para carga uniforme, el funicular encontrado está circunscrito a la curva y los puntos de tangencia son a y b; las intersecciones de las verticales de los puntos de división con el funicular son puntos de la curva.

En la práctica, la parábola difiere muy poco del funicular y es inútil de trazarla, siempre que las divisiones sean suficientemente numerosas. De lo contrario será mejor dibujar la parábola, para tener resultados exactos.



Tenemos por la inspección de la fig. 66, que el máximo de los momentos ocurre en el apoyo XY y vale:

$$\mathcal{M}_m = Yb \times \Delta = 225 \times 2 = 450 \text{ Kgm.}$$

Yb se mide a la escala de las fuerzas y Δ al de las longitudes. Por cálculos tenemos que el momento máximo es:

$$\mathcal{M}_m = -\frac{p l^2}{2} = -\frac{100 \times 3^2}{2} = -450 \text{ Kgm.}$$

Sabemos que el diagrama del esfuerzo cortante para carga uniforme, está limitado por una línea recta; puesto que la expresión es:

$$C = -px$$

y el máximo vale

$$C = -pl$$

Esta línea recta se obtiene proyectando las magnitudes de cada una de las fuerzas del dinámico sobre las verticales de los puntos de división. La línea es ac y el área del esfuerzo cortante es acY. Por comodidad se principia el trazado del punto a.

Cargas concentradas. Para estas cargas se hace un dinámico especial y el funicular correspondiente, de la misma distancia polar que el anterior, Δ , (véase en la parte inferior de la fig. 66 con líneas de trazos).

El área *gde*, es el diagrama de los momentos de flexión para las cargas concentradas.

$$\mathcal{M}_m = de \times \Delta = 455 \times 2 = 910 \text{ km.}$$

Para tener los momentos totales, es suficiente añadir las ordenadas correspondiente de los dos funiculares. Se obtiene así el contorno poligonal *gf*, dibujado con líneas llenas.

El momento máximo total es:

$$\mathcal{M}_m = \Delta (Yb + de) = 2 (225 + 455) = 1.360 \text{ km.}$$

El cálculo dá para el momento total máximo:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_m &= -\frac{p l^2}{2} - P_1 \times 3 - P_2 \times 2 - P_1 \times 1 = \\ &= -\frac{100 \times 3}{3} - 130 \times 3 - 150 \times 2 - 220 \times 1 = -1.360 \text{ km.} \end{aligned}$$

Los esfuerzos cortantes para cargas concentradas, sabemos ya encontrar, proyectando los extremos de las fuerzas; en la figura está en línea de puntos.

El diagrama de los esfuerzos cortantes totales se obtiene haciendo la suma de las ordenadas de los dos diagramas que hemos trazado; resulta así el contorno en gradería $i h$. El esfuerzo cortante máximo es:

$$C_m = dh = 800 \text{ kilos.}$$

Se puede proceder también simultáneamente, considerando las fuerzas repartidas y las concentradas para obtener un solo diagrama de resultados totales, trazando un dinámico y un funicular. Para esto, se toma como punto de división de la carga repartida el de la línea de acción de la fuerza concentrada; aplicando en la mitad del espacio comprendido entre dos fuerzas y de magnitud proporcional a éste. Luego se procede como en los casos ordinarios.

71.—Nota. Frecuentemente los alumnos se preguntan ¿qué utilidad tiene este valor del momento máximo de flexión? Por eso, aunque no corresponde a nuestro estudio, daremos el uso que se hace:

El momento máximo total es 1.360 kgm. Con este valor vamos a determinar la sección transversal de la viga de madera para las condiciones del ejemplo. La resistencia práctica de la madera es 50 k/cm².

La conocida fórmula de la flexión es:

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{c}$$

en la que M es el momento máximo de flexión; R la resistencia máxima admisible; I el momento de inercia de la sección transversal; c la distancia de la fibra más remota.

Sustituyendo valores tenemos:

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{c} = \frac{1.360}{50 \times 10^4} = 0,00272$$

que es el valor del módulo de resistencia de la viga.

Hay una infinidad de secciones que pueden corresponder a este valor, por esto es necesario fijar la forma y la altura de la viga para determinar el problema.

Si suponemos, después de las consideraciones de la construcción, que la viga puede estar formada por una sección rectangular, en la que su ancho y su alto deben estar en la proporción de 5 a 7, que es la viga más resistente; se tiene designando por h y b la altura y el ancho de la viga:

$$\frac{I}{c} = \frac{b h^3}{6} = 0,00272$$

y como $b = \frac{5}{7} h$, reemplazando se tiene:

$$\frac{5 \times h \times h^2}{7 \times 6} = \frac{5 h^3}{42} = 0,00272$$

de donde $h = \sqrt[3]{0,00285} = 0,14 \text{ m.}$

$$\text{y } b = \frac{5}{7} h = \frac{5 \times 0,14}{7} = 0,10 \text{ m.}$$

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Ahora se necesita verificar si la resistencia de la sección es suficiente para el esfuerzo cortante.

Se tiene:

$$C_m = -(300 + 130 + 150 + 220) = -800 \text{ kilos}$$

en efecto en el diagrama del esfuerzo cortante da:

$$C_m = dh = -800 \text{ kilos.}$$

Si se admite, aproximadamente, que este esfuerzo se reparte igualmente en la sección transversal, se encuentra

$$c = \frac{C}{A} = \frac{800}{0,14 \times 0,10} = 57.142 \text{ k/m}^2.$$

o sea

$$c = 5,7 \text{ k/cm}^2.$$

Como este valor es muy pequeño, no hay necesidad de aplicar la fórmula exacta y se puede contentarse con esta aproximación, que la viga resiste con exceso.

72.—Momentos de flexión y esfuerzos cortantes para una viga con carga uniforme y concentrada a la vez.

En la mayor parte de los problemas que se presentan en la construcción, las cargas se componen de repartidas uniformemente y aisladas. Por lo cual analicemos el siguiente caso:

Sea una viga XY en la que reposan las dos cargas concentradas ab y cd ; además también actúa una carga uniformemente repartida sobre la región mo de la viga, de intensidad p por metro lineal, fig. 67.

Como en la región que se aplica cd está también la carga uniforme, no podremos reemplazar a ésta con una sola fuerza equivalente; sino dividir en zonas limitadas por cada fuerza concentrada, así: primero la zona mn , que no tiene ninguna otra fuerza, la reemplazamos por la bc aplicada en la mitad y proporcional a esta longitud. Después viene la fuerza concentrada cd , y de aquí consideramos la zona no , que no tiene ninguna otra fuerza, esta región no se reemplaza por la fuerza de , que actúa asimismo en su mitad y proporcional a la longitud no .

Con estas modificaciones hemos trazado el dinámico ABCDEFA y el funicular correspondiente.

Ahora hagamos en el funicular los cambios correspondientes a carga repartida: se proyecta los puntos m y n sobre el funicular ya trazado y en este lugar se dibuja un arco de parábola, tangente en p y q .

Así mismo, se proyecta la región no y tangente en q y r , se traza otro arco de parábola. Así queda terminado el diagrama de los momentos de flexión.

Con este dinámico, es fácil trazar el diagrama de los esfuerzos cortantes, siguiendo las reglas ya conocidas. Después se hacen las modificaciones para carga repartida. Esto es fácil darse cuenta con sólo la inspección de la figura.

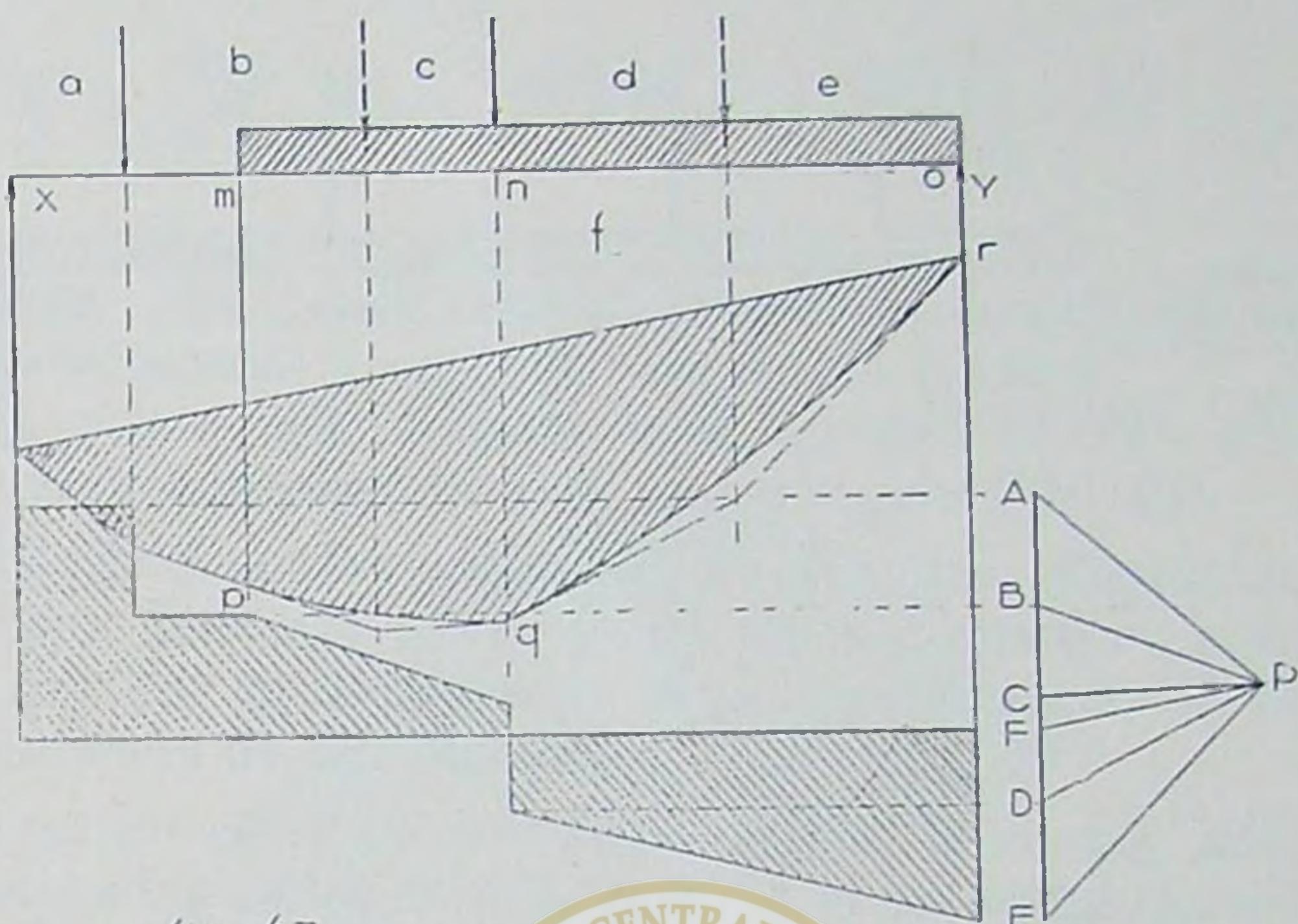


fig. 67

73.—Aplicación. Determinar los momentos máximos de flexión y el esfuerzo cortante, para una viga de 8 m. de luz, con carga uniforme de 400 kilos por metro y una carga concentrada de 800 kilos, colocada a 3 m. del apoyo izquierdo. Luego calcular la sección transversal de la viga.

ÁREA HISTÓRICA

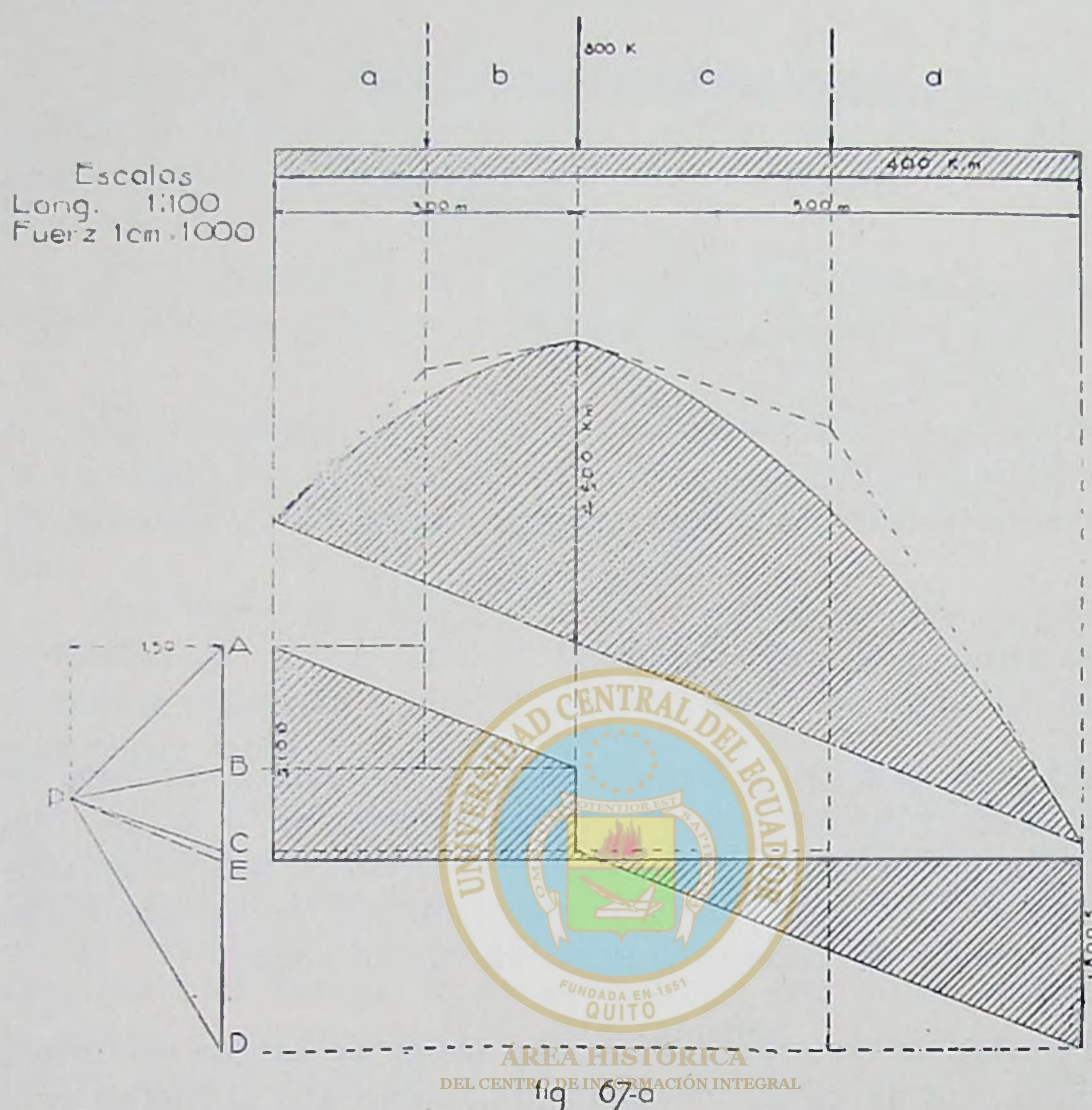
Primeramente se considera a las dos zonas de cargas uniforme, separadas por la carga concentrada, como que si fueran concentradas en la mitad de estas regiones e igual al valor de la respectiva carga repartida. Así la fuerza ab vale 1.200 k; la $cd = 2.000$ k. fig. 67-a.

Con estas fuerzas se traza el dinámico y el funicular correspondiente (líneas de puntos). Hecho esto se hace las modificaciones en ambos diagramas para cada carga uniforme; de manera que para la primera región, del diagrama de momentos, que mide 3 m. se traza la parábola tangente a los dos lados del funicular. Lo mismo se hace para la otra región que mide 5 m.

El área comprendida entre los dos arcos de parábola y el lado de cierre es el diagrama de momentos.

El momento máximo ocurre bajo la carga concentrada; midiendo la ordenada en este punto, tiene por valor:

$$\mathcal{M}_m = 4.500 \text{ k. m.}$$



La escala de momentos es 1 cm. = 1.500 k. m.

La escala de fuerzas es 1 cm. = 1.000 k. m.

La escala de longitudes es 1 : 100 m.

El diagrama de los esfuerzos cortantes no tiene ninguna dificultad para su trazado.

El valor del momento máximo, comprobemos con la fórmula, haciendo $x=3$ m.

$$M = Xx - \frac{px^2}{2} = 2.100 \times 3 - \frac{400 \times 3^2}{2} = 4.500 \text{ km.}$$

La reacción se calcula, por la fórmula ya conocida:

$$X = \frac{pl}{2} + \frac{F(l-a)}{l} = \frac{400 \times 8}{2} + \frac{800(8-3)}{8} = 2.100 \text{ k.}$$

Nota.—Se puede también trazar los diagramas, dibujando separadamente para cada una de las cargas.

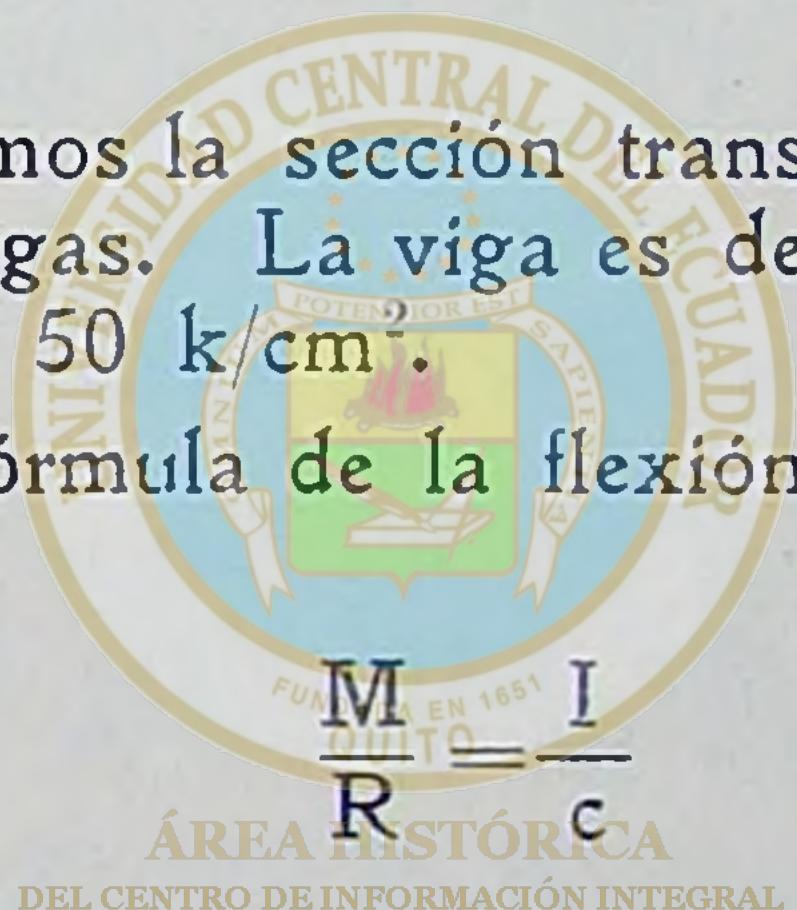
Para la carga uniforme será la parábola (Nº. 62) y para la carga concentrada será un triángulo (Nº. 63).

Se adicionan las ordenadas de los dos diagramas representativos, determinándose así un cierto número de puntos que se los une por medio de una curva que representa la curva de los momentos de flexión totales.

Para los esfuerzos cortantes se hace la misma adición, de las ordenadas de los dos diagramas encontrados para las dos clases de cargas.

Ahora calculemos la sección transversal de la viga para este sistema de cargas. La viga es de madera y la resistencia admisible es de 50 k/cm².

La conocida fórmula de la flexión es:



Sustituyendo los valores encontrados se tiene:

$$\frac{I}{c} = \frac{4.500}{50 \times 10^4} = 0.009$$

que es el valor del módulo de resistencia de la viga.

Como la viga más resistente es la que el ancho y el alto de la sección transversal están en la proporción de 5:7, se tiene:

$$\frac{I}{c} = \frac{bh^3}{6} = 0.009$$

y como $b = \frac{5}{7}h$, se tiene reemplazando este valor:

$$\frac{5h^3}{42} = 0.009$$

de donde

$$h = \sqrt[3]{\frac{42 \times 0.009}{5}} = 0.42 \text{ m.}$$

y

$$b = \frac{5}{7} h = \frac{5 \times 0.42}{7} = 0.30 \text{ m.}$$

Como estas dimensiones son un poco exageradas para conseguir una viga de tal magnitud, será mejor emplear una viga de hierro, para este caso. Las dimensiones es fácil encontrar en los manuales o en las tablas que publican los fabricantes.

74.—Carga indirecta sobre las vigas.

En los puentes sucede que las cargas no obran directamente sobre las vigas, sino sobre vigas secundarias o largueros que descansan por sus puntos de apoyo en la viga principal; las reacciones de los apoyos no experimentan variación alguna, pero en cambio los diagramas de momentos y esfuerzos cortantes sufren una pequeña variación.

Tracemos el dinámico y el funicular correspondiente a las cargas ab y bc ; se traza el lado de cierre d y el radio polar respectivo que determina las reacciones de los apoyos X y Y. Entonces se proyectan los extremos de los largueros m y n , en el que actúa la carga ab , hasta que corte al funicular en m' y n' ; se une estos puntos y la paralela a esta línea trazada por el polo, divide a la fuerza ab en dos partes BB' y $B'A$: que son las presiones que transmiten las vigas transversales a la viga principal por los puntos m y n . Análogamente se hace con la carga bc , se obtiene el lado $n'o'$, cuya paralela por P descompone a la fuerza en dos, que son CC' y $C'B$ que obran directamente sobre la viga principal.

Así se obtiene el área de momentos, representada por la superficie rayada; cuyo máximo corresponde siempre a un apoyo de la viga transversal fig. 68.

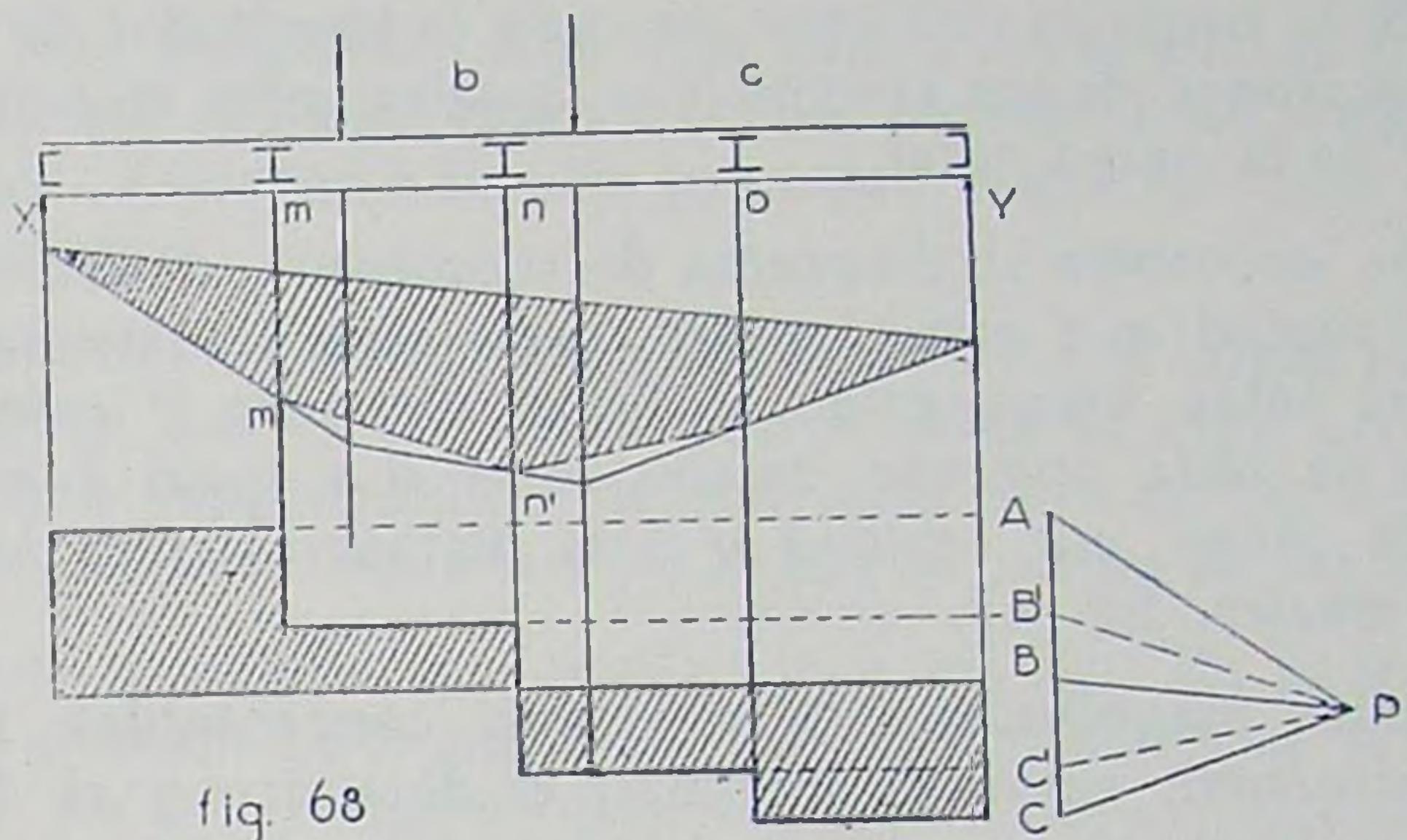


fig. 68

Por lo visto, se puede trazar de un modo muy sencillo el diagrama de momentos correspondiente a cargas indirectas: Basta trazar el dinámico y el funicular correspondiente a las cargas mediáticas y unir los puntos en que encuentran al funicular, las verticales de los puntos de apoyo de los largueros; con lo cual se obtiene el funicular que limita el área de momentos.

Los esfuerzos cortantes quedan determinados por las cargas parciales que actúan en los apoyos de las vigas transversales, que se determinan directamente con el dinámico, fig. 68.

ÁREA HISTÓRICA
75.—*El mismo caso anterior pero con carga uniforme indirecta.*

Si las cargas son uniformes sobre los largueros, basta determinar las presiones en los apoyos de éstos y el problema queda reducido al anterior.

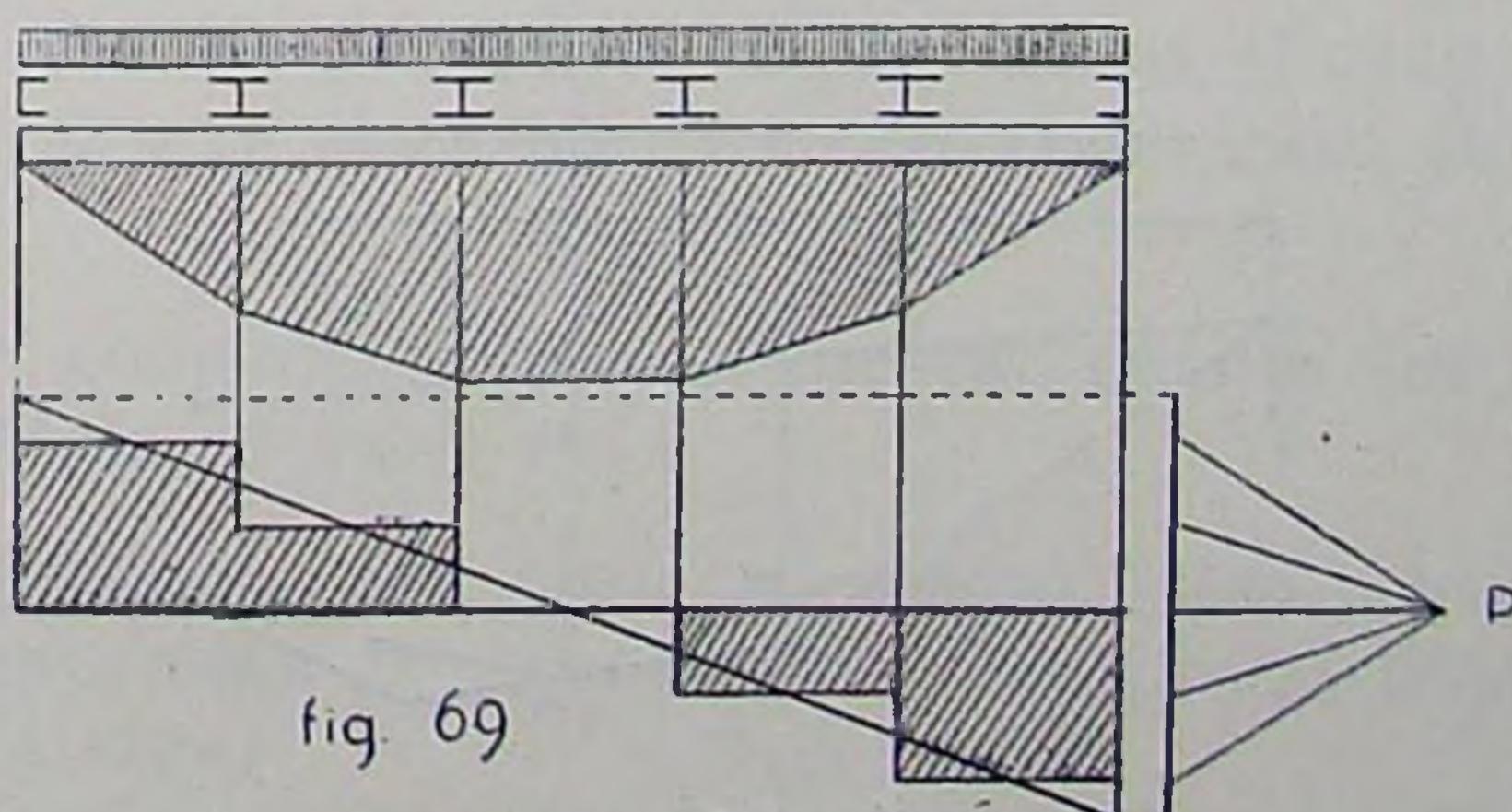


fig. 69

Si la carga es uniforme en toda la longitud l de la viga, las reacciones de los apoyos son iguales entre sí e igual a la mitad de la carga total.

Se encuentra el diagrama de momentos, determinando la carga parcial que actúa sobre cada viga transversal. Casi siempre estas vigas están a igual distancia y entonces las cargas de cada una son iguales entre sí e igual a $p \times a$; si p es la carga por unidad y a la distancia entre las vigas transversales, fig. 69.

Estas magnitudes $p \times a$ actúan concentradas sobre la viga principal; entonces trazando el dinámico y el funicular de estas fuerzas, se obtiene el diagrama de momentos, tal como se ha hecho en la fig. 68.

El diagrama de los esfuerzos cortantes se construye con estas mismas cargas parciales, como en la fig. 69, observando que el esfuerzo cortante es el mismo a lo largo de cada larguero.

También se puede construir el diagrama de los esfuerzos cortantes, deduciendo del que corresponde a carga uniforme directa, trazando simplemente horizontales en la intersección de las proyecciones de los puntos medios de los largueros, con la línea inclinada que limita el área de los esfuerzos cortantes para carga uniforme. Véase la fig. 69.

76.—Influencia de la trasmisión de la carga por medio de largueros. En la práctica las cargas se transmiten a la viga principal por medio de largueros; sin embargo se admite frecuentemente que las ruedas de los vehículos giran directamente

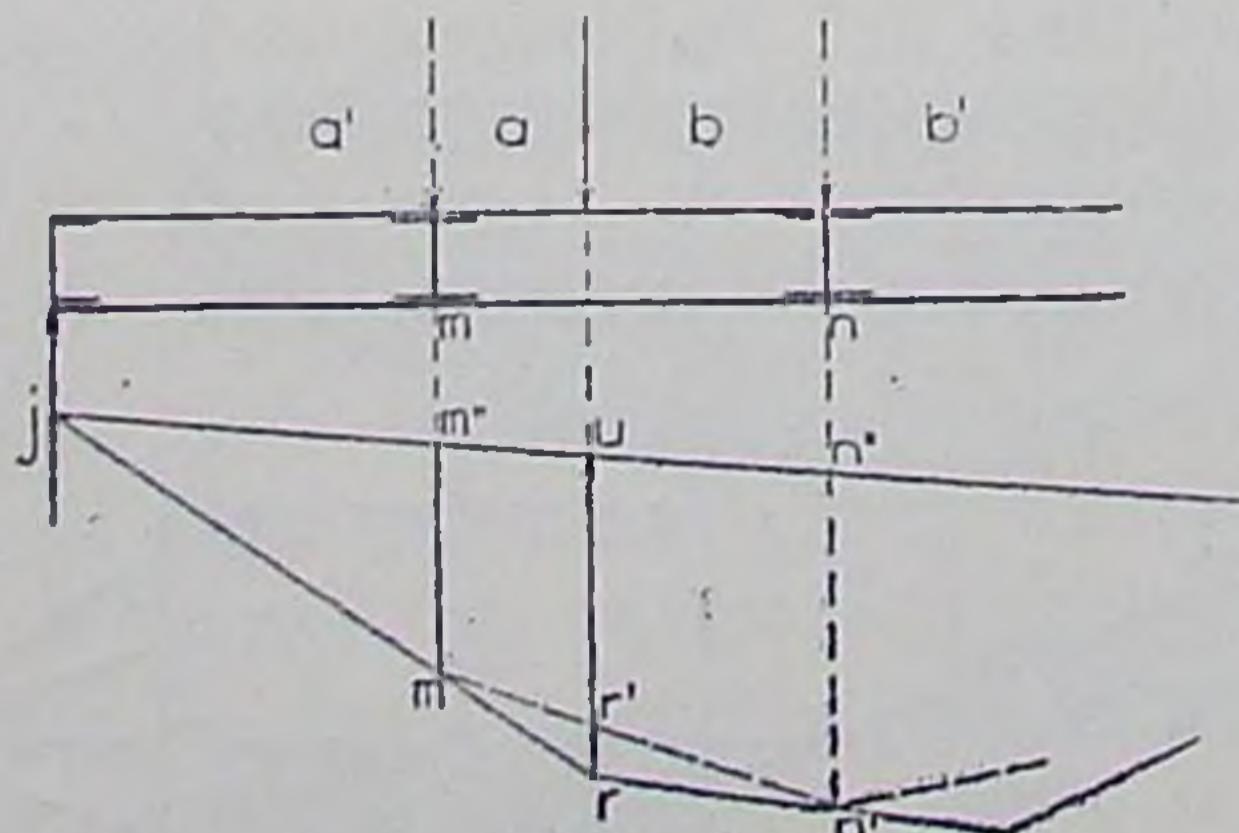


fig. 70

sobre la viga principal. Entonces vamos a ver cuál es el error que se comete al hacer esta variación, considerando cargas directamente aplicadas a la viga principal, haciendo caso omiso a los largueros.

Fijémonos en la fig. 68, en la que hay dos cargas ab y bc . Si se supone que obran directamente sobre la viga principal, el diagrama representativo de los momentos de flexión será $irs\bar{k}$; sus vértices están en las líneas de acción de las cargas.

Ahora si suponemos que la carga ab , fig. 70, se transmite a la viga principal, por medio de los largueros m y n , se divide la fuerza en dos componentes, $a'a$ y bb' , cuyas líneas de acción pasan por m y n . De esta manera queda suprimida la fuerza ab y reemplazada por $a'a$ y bb' . Entonces el polígono funicular será la línea $j m' n'$teniendo sus vértices en las nuevas líneas de acción de las fuerzas; los momentos de flexión en el intervalo entre m y n estará representado por una línea recta.

Por otra parte, el equilibrio estático no se altera, por la descomposición de una fuerza en dos otras, pues las reacciones de los apoyos quedan las mismas en los dos sistemas; también los momentos de flexión no han cambiado en los puntos m y n , como indica claramente el gráfico. Si este razonamiento hacemos extensivo a todas las cargas, resulta que los momentos de flexión en los puntos m, n, \dots , de apoyo de los largueros, están representados por las ordenadas m', m'' y n', n'' . Este funicular está simplemente inscrito en el que habíamos obtenido al trazar con las cargas originales.

En resumen, el momento de flexión en una sección cualquiera, por ejemplo, bajo la fuerza ab , está dado por la ordenada ur en el caso primitivo, y por ur' en el caso segundo. Este último valor es el exacto, y en el primer caso se peca por exceso.

El error cometido es tanto menor, cuanto los largueros están más próximos entre sí.

En la práctica, este error es despreciable y por esto se justifica la suposición de considerar a las cargas directamente aplicadas a la viga.

Veamos en un ejemplo numérico la magnitud del error cometido.

77.—Aplicación. Dos vigas de 8 m. de luz, distantes entre sí de 3 m., medidos de eje a eje, soportan el paso de un camión de 10 toneladas, cuya distancia entre ejes es de 4 m. Se supone que el eje delantero lleva el 25 % y el trasero el 75 % de la carga total. El eje delantero está a 1 m. del apoyo izquierdo, fig. 71.

Consideraremos primero que la carga se transmite por medio de los largueros, que distan 2 m. entre sí; luego haremos los cálculos como que si la carga se transmitiera directamente a la viga principal.

Vamos a determinar los momentos de flexión y los esfuerzos cortantes.

Si suponemos que el camión está a igual distancia de las dos vigas, cada una de éstas soporta la mitad de la carga total, o sea 5 toneladas.

El eje delantero lleva una carga de $0,25 \times 5 = 1,25$ toneladas.

El eje trasero, lleva una carga de $0,75 \times 5 = 3,75$ toneladas.

Primeramente encontraremos las magnitudes de las reacciones de los apoyos, trazando el dinámico ABC, luego el funicular correspondiente para cargas directas y se dibuja el lado de cierre jk ; por el polo P se traza una paralela a esta línea y se determina el punto D, el que nos da las magnitudes de las reacciones. En este caso particular, por casualidad son iguales las reacciones entre sí.

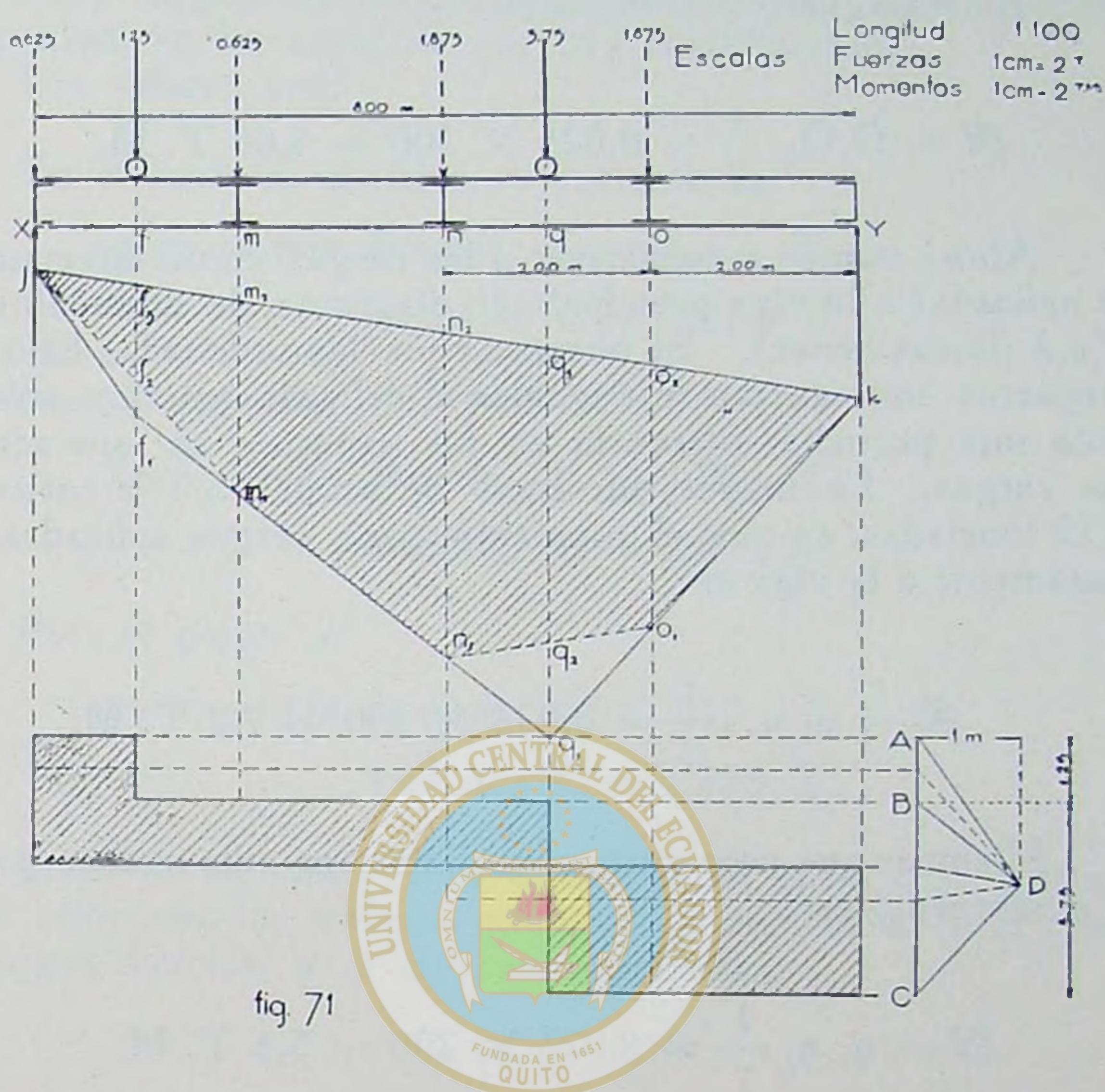
$$X = Y = \frac{5^T}{2} = 2,5^T$$

Después se hace la modificación del funicular para cargas mediáticas y éste es $jm_1n_1o_1k$.

Para conocer los momentos de flexión, se mide las ordenadas del funicular bajo el punto dado, a la escala de momentos. La escala es: (v. pág. 43).

$$\alpha = 10^{-2}; \quad \beta = 5 \times 10^{-3}$$

$$\gamma = \frac{\alpha\beta}{\Delta} = \frac{10^{-2} \times 5 \times 10^{-3}}{0,01} = 0,005$$



y

ÁREA HISTÓRICA

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{0,005} = 200$$

Si queremos conocer el momento bajo el larguero m , la ordenada $m_1 m_2$ se mide en su verdadera magnitud y el momento es:

$$M = m_1 m_2 \cdot \frac{1}{\gamma} = 0,0187 \times 200 = 3,74 \text{ T. M.}$$

En el larguero n el momento es:

$$M = n_1 n_2 \cdot \frac{1}{\gamma} = 0,0312 \times 200 = 6,24 \text{ T. M.}$$

En el larguero o el momento es:

$$\mathcal{M} = O_1 O_2 \cdot \frac{1}{\gamma} = 0,025 \times 200 = 5,00 \text{ T. M.}$$

Ahora vamos a considerar a las cargas como directamente aplicadas a la viga principal; el diagrama de momentos es $jf_1 q_1 k$ (líneas llenas). Se observa, que las ordenadas bajo los largueros son exactamente iguales al del caso anterior; sólo se nota una pequeña diferencia en los espacios en que actúan las cargas. La mayor diferencia se anota bajo la carga de 3,75 toneladas, en que el momento para cargas aplicadas directamente a la viga es:

$$\mathcal{M} = q_1 q_2 \cdot \frac{1}{\gamma} = 0,036 \times 200 = 7,2 \text{ T. M.}$$

Mientras que para cargas mediatas, en este mismo punto q , el momento es:

$$\mathcal{M} = q_2 q_3 \cdot \frac{1}{\gamma} = 0,028 \times 200 = 5,6 \text{ T. M.}$$

Como se ve la diferencia es de 1,6 T. M., pero sólo para este punto y debido a la magnitud de la carga; de aquí rápidamente el momento va disminuyendo a un lado y otro, hasta que llega a ser igual en ambos casos. Para carga uniformemente repartida, el error es más insignificante.

En los espacios comprendidos entre dos largueros consecutivos y que no llevan carga, se observa en el diagrama que los momentos no sufren variación alguna.

En resumen, considerando cargas directas, se peca por exceso en los lugares en que ellas actúan; pero el error es prácticamente despreciable. Y en donde no hay cargas, los valores de los momentos son iguales en los dos casos.

Para los esfuerzos cortantes también sufre el diagrama una pequeña variación:

Para cargas directas, el diagrama de los esfuerzos cortantes está representado, en la fig. 71, por líneas llenas.

Para cargas mediáticas el diagrama está dibujado en línea de puntos, en los espacios que hay modificación.

Los valores son:

En el punto *m* el esfuerzo cortante es:

para cargas directas $C = 1,25 \text{ T.}$

» » mediáticas $C = 1,875 \text{ T.}$

Para el punto *n*:

para cargas directas $C = 1,25 \text{ T.}$

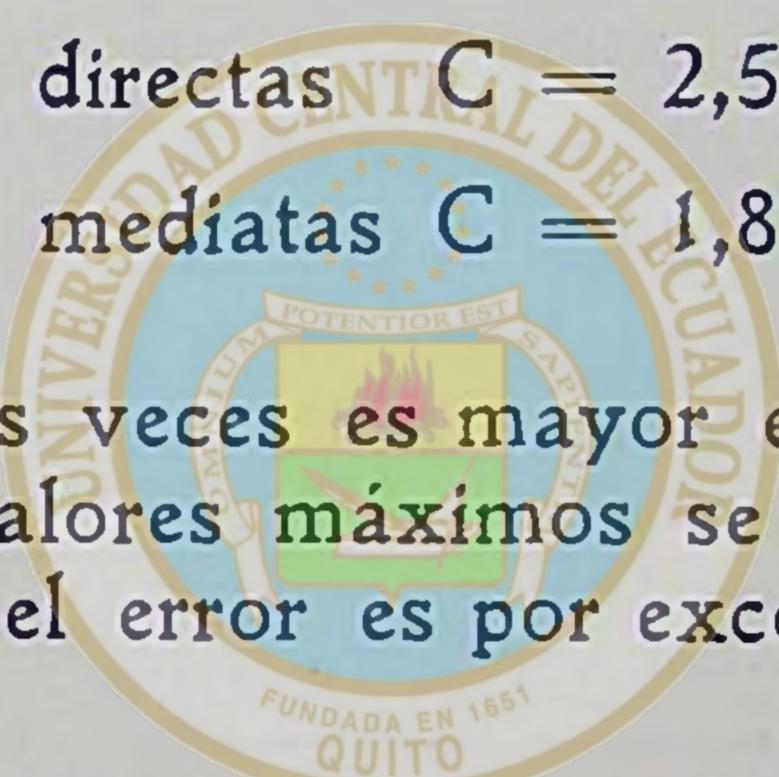
» » mediáticas $C = 1,875 \text{ T.}$

Para el punto *o*:

para cargas directas $C = 2,50 \text{ T.}$

» » mediáticas $C = 1,875 \text{ T.}$

Como se ve, unas veces es mayor en el un caso y otras en el otro; pero los valores máximos se encuentra en el caso de cargas directas, y el error es por exceso.



ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

CAPITULO VIII

Vigas empotradas en sus dos apoyos o hiperestáticas

78.—*Definiciones.* Se denomina *apoyo empotrado*, cuando estos apoyos aseguran a la viga tan fuertemente, que cuando actúan las cargas las secciones transversales de la viga, en la porción empotrada, no sufren ni desplazamiento transversal ni desviación angular.

Para fijar ideas, pongamos un ejemplo: el de la fig. 72. Imaginémonos una viga apoyada sobre dos cuchillos invariables en posición y situados a una distancia conveniente, como indica la figura; sobre el lado derecho actúan cargas de cualquier naturaleza, cuya resultante es R .

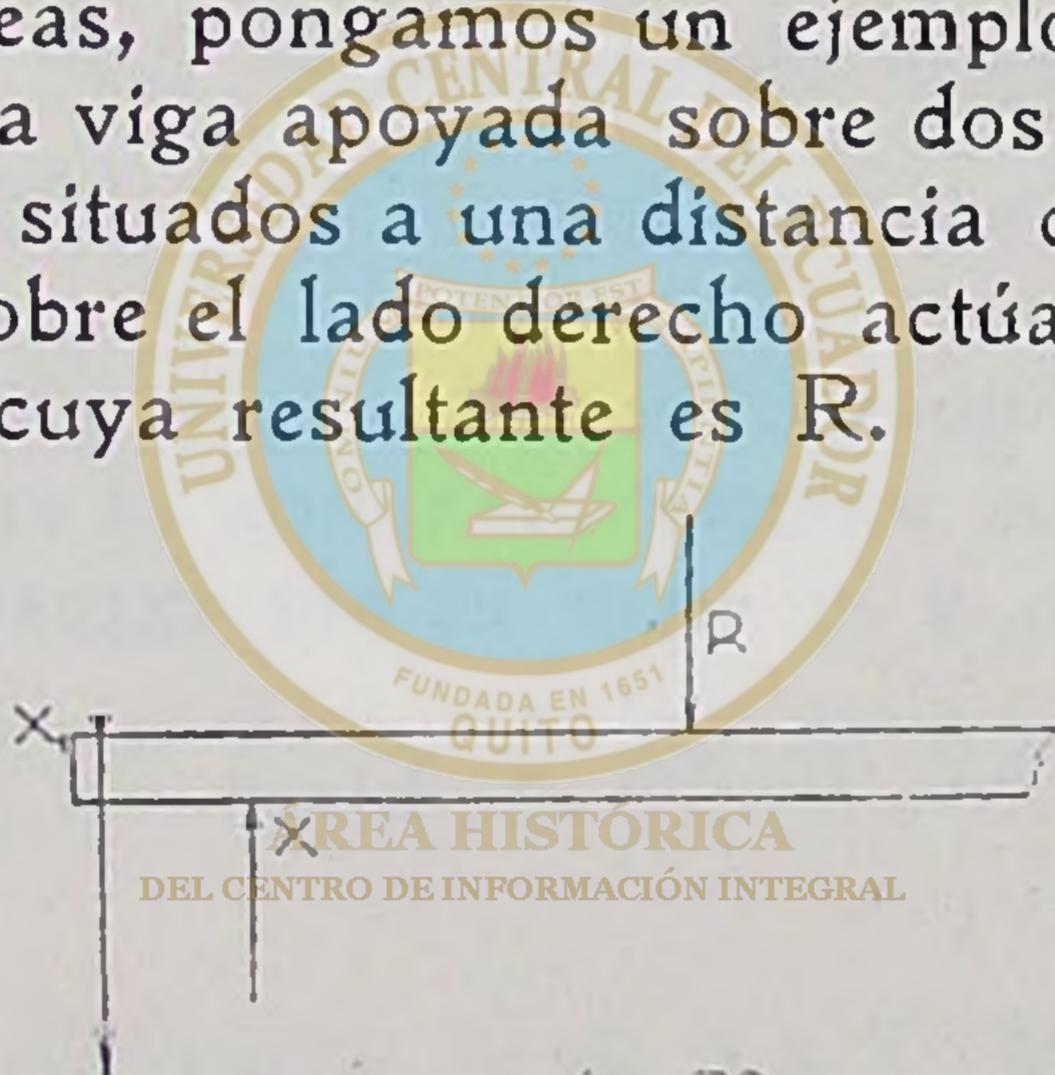


fig. 72

Se ve pues que la porción de viga XX_1 , es lo que constituye el empotramiento y como en el punto X se desarrolla la reacción del apoyo, normal a la fibra media de la viga, y un momento de empotramiento; habrá que determinar ambas magnitudes.

De este momento de empotramiento ya habíamos hablando al tratar de vigas empotradas en un apoyo, págs. 64 y 65.

El estudio de estas vigas, facilita la resolución de los problemas en las vigas continuas y sus conocimientos son indispensables para la comprensión del arco empotrado; además de que ellas mismas se usan mucho en las construcciones.

Ahora como la viga que tratamos de estudiar tiene empotramiento en sus dos extremidades, resulta que tenemos,

como incógnitas dos reacciones y dos momentos de empotramiento; en total 6 magnitudes desconocidas, que se reducen a 5 cuando las fuerzas son verticales.

Para calcularlas, no disponemos sino de las ecuaciones generales de equilibrio de la Estática, que en este caso se reducen a dos:

1º. Suma de las proyecciones verticales, de un sistema en equilibrio, es igual a cero.

2º. Suma de los momentos con relación a un mismo punto, es igual a cero.

La tercera condición, la de las proyecciones sobre una horizontal, se reducen a identidad, $0 = 0$.

De donde vemos que sólo con las dos ecuaciones no podemos llegar a conocer 5 incógnitas. Por esto se concluye diciendo que: *sólo las ecuaciones de equilibrio estático no nos permiten determinar las reacciones de los apoyos en una viga empotrada en ambas extremidades.*

Para obviar esta dificultad, tenemos que buscar otras ecuaciones; es la resistencia de materiales que nos puede facilitar.

VIGA EMPOTRADA CON CARGA UNIFORME ÁREA HISTÓRICA

DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

79.—Las ecuaciones suplementarias para conocer todas las incógnitas, las podemos encontrar en las *deformaciones elásticas* que sufre la viga cuando se aplican las cargas. Para esto se parte de la ecuación diferencial de la deformación de la fibra media o *línea elástica*; esta es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (1)$$

en la cual M es el momento de flexión en un punto cualquiera de la viga empotrada; E es el coeficiente de la elasticidad del material. \bar{Y} I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga.

La ecuación (1) se puede poner bajo la forma:

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (2)$$

Ecuación que nos hace conocer la curvatura de la fibra deformada en función del momento de flexión.

El valor de M podemos conocerlo fácilmente:

80.—Sea una viga con carga uniforme de intensidad p , fig. 73, de luz l y de apoyos empotrados.

Por la simetría de la carga, las reacciones son evidentemente iguales y tienen como valor común:

$$X = Y = \frac{pl}{2} \quad (3)$$

Si designamos por k y k' el valor del momento de empotramiento en el apoyo izquierdo y derecho, respectivamente. El momento de flexión en una sección cualquiera de abcisa x es:



fig. 73

$$M_1 = k + X \cdot x - \frac{px^2}{2}$$

si en esta ecuación reemplazamos el valor de X encontrado en la ecuación (3) tenemos:

$$M_1 = k + \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2} \quad (4)$$

(v. N°. 62) y teniendo en cuenta la ecuación (2), resulta:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_1 = k + \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2} \quad (5)$$

Integrando esta ecuación, se tiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = k \cdot x + \frac{plx^2}{4} - \frac{px^3}{6} + \text{constante} \quad (6)$$

En la zona de empotramiento actúan dos clases de fuerzas, que producen deformaciones diferentes: en efecto, consideremos a la viga de la fig. 73, como que tiene apoyos libres, pero de la misma luz y sometida a las mismas cargas; lo que daria una fibra deformada, cuya convexidad sería idéntica al de los casos ya estudiados, de vigas de apoyos libres.

Y en una segunda consideración, aplíquémosla a la viga, de la fig. 73, después de haberla suprimido las cargas, los dos momentos de empotramiento k y k' . Estos momentos tienen capacidad de deformar a la viga en sentido inverso del primer considerando; teniendo la fibra deformada su convexidad en la superficie superior de la viga.

En virtud de la ley de Hooke, la deformación resultante será la suma de las dos deformaciones. Como tiene sentidos contrarios la *fibra deformada sobre cada apoyo será horizontal*.

También la ecuación (5) nos indica que el momento total, es la suma de los momentos en la misma sección de la viga considerando libremente apoyada y de un momento negativo, debido a las acciones de los momentos de empotramientos que son negativos.

Por esta razón la ecuación (5) se puede escribir:

$$M_1 = M - M_2 \quad (5')$$

Llamando M_1 al momento total en la viga empotrada; M al momento en la viga libre, y M_2 al momento debido a las acciones de los momentos de empotramiento.

Con estos conocimientos, tratemos de conocer a la constante de integración de la ecuación (6):

En los apoyos, sabemos que la fibra media, conserva en estos puntos su dirección horizontal inicial.

Entonces, para el punto X, se tiene,

$$x = 0 \quad y \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (6) se obtiene que la constante = 0.

La ecuación (6) se reduce a:

$$EI \frac{dy}{dx} = k \cdot x + \frac{px^2}{4} - \frac{px^3}{6} \quad (7)$$

De la misma manera para el punto Y se tiene:

$$x = l \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

sustituyendo en la misma ecuación (7) dá:

$$0 = k \cdot l + \frac{pl^3}{4} - \frac{pl^3}{6} = k \cdot l + \frac{pl^3}{12} \quad (8)$$

de donde se deduce inmediatamente:

$$k = -\frac{pl^2}{12} \quad (9)$$

Reemplazando este valor en la (4), expresión general del momento de flexión en un punto cualquiera, se tiene:

$$M_i = \frac{1}{2} p l \left(x - \frac{l}{6} \right) - \frac{px^2}{2} \quad (10)$$

Para encontrar el momento, en la mitad de la viga

reemplazemos en la (10) x por $\frac{1}{2} l$:

$$Mm = \frac{4}{24} pl^2 - \frac{1}{8} pl^2 = \frac{pl^2}{24} \quad (11)$$

El momento máximo de flexión en la mitad de una viga empotrada en sus extremos, es la tercera parte del valor del momento para una viga sobre apoyos libres, de la misma luz y con las mismas cargas.

El momento en los apoyos empotrados, tiene el doble de valor del momento en la mitad de la viga y es de signo contrario.

Con los valores de k y de Mm ya se puede trazar el diagrama representativo de los momentos de flexión, para una viga empotrada en sus extremos; advirtiendo, que en este caso, la carga es simétrica y que por lo tanto los momentos de empotramiento son iguales:

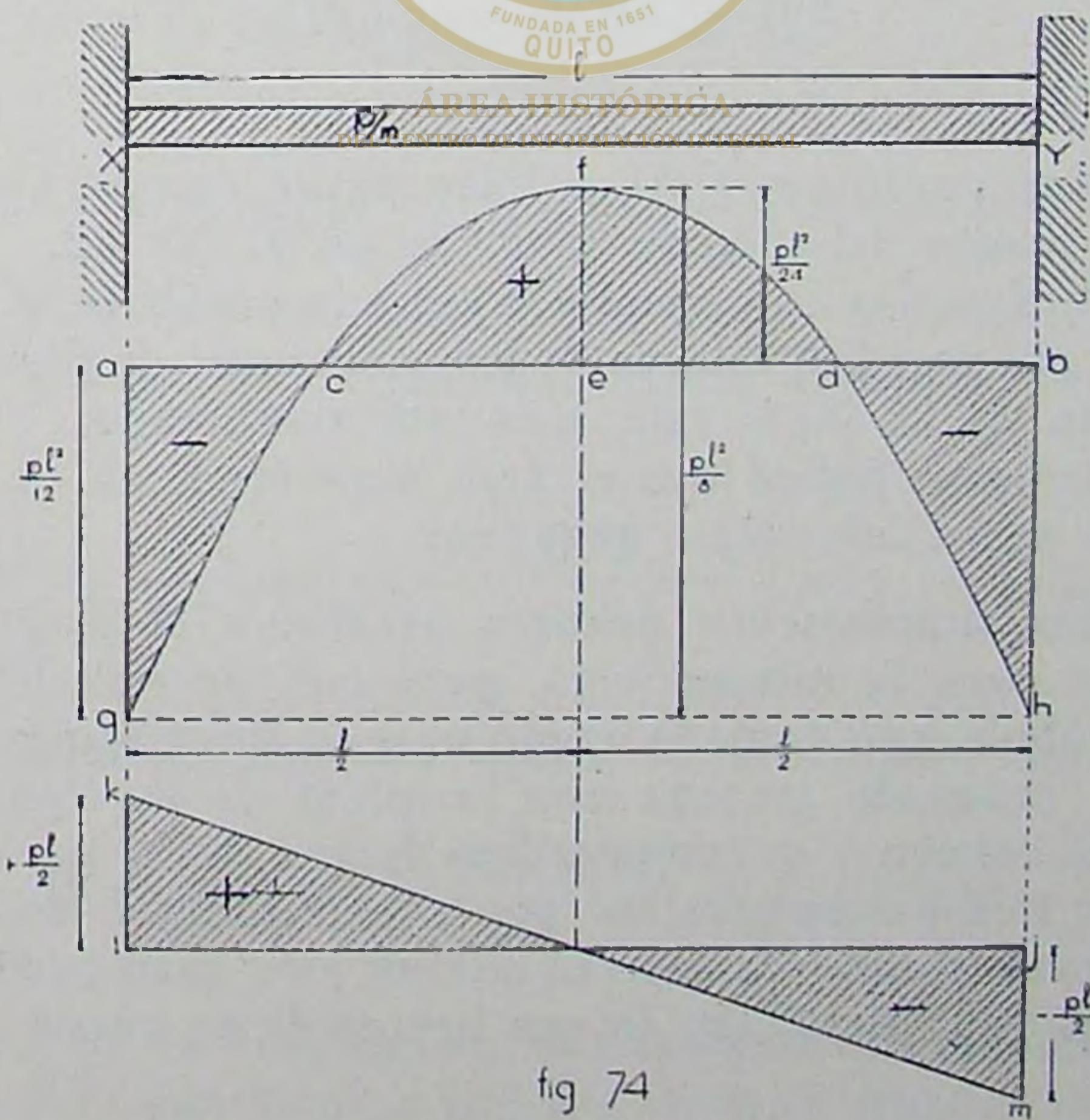


fig 74

$$k = k' = -\frac{pl^2}{12} \quad (9')$$

El diagrama está limitado por una parábola, su vértice se encuentra en la vertical trazada por la mitad de la viga. Además la ecuación (5) la habíamos escrito bajo la forma (5'); v. fig. 74:

$$M_1 = M - M_2 \quad (5')$$

lo que quiere decir que al diagrama de momentos de una viga con apoyos libres y carga uniforme y de la misma luz, hay que restarle los momentos producidos por el empotramiento.

Entonces a partir de una línea cualquiera ab , pero paralela a la viga, y en su mitad, llevamos una magnitud $ef = \frac{pl^2}{24}$

positivamente. Por los extremos de ab , es decir, bajo los apoyos, y en sentido negativo ponemos las magnitudes.

$$bh = ag = \frac{1}{12} pl^2$$

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Por los puntos g , f , h , se hace pasar una parábola, trazada por medio del método indicado en el N° 62.

Las ordenadas comprendidas entre la parábola y la línea de cierre ab , son los valores de los momentos de flexión para cada punto de la viga; ésta área está sombreada.

El diagrama indica que el área superior a ab es positiva y las dos áreas inferiores, negativas.

O más simplemente: primero se dibuja el diagrama de momentos para la misma viga, pero con apoyos libres; ese es la parábola gh tomada como base la línea horizontal gh ; luego, la ordenada trazada por la mitad de la viga, que es también la máxima, y comprendida dentro de la parábola, se divide en tres partes iguales; por el extremo del tercio superior se traza el lado de cierre, que en este caso particular es horizontal. Se tiene así, lo que hemos dicho antes:

$$ga = 2 fe$$

De esta manera nos evitamos los cálculos de los momentos de empotramiento; que se encuentran midiendo las ordenadas en las verticales de los apoyos a la escala de momentos. Lo mismo para el momento máximo positivo.

La línea que limita los diagramas de los esfuerzos cortantes es una línea recta. Se traza la horizontal ij ; por los puntos i y j se lleva positivamente y negativamente los valores de las reacciones:

$$X = Y = \pm \frac{pl}{2}$$

se obtiene los puntos k y m que se une por una linea. El área superior es positiva y la inferior negativa.

81.—Aplicación. Una viga de 8 metros de luz lleva una carga uniformemente repartida, de intensidad $p=1000$ k. Fig. 75.

Tracemos los diagramas tal como hemos indicado en el número anterior, adoptando una escala conveniente, y verifiquemos los resultados por medio de las fórmulas. Calculemos las reacciones de los apoyos, fórmula (3):

$$X = Y = \frac{1}{2} pl = \frac{1}{2} \cdot 1.000 \times 8 = 4.000 \text{ k.}$$

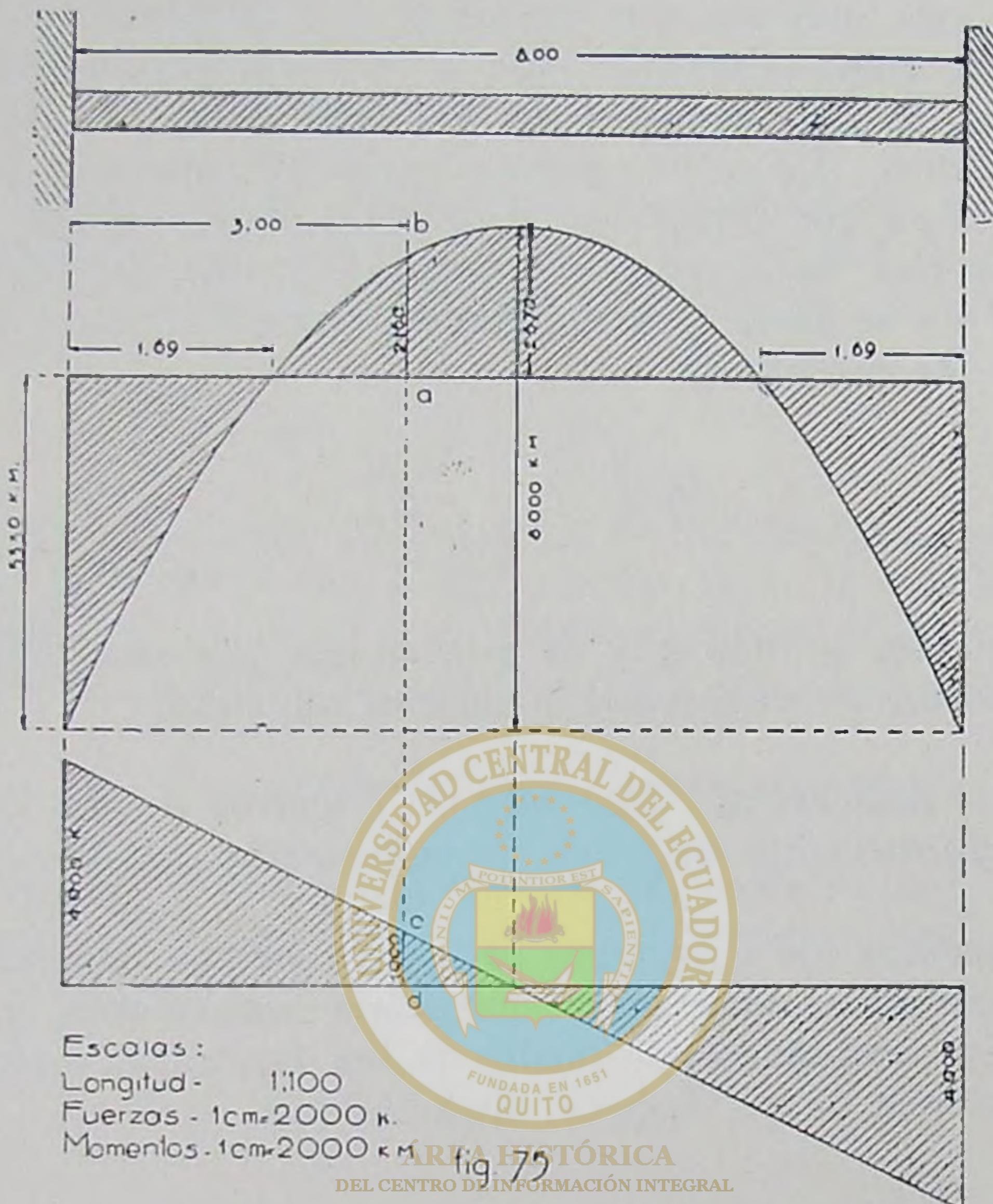
Los momentos de empotramiento, según la fórmula (9) son:

$$k = k' = -\frac{1}{12} pl^2 = -\frac{1.000 \times 8^2}{12} = -5.333 \text{ k.m.}$$

El momento máximo ocurre en la mitad y su valor es:

$$M = \frac{1}{24} pl^2 = \frac{1.000 \times 8^2}{24} = 2.667 \text{ k.m.}$$

Como se ve concuerdan exactamente los resultados gráficos con los numéricos. Los primeros se indican en la misma figura.



En los puntos *c* y *d*, fig. 74 los momentos de flexión son nulos. Las distancias a los apoyos están dadas por:

$$ac = db = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) = 0,211 l \quad (12)$$

$$= 0,211 \times 8 = 1,688 \text{ m.}$$

Para trazar el diagrama de los esfuerzos cortantes, nos referimos a la expresión (1) del N°. 62, que da el esfuerzo cortante para un punto cualquiera:

$$C = p \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

Para el apoyo izquierdo, el esfuerzo cortante es igual a la magnitud de esta reacción:

$$C = X = \frac{1}{2} pl = 4.000 \text{ k.} \quad (13)$$

Por la misma razón, para el apoyo derecho:

$$C = Y = -\frac{1}{2} pl = -4.000 \text{ k.} \quad (14)$$

Entonces el diagrama de los esfuerzos cortantes se forma, trasladando sobre las verticales de los apoyos segmentos iguales a $\frac{1}{2} pl$, en sentido inverso a partir de una horizontal; después se une con una línea. El área superior es positiva y la inferior, negativa.

Si se quiere encontrar el momento de flexión para un punto cualquiera de la viga, sea por ejemplo a 3 m. del apoyo izquierdo; se mide la ordenada bajo este punto, que es la ab , a la escala de momentos:

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL
 $ab = 2.160 \text{ k. m.}$

Se puede comprobar aplicando la fórmula general (4):

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} px(l-x) + k = \frac{1}{2} 1.000 \times 3(8-3) - 5.333 = \\ &= 2.167 \text{ k. m.} \end{aligned}$$

El esfuerzo cortante para este mismo punto es:

$$cd = 1.000 \text{ k.}$$

que comprobando por medio de la fórmula general dá: (Nº. 62 fórm. 1).

$$C = p \left(\frac{l}{2} - x \right) = 1.000 \left(\frac{8}{2} - 3 \right) = 1.000 \text{ k.}$$

VIGA EMPOTRADA CON CARGAS CONCENTRADAS

82.—Caso 1º.—Actúa una sola carga F , situada en un punto cualquiera de la viga.

Llamemos l la luz de la viga y F la carga que dista del apoyo izquierdo de la distancia a .

Calculemos las reacciones de los apoyos y los momentos de empotramiento:

Por las ecuaciones generales de equilibrio (Nº. 78) se puede escribir:

$$X + Y - F = 0 \quad (1)$$

$$X \cdot l + k - k' - F(l - a) = 0 \quad (2)$$

de donde se deduce:

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$Y = F - X \quad (3)$$

y

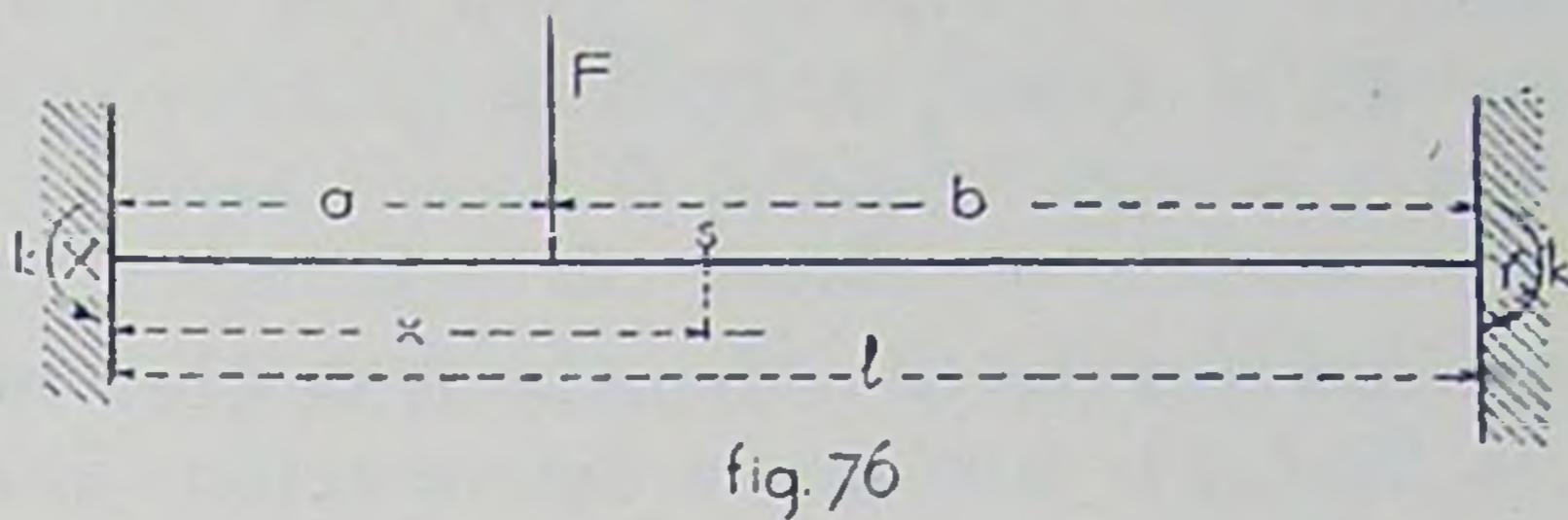
$$k' = k - F(l - a) + X \cdot l \quad (4)$$

Para determinar las incógnitas Y y k' , es necesario ocurrir a la ecuación diferencial de deformación $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$.

Pero como se tiene dos valores para x , según que sea menor o mayor que a ; habrá que integrar entre los intervalos $0 - a$ y $a - l$.

1º. Cuando $x < a$ se tiene:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M = k - X \cdot x \quad (5)$$



Una primera integración de la ecuación (5) dà:

$$EI \frac{dy}{dx} = k \cdot x - \frac{X \cdot x^2}{2} + C \quad (6)$$

Sabemos que estando la viga empotrada en el apoyo X, la fibra media conserva en este punto su dirección horizontal inicial (Nº. 79) y además, $\frac{dy}{dx}$ expresa la tangente trigonométrica del ángulo que forma la horizontal con la tangente de la fibra media deformada.

Se ve claramente que estos ángulos son muy pequeños, puesto que las deformaciones también son pequeñas, y por consiguiente se puede reemplazar los ángulos por sus tangentes: entonces se puede decir que la ecuación (6) nos dà la inclinación, respecto de la horizontal, de la fibra media deformada.

Si conserva su dirección horizontal inicial la viga en el apoyo: para $x = o$ se debe tener $\frac{dy}{dx} = 0$; sustituyendo estos valores en la ecuación (6) se encuentra que:

$$C = 0$$

entonces la ecuación (6) queda:

$$EI \frac{dy}{dx} = k \cdot x - \frac{X \cdot x^2}{2} \quad (7)$$

Si esta ecuación la integramos una segunda vez, se tiene:

$$EI \cdot y = k \frac{x^2}{2} - X \frac{x^3}{6} + C' \quad (8)$$

Esta ecuación nos dà la ordenada de la fibra media deformada o sea la *flecha*; o también la deformación líneal vertical de la viga. Luego esta segunda constante C' , representa la deformación vertical de la fibra media en el origen de las integraciones.

Como en este punto, la fibra media no sufre ningún desplazamiento, se ve que, $x = 0$, y $y = 0$. Sustituyendo estos valores en la (8) se encuentra que:

$$C' = 0$$

la ecuación (8) se reduce a:

$$EI \cdot y = k \frac{x^2}{2} - X \frac{x^3}{6} \quad (9)$$

2º. Cuando $x > a$, la ecuación de deformación se escribe:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M' = k \frac{x^2}{2} - X \cdot x + F(x - a) \quad (9')$$

como antes, hagamos dos integraciones sucesivas de esta ecuación diferencial, se obtiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = k \cdot x - X \frac{x^2}{2} + F \left(\frac{x^2}{2} - a \cdot x \right) + C_1 \quad (10)$$

$$EI \cdot y = k \frac{x^2}{2} - X \frac{x^3}{6} + F \left(\frac{x^3}{6} - a \frac{x^2}{2} \right) + C_1 x + C_2 \quad (11)$$

Las dos porciones de línea elástica, dadas por las ecuaciones (9) y (11), que corresponden a las porciones, fig. 76, de abscisas a y $(l - a)$ de la viga, deben unirse bajo la fuerza F , de abscisa $x = a$; puesto que la deformación debe ne-

cesariamente ser una línea continua y no angulosa; es decir, que en la dirección de F las dos partes de curvas, dadas por las dos ecuaciones, tienen la misma tangente y por consiguiente la misma ordenada; de donde se deducen las igualdades entre las ecuaciones (7) y (10) y entre (9) y (11):

$$k \cdot a - X \frac{a^2}{2} = ka - X \frac{a^2}{2} + F \left(\frac{a^2}{2} - a^2 \right) + C_1 \quad (7)+(10)$$

de donde simplificando se encuentra:

$$C_1 = F \frac{a^2}{2}$$

y

$$k \frac{a^2}{2} - X \frac{a^3}{6} = k \frac{a^2}{2} - X \frac{a^3}{6} - F \frac{a^3}{3} + C_1 a + C_2 \quad (9)+(11)$$

sustituyendo el valor encontrado de C_1 y simplificando; fácilmente se encuentra:

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL
 $C_2 = -F \frac{a^3}{6}$

Las ecuaciones (10) y (11) pueden escribirse:

$$EI \frac{dy}{dx} = kx - X \frac{x^2}{2} + F \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) + F \frac{a^2}{2}$$

y

$$EI y = k \frac{x^2}{2} - X \frac{x^3}{6} + F \left(\frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{2} \right) + \frac{Fa^2 x}{2} - \frac{Fa^3}{6}$$

Así mismo, la viga estando empotrada en el apoyo Y, la fibra media no sufre, en este punto, ni desviación angular y desplazamiento vertical:

Luego para $x = l$, la deformación angular $\frac{dy}{dx}$ y la deformación vertical y son nulas.

Se tiene pues:

$$kx - X \frac{x^2}{2} + F \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) + Fa^2 \frac{x}{2} = 0 \quad (12)$$

y

$$k \frac{x^2}{2} - X \frac{x^3}{6} + F \left(\frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{2} \right) + \frac{Fa^2 x}{2} - \frac{Fa^3}{6} = 0 \quad (13)$$

Despejando en la (12) el valor de k , se tiene:

$$k = \frac{X l}{2} - \frac{F}{2l} (l - a)^3 \quad (14)$$

Despejando en la (13) el valor de X dá:

$$X = \frac{3k}{l} + \frac{F}{l^3} (l - a)^3 \quad (15)$$

De las ecuaciones (14) y (15) resultan por fin:

$$k = - \frac{Fa (l - a)^2}{l^2} = - \frac{Fab^2}{l^2} \quad (16)$$

y

$$X = \frac{F}{l^3} (l^3 - 3a^2 l + 2a^3) = \frac{F (3a + b) b^2}{l^3} \quad (17)$$

Estos dos valores, reemplazando en las ecuaciones (3) y (4) y despejando las incógnitas del otro apoyo, se tiene por fin:

$$k' = - \frac{Fa^2 (l - a)}{l^2} = - \frac{Fa^2 b}{l^2} \quad (18)$$

y

$$Y = \frac{Fa^2}{l^3} (3l - 2a) = \frac{F(a + 3b)a^2}{l^3} \quad (19)$$

Los momentos k y k' son siempre negativos.

83.—*Momentos de flexión.* Por las fórmulas (16) y (17) se conoce X y k , entonces podemos fácilmente calcular los momentos de flexión para un punto cualquiera de la viga, distante x del apoyo izquierdo.

Como hemos dicho antes hay dos valores:

Cuando $x < a$, se tiene:

$$M = k - Xx \quad (5)$$

Para $x > a$, dá:

$$M = k - Xx + F(x - a) \quad (9')$$

Como hemos visto ya (Nº. 75, ec. 5'), estas ecuaciones se puede poner bajo la forma general:

$$M_{\text{INTRO DE INFORMACION INICIAL}} = M_{\text{MÁXIMA}} - M_{\text{MINIMA}}$$

Lo que se interpreta diciendo: que el diagrama de momentos, es el mismo que para una viga con apoyos libres, de la misma luz y con las mismas cargas; pero relacionado a una línea de cierre del funicular que corta las verticales de los apoyos a una distancia igual a la magnitud de los momentos de empotramiento; medido a la escala de momentos.

El momento máximo tiene lugar al recto de la carga y tiene por valor:

$$M_m = \frac{2Fa^3(l-a)^2}{l^3} \quad (20)$$

Si la carga se encuentra en la mitad de la viga;

$$a = b = \frac{l}{2}$$

y la ecuación (20) se simplifica:

$$M_m = \frac{Fl}{8} \quad (20')$$

este momento es siempre positivo.

El diagrama de los momentos de flexión se dibuja así: fig. 77:

Sobre las verticales de los apoyos y en sentido negativo se pone los momentos de los apoyos k y k' .

Se une estos puntos y resulta la línea AB.

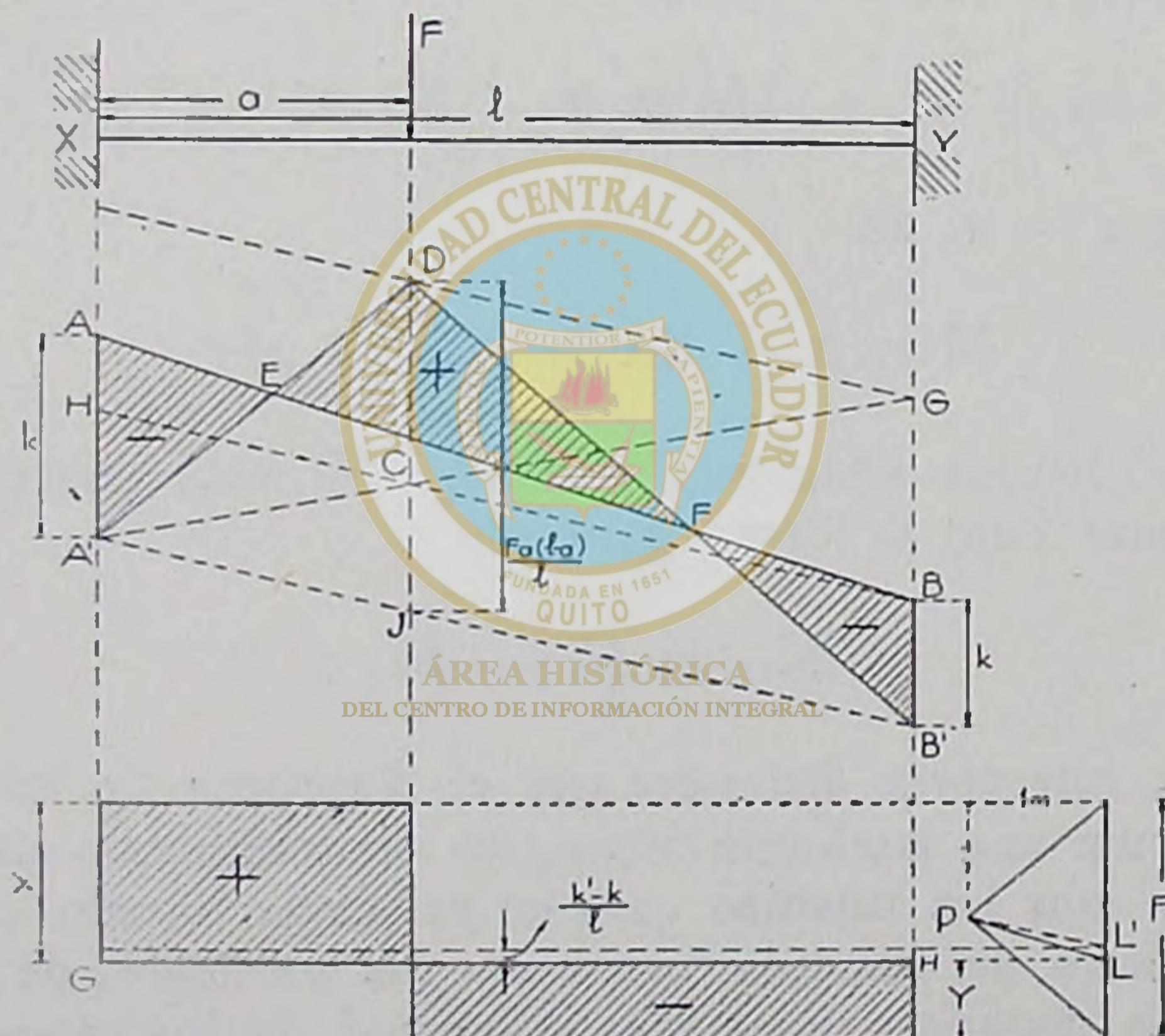


fig. 77

Sobre la vertical del punto donde actúa la carga y a partir del lado de cierre AB se lleva positivamente

$$CD = M_m = \frac{2Fa^2(l-a)^2}{l^3}$$

Se une este punto D con A' y B' por medio de rectas.

La línea A'DB' relacionada al lado de cierre AB, es el diagrama de los momentos de flexión para una viga empotrada en ambos extremos (área sombreada); mientras que el área A'DB', tomando como base A'B', representa el diagrama de flexión para la misma viga con apoyos libres.

Las áreas que están sobre el lado de cierre son positivas y las que están bajo, negativas. Además los puntos de transición, E y F, son de momentos nulos.

Estos puntos, tienen por abscisas:

$$x = \frac{a l}{l + 2a} \quad (21)$$

y

$$x' = \frac{(2l - a) l}{3l - 2a} \quad (22)$$

Esfuerzos cortantes. Sabemos que los esfuerzos cortantes a la derecha o a la izquierda de la carga son constantes; entonces:

En la zona a , son positivos e iguales a:

ÁREA HISTÓICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

y en la región $(l - a)$ son negativos e iguales a:

$$C = -Y$$

Luego para trazar el diagrama de los esfuerzos cortantes, necesitamos previamente conocer las reacciones de los apoyos; cálculos que podemos evitarnos trazando gráficamente; así se obtiene el valor de las reacciones y el diagrama de los esfuerzos cortantes.

En efecto el lado de cierre AB del funicular, debe corresponder a un radio polar que será paralelo; por el polo P tracemos una paralela al lado de cierre, la que determina en el dinámico el punto L, que divide a la fuerza en magnitudes correspondientes a cada una de las reacciones de los apoyos.

Por L se traza una horizontal GH; que es la línea que nos servirá de base para el diagrama, que se completa proyec-

tando los extremos del dinámico. Así se ha construido el área sombreada.

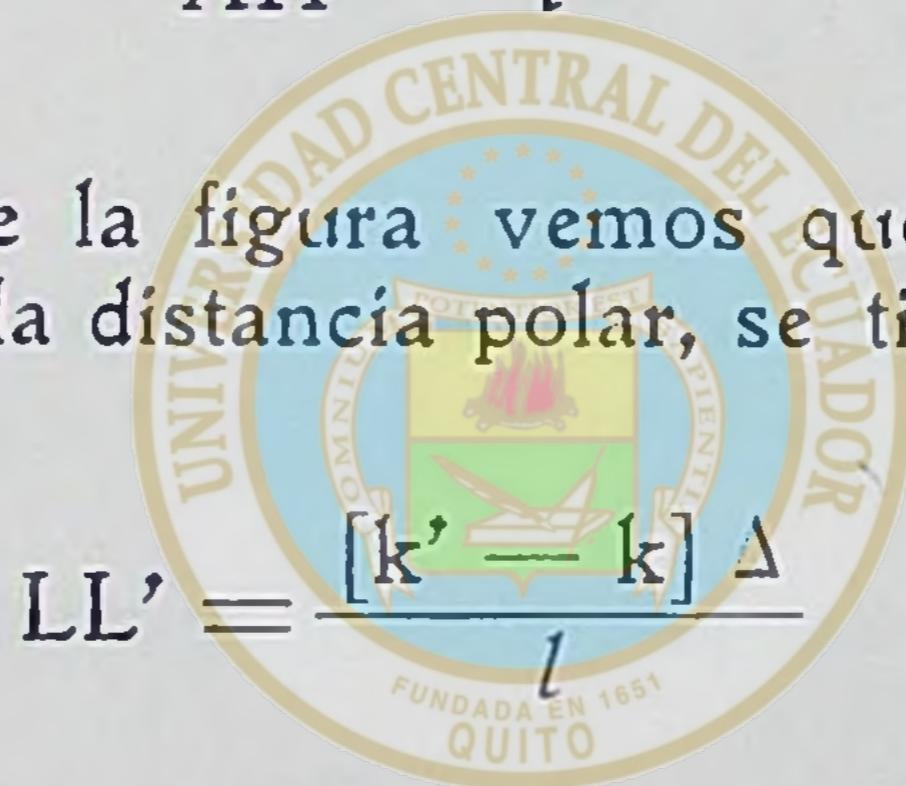
Para la viga con apoyos libres, la línea base habría sido la de puntos, que es la proyección L' , del radio polar paralelo a $A'B'$. La distancia entre esta línea y la GH es:

$$\frac{k' - k}{l} \quad (23)$$

En efecto, consideremos los dos triángulos semejantes ABH y PLL' y se tiene:

$$\frac{LL'}{AH} = \frac{\Delta}{l}$$

por la inspección de la figura vemos que $AH = k' - k$, y haciendo Δ igual a la distancia polar, se tiene:



pero si de antemano trazamos el funicular con la distancia polar igual a la unidad, se tiene:

$$LL' = \frac{k' - k}{l}$$

Se puede, también para el caso de aplicación de una sola fuerza, dar una interpretación gráfica para el trazado del lado del cierre en el diagrama de momentos:

Tracemos el diagrama de momentos para la misma viga, fig. 77, pero con apoyos libres y cuyo dinámico de polo P , tiene una distancia polar igual a la unidad de longitud; se obtiene así el triángulo $A'DB'$. Por el vértice D se traza una paralela a $A'B'$, que corta la vertical del apoyo en el punto G ; se une G con A' . Esta línea GA' , corta a la ordenada bajo la fuerza, en C , en dos partes que son las dos magnitudes de los momentos de los apoyos: $CD = k$ y $CJ = k'$. Luego

por C se traza una paralela a A'B' y se tiene el punto B; para la otra magnitud se translada con un compás.

Las ordenadas del diagrama de momentos se mide a la escala de fuerzas que es también la de momentos; pues hemos hecho para facilitar el trazado, la distancia polar igual a la unidad.

Esta interpretación gráfica se puede demostrar, pero omitimos en gracia de la brevedad.

84.—Aplicación.— Sea una viga empotrada en sus dos extremidades; lleva una carga de 2.000 kilos, situada a 2 m. del apoyo izquierdo. Trazar los diagramas de los momentos de flexión y esfuerzos cortantes.

Se tiene:

$$l = 5 \text{ m.}; \quad a = 2 \text{ m.}; \quad F = 2.000 \text{ k.}$$

Ambos diagramas vamos a trazar gráficamente.

Sea el dinámico AB y el polo P, de distancia polar igual a 1 m., fig. 78.

El funicular para la misma viga de apoyos libres, es afb.

Por f, se traza, una paralela a ab y se determina el punto h. Luego la linea ah que corta a fi en e; por este punto trazamos una paralela a ab y encontramos el punto d; ei = db es la magnitud del momento del apoyo derecho, medido a la escala de momentos, que es la misma de la de las fuerzas, dá:

$$k' = 960 \text{ k. m.}$$

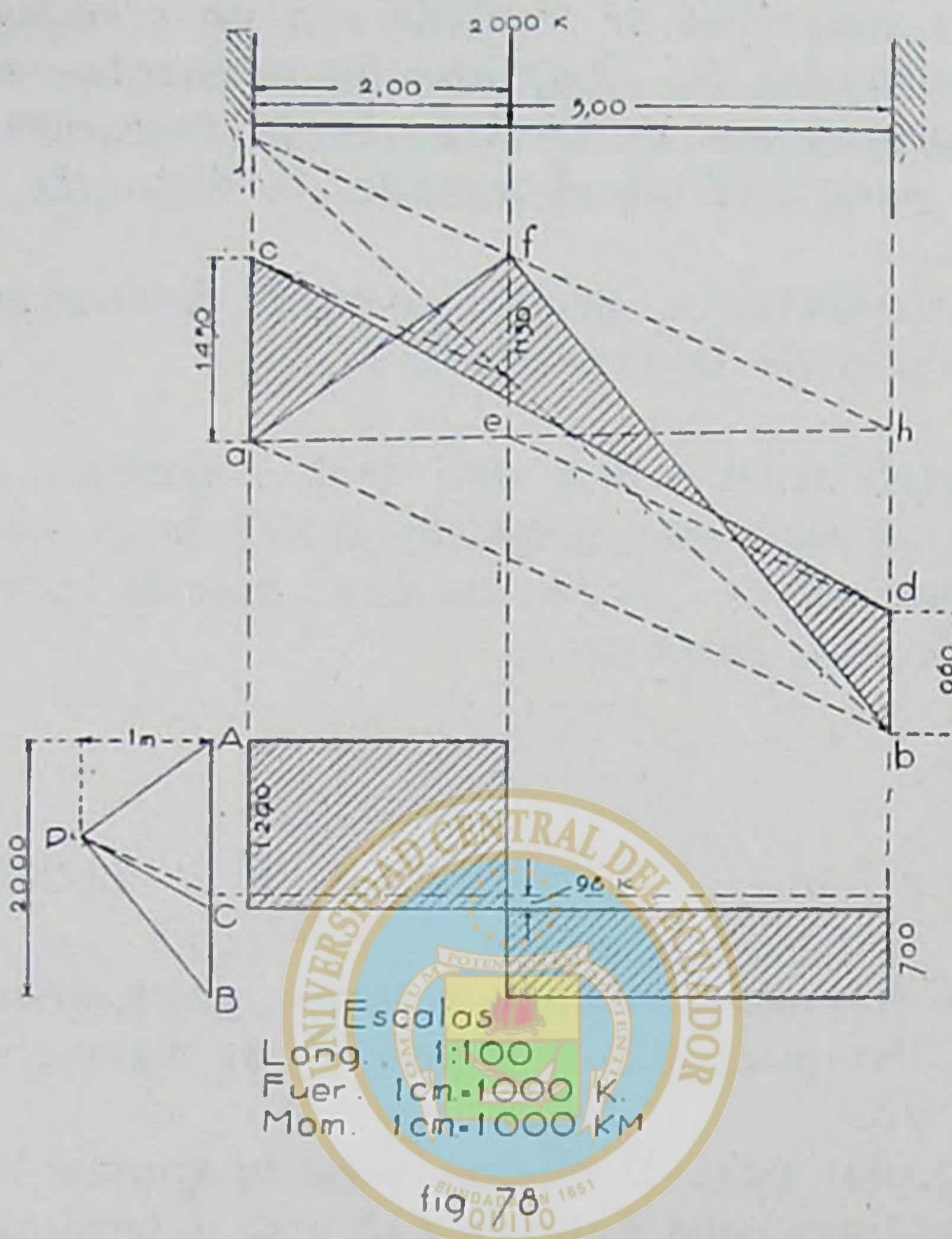
Para el otro momento se puede también unir j con b y por el punto de corte con la ordenada if, se traza una paralela a ab y se obtiene el punto c, que determina el segmento ca = 1.450 k.m. que es la magnitud del momento del apoyo izquierdo.

Se une c y d; esta linea es el lado de cierre del diagrama de momentos.

El momento máximo positivo vale, medido a escala:

$$M_m = 1.150 \text{ k. m.}$$

Para el diagrama de los esfuerzos cortantes, tracemos por el polo P una paralela a cd, que determina el punto C y



ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

por consiguiente las magnitudes de las reacciones de los apoyos. Por C se traza la línea horizontal que es la que sirve como base. Luego se proyectan los puntos A y B y se forman las áreas del esfuerzo cortante de la manera usual. Los valores están indicados en la figura.

Verifiquemos los resultados con las fórmulas:

Las reacciones de los apoyos valen:

$$X = \frac{F}{l^3} (l^3 - 3a^2 l + 2a^3) =$$

$$= \frac{2000}{5^3} (5^3 - 3 \times 2^2 \times 5 + 2 \times 2^3) = 1.296 \text{ k.}$$

$$Y = \frac{Fa^2}{l^3} (3l - 2a) =$$

$$= \frac{2.000 \times 2^2}{5^3} (3 \times 5 - 2 \times 2) = 704 \text{ k.}$$

Se debe tener si los cálculos están bien hechos:

$$X + Y = 1.295 + 705 = 2.000 \text{ k.}$$

Los momentos de empotramiento tienen por valor:

$$k = -\frac{Fa(l-a)^2}{l^3} = -\frac{2.000 \times 2(5-2)}{5^3} = -1.450 \text{ k.m.}$$

$$k' = -\frac{Fa^2(l-a)}{l^2} = -\frac{2.000 \times 2^2(5-2)}{5^2} = -960 \text{ k.m.}$$

El momento máximo positivo es:

$$\mathcal{M}_m = \frac{2Fa^2(l-a)^2}{l^3} = \frac{2 \times 2.000 \times 2^2(5-2)^2}{5^3} = 1.152 \text{ k. m.}$$

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Los esfuerzos cortantes máximos son:

$$C = X = 1.296 \text{ k.}$$

$$\text{y} \quad C = -Y = -704 \text{ k.}$$

Como se ve concuerdan los resultados con los obtenidos gráficamente.

La distancia entre la línea base del diagrama de los esfuerzos cortantes para la viga empotrada y la linea base para la viga de apoyos libres es (líneas de puntos):

$$\frac{k' - k}{l} = \frac{-960 + 1.450}{5} = 98 \text{ k.}$$

Se puede encontrar los momentos o los esfuerzos cortantes para cualquier punto de la viga, midiendo la ordenada bajo este punto a la escala adoptada.

VIGA EMPOTRADA CON CARGAS CONCENTRADAS

85.—Caso 2º. Actúan un número cualquiera de fuerzas concentradas sobre la viga.

Este caso vamos a desarrollar conjuntamente con un caso numérico.

En una viga de 7 m. de luz, actúan tres fuerzas, cuyas intensidades son de 1.300, 1.500 y 1.200 kilos, distantes del apoyo izquierdo de 2, 3, y 5 m., respectivamente. Se quiere construir los diagramas de momentos y de los esfuerzos cortantes.

En este caso, de varias fuerzas, se necesita determinar las reacciones y los momentos de empotramiento para cada una de ellas, consideradas aisladamente como que si fuera la única que gravita sobre la viga, y después se hace la suma de las reacciones parciales y de los momentos de empotramiento de todas las cargas; es decir:

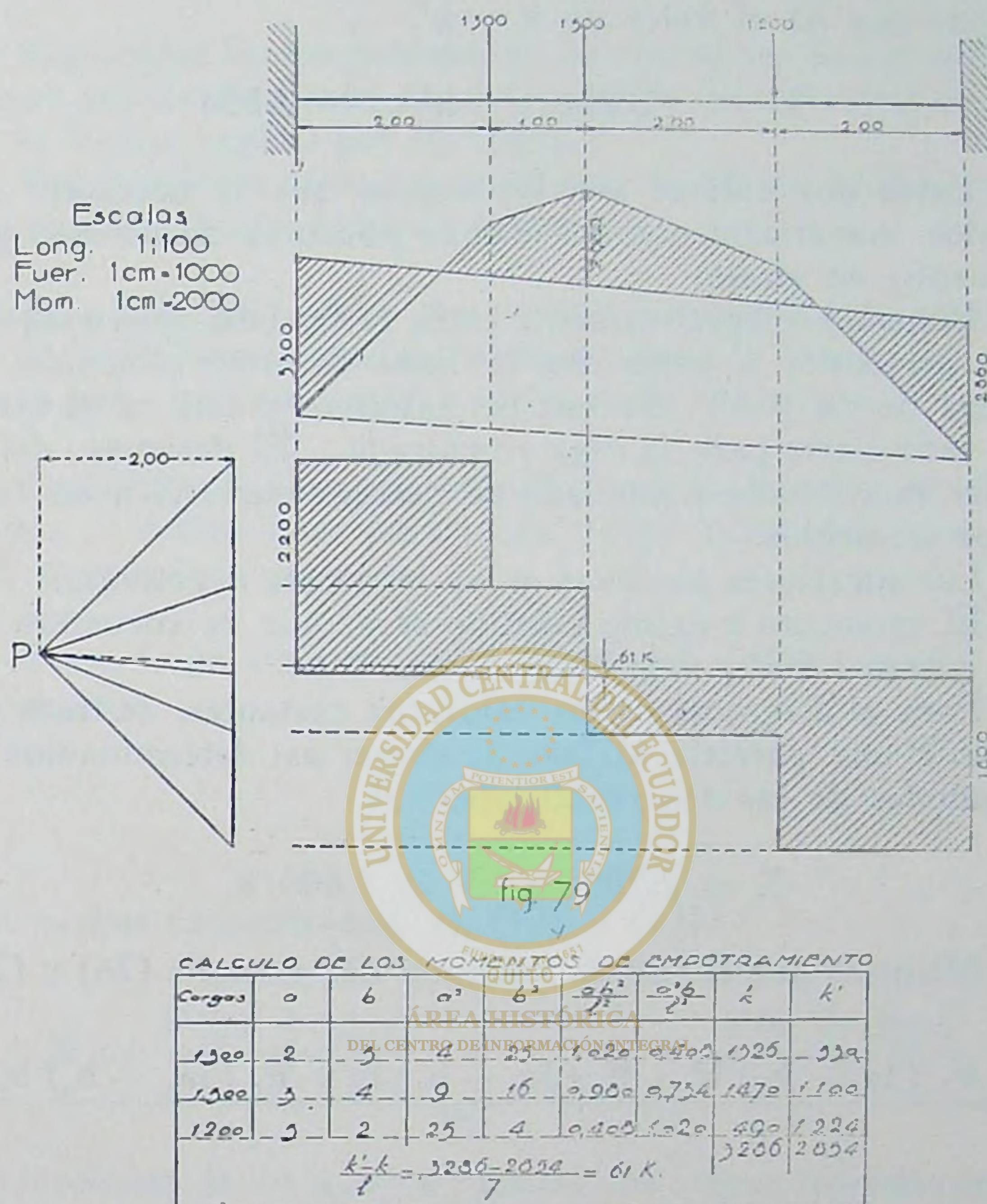
$$k = - \sum \frac{F_a b^2}{l^2} \quad (24)$$

$$k' = - \sum \frac{F_a^2 b}{l^2} \quad (25)$$

$$X = \sum \frac{F (3a + b) b^2}{l^3} \quad (26)$$

$$Y = \sum \frac{F (a + 3b) a^2}{l^3} \quad (27)$$

Los símbolos tienen aquí significación general, y $b = l - a$. En seguida se traza el funicular de las fuerzas exteriores que representa el diagrama de momentos, luego se traslada a escala los valores de las ecuaciones (24) y (25) y uniendo estos puntos dá la línea de cierre.



El momento máximo positivo tiene por valor:

$$\begin{aligned} M_m &= X_x + k - F_1(x - a_1) = 2.190 \times 3 - 3.286 - 1.300(3 - 2) \\ &= 1.984 \text{ k. m.} \end{aligned}$$

Pero será mucho más simple valiéndose del procedimiento gráfico:

Se traza el funicular correspondiente a las cargas dadas y a la misma viga, pero con apoyos libres, véase la fig. 79. Entonces se calcula las fórmulas (24) y (25), valiéndonos de

la tabla adjunta a la figura. La suma de las dos últimas columnas nos dá el valor de k y k' .

$$k = -3.286; \quad k' = -2.854$$

Estos dos valores son los únicos que es necesario calcularlos numéricamente; los demás podemos determinar gráficamente; en efecto:

Ponemos respectivamente en la vertical del apoyo izquierdo y derecho y a partir de la línea de cierre obtenida, los valores de k y k' . Se une los extremos y éste es el verdadero lado cierre para la viga empotrada. El perímetro del funicular relacionado a este lado de cierre, comprenden las áreas de los momentos.

Las superiores positivas y las inferiores negativas.

El momento máximo positivo se vé que se encuentra bajo la fuerza 1.500 y vale 2.000 k. m.

Para el diagrama de los esfuerzos cortantes, se traza por el polo P una paralela al lado de cierre; así determinamos las magnitudes de las dos reacciones:

$$X = 2.200; \quad Y = 1.800 \text{ k.}$$

Mientras que el cálculo analítico dá; fórmula (26) y (27):

$$X = \frac{F_1(3a_1 + b_1)b_1^2 + F_2(3a_2 + b_2)b_2^2 + F_3(3a_3 + b_3)b_3^2}{l^3}$$

$$= \frac{1.300(3 \times 2 + 5)5^2 + 1.500(3 \times 3 + 4)4^2 + 1.200(3 \times 5 + 2)2^2}{7^3}$$

$$= 2.190 \text{ k.}$$

y

$$Y = \frac{F_1(a_1 + 3b_1)a_1^2 + F_2(a_2 + 3b_2)a_2^2 + F_3(a_3 + 3b_3)a_3^2}{l^3}$$

$$= \frac{1.300(2 + 3 \times 5)2^2 + 1.500(3 + 3 \times 4)3^2 + 1.200(5 + 3 \times 2)5^2}{7^3}$$

$$= 1.810 \text{ k.}$$

Conocidas las magnitudes de las reacciones de los apoyos, es muy simple el trazado del diagrama de los esfuerzos cortantes, la figura explica por sí misma.

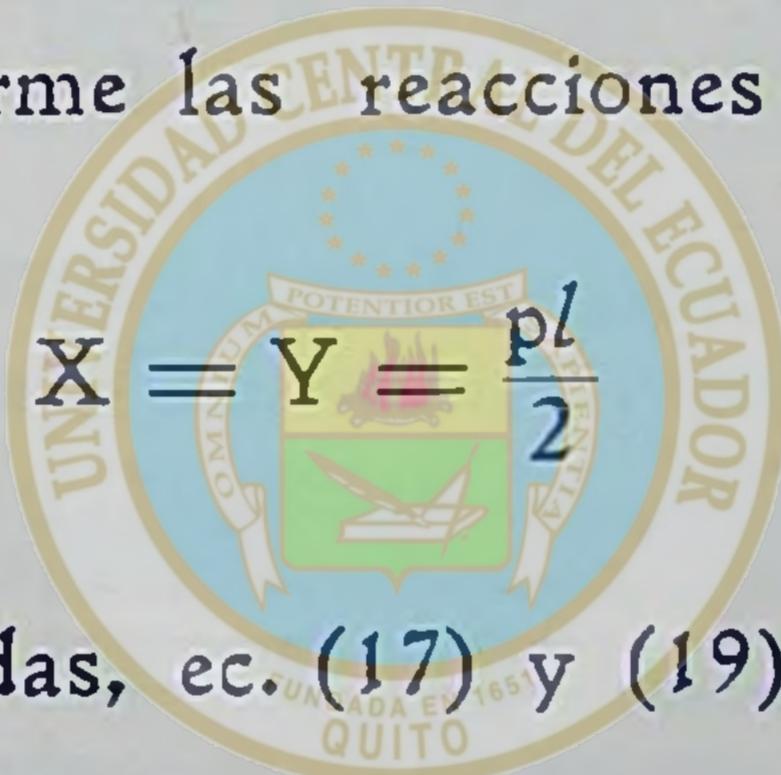
Los esfuerzos cortantes máximos positivos ocurre en los apoyos e igual a la respectiva reacción.

86.—Caso 3º.—Viga empotrada y sometida a la acción de una carga uniformemente repartida en toda la longitud y también a una carga concentrada en un punto cualquiera.

Los momentos de empotramiento y las reacciones de los apoyos se determinan, para cada carga separadamente y se hace después su suma.

Así:

Para carga uniforme las reacciones de los apoyos son (75, ec. 3):



para cargas concentradas, ec. (17) y (19)

$$X = \frac{F(3a + b)b^2}{l^3}; \quad Y = \frac{F(a + 3b)a^2}{l^3}$$

las reacciones de los apoyos para las dos cargas reunidas serán:

$$X_1 = \frac{pl}{2} + \frac{F(3a + b)b^2}{l^3} \quad (28)$$

y

$$Y_1 = \frac{pl}{2} + \frac{F(a + 3b)a^2}{l^3} \quad (29)$$

Los momentos de empotramiento para carga uniforme es, ec. [9']:

$$k = k' = -\frac{pl^2}{12}$$

y para carga concentrada, ec. (14) y [18]:

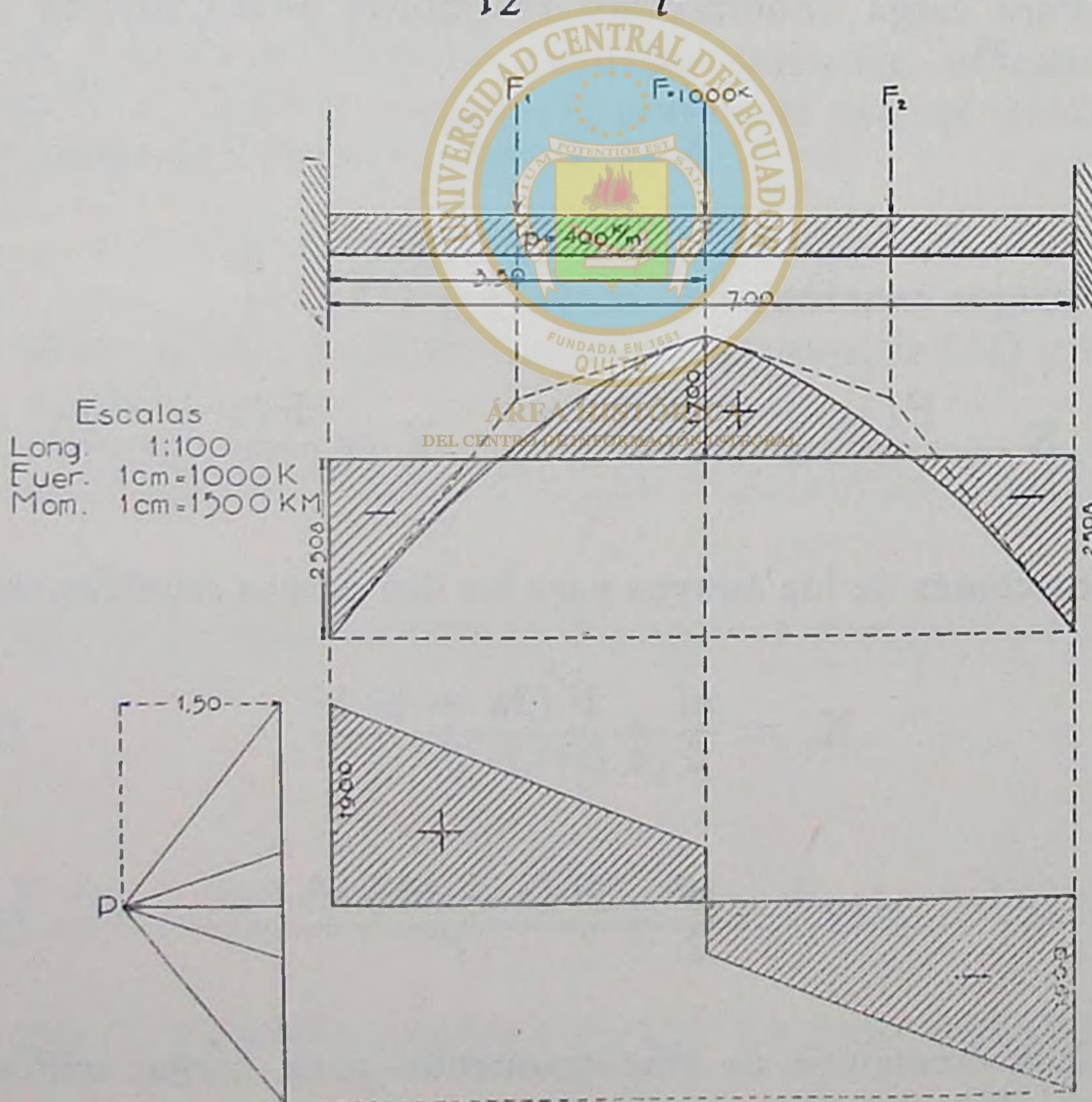
$$k = -\frac{Fab^2}{l^2}; \quad k' = -\frac{Fa^2b}{l^2}$$

el momento de empotramiento para las dos cargas es:

$$k_1 = -\frac{pl^2}{12} - \frac{Fab^2}{l^2} \quad (30)$$

y

$$k_2 = -\frac{pl^2}{12} - \frac{Fa^2b}{l^2} \quad (31)$$



El momento de flexión para un punto cualquiera, pero a la izquierda de la fuerza \$F\$ es:

$$\mathcal{M} = Xx + k - \frac{px^2}{2} \quad (32)$$

y a la derecha de la fuerza es:

$$\mathcal{M} = Xx + k - \frac{px^2}{2} - F(x - a) \quad (33)$$

y el máximo positivo se producirá bajo la carga y tiene por valor:

$$\mathcal{M}_m = Xa + k - \frac{pa^2}{2} \quad (34)$$

87.—Aplicación.— Consideremos una viga de 7 m. de luz, que soporta una carga uniformemente repartida de 400 k/m. y una carga concentrada en su mitad de 1.000 k. Fig. 80.

Primeramente consideremos a la viga de apoyos libres y tracemos para ésta los diagramas de momentos y de los esfuerzos cortantes (71), para carga uniforme y concentrada a la vez. [Fig. 80]. Para lo cual, la porción de carga uniforme a la izquierda de la fuerza F se la reemplaza, con una fuerza concentrada en la mitad y equivalente a su longitud.

Lo mismo se hace para la porción derecha.

Se traza el dinámico para estas tres fuerzas, cuyos valores son:

$$F_1 = 1.400; \quad F = 1.000 \quad y \quad F_2 = 1.400 \text{ k.}$$

de suerte que el sistema es simétrico con relación a la mitad de la viga.

Luego se traza el funicular de polo P y cuyo lado de cierre podemos hacer de antemano horizontal: puesto que por ser simétricas las cargas se conocen las magnitudes de las reacciones de los apoyos, que son iguales entre sí e iguales a la mitad de la carga total; de lo contrario, habría que calcular por medio de las ecuaciones (28) y (29).

$$X = Y = \frac{3.800}{2} = 1.900 \text{ k.}$$

Este funicular y su lado de cierre se indica en la figura con líneas de puntos.

Hecho esto, se hace las modificaciones en el funicular, relativas a carga uniforme, con dos arcos de parábola, tangentes a los lados del funicular.

Entonces se localiza el lado de cierre del funicular correspondiente a viga empotrada, calculando los momentos de empotramiento en los apoyos; así mismo por la simetría de la carga, resulta:

$$k_1 = k_2 = -\frac{pl^2}{12} \frac{Fab^2}{l^2}$$

y como $a = b = \frac{l}{2}$, se tiene:

$$k_1 = k_2 = \frac{\text{ÁREA HISTÓRICA}}{12} \frac{pl^2}{l^2} \frac{Fl}{8}$$

sustituyendo los valores numéricos dá:

$$k_1 = k_2 = -\frac{400 \times 7^2}{12} - \frac{1.000 \times 7}{8} = -2.508 \text{ k. m.}$$

Este valor llevamos, a la escala adoptada, sobre las verticales de los apoyos, y después se une estos extremos. A esta línea debemos referirnos para la evaluación de los momentos.

Como se ve en la figura, el momento máximo positivo ocurre en la mitad de la viga y bajo la fuerza, y esta ordenada vale 1.700 k. m.

Este valor podemos comprobar por medio de las fórmulas (11) y (20'), que dan, al sumarlas, la siguiente expresión:

$$\mathcal{M}_m = \frac{pl^2}{24} + \frac{Fl}{8} \quad (35)$$

que con los datos numéricos tenemos:

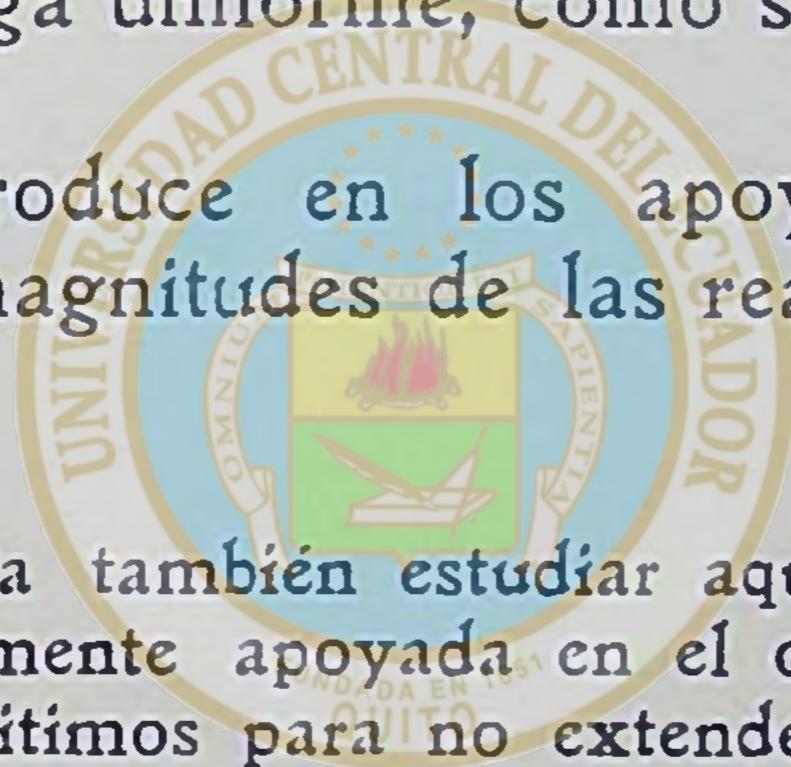
$$\mathcal{M}_m = -\frac{400 \times 7^2}{24} + \frac{1.000 \times 7}{8} = 1.692 \text{ k. m.}$$

o sea 8 k. m. de diferencia, lo que es despreciable.

En lo que atañe a los esfuerzos cortantes, el trazado del diagrama no tiene dificultad alguna; se trata primero con las tres fuerzas concentradas, y después se hace la modificación correspondiente a carga uniforme, como se observa claramente en la figura 80.

El máximo se produce en los apoyos, con signo contrario, e igual a las magnitudes de las reacciones.

NOTA.—Se debería también estudiar aquí a la viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro; pero como ella es de empleo muy raro, omitimos para no extendernos demasiado.



ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

(Continuará)