

Por el Profesor de Estática Gráfica de la Universidad Central, \_\_\_\_\_

X Sr. Ingeniero Dn. Abel S. Troya ==

X **Curso de Estática Gráfica**



ÁREA HISTÓRICA  
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

\_\_\_\_\_ ( Continuación )



## CAPÍTULO XI

### Sistemas triangulados

#### GENERALIDADES

108.—Cuando la altura de la viga, por razones de resistencia, debe ser mayor de 1 metro, conviene por economía reemplazar a la de alma llena por la viga *triangulada* o *celosía*. (1)

Se denominan vigas *trianguladas* o *celosías*, a las formadas por un conjunto de barras situadas en un solo plano y que forman una red de triángulos. *Armaduras* o *cuchillos* al conjunto de piezas de madera o de hierro que colocadas verticalmente sobre los apoyos, sostiene la cubierta de un edificio o el peso de un puente.

Los vértices de los triángulos de una armadura que por lo regular están en el contorno que forma la viga se llaman *nudos*. Las piezas que unen los nudos se llaman *barras*.

Las barras que están en el contorno se llaman *principales* o *cordones*. De manera que hay *cordón superior* y *cordón inferior*. Estos cordones están unidos entre sí por medio de barras de relleno; llamadas *montantes* y *diagonales*.

Casi siempre los cordones superiores e inferiores son rectilíneos. No obstante en las obras de luces considerables, el cordón superior es curvilíneo; se adopta esta forma por dos

---

(1) Hay que observar una cierta proporción entre la altura de las vigas y su luz. Generalmente esta relación debe ser de  $\frac{1}{10}$ . Y puede variar entre  $\frac{1}{8}$  y  $\frac{1}{12}$ , según las circunstancias.



razones: para mejorar el aspecto de la construcción y por economía; pues así se disminuye el peso del metal de la estructura.

Los ensamblajes en los nudos de las vigas trianguladas se consideran como articuladas.

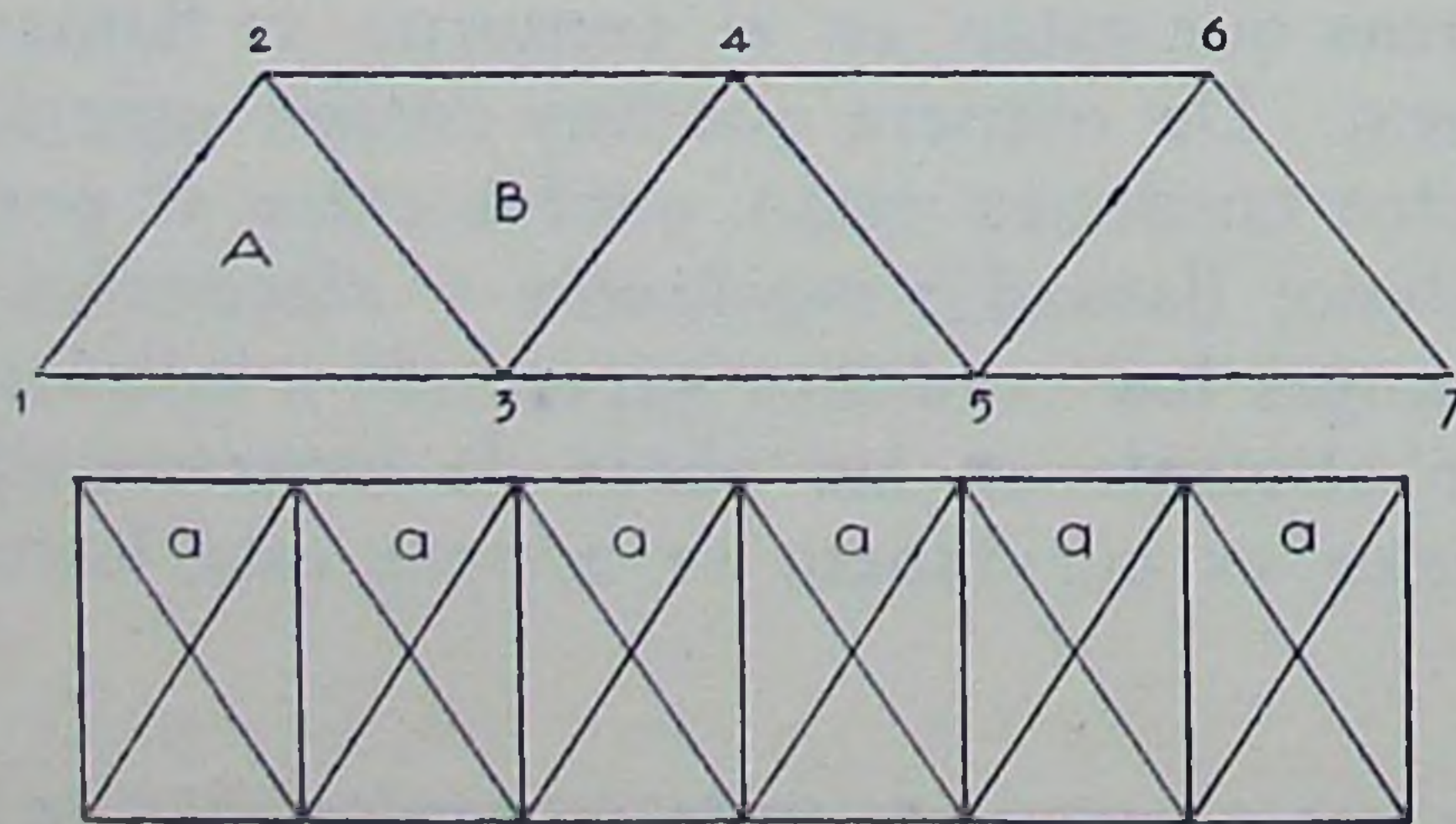
Todos los sistemas articulados planos, que se emplean en las construcciones, deben ser *indeformables*; es decir, que sin cambiar la longitud de las barras no pueden cambiar los ángulos.

La única figura indeformable es el *triángulo*; entonces, un sistema indeformable debe estar compuesto sólo de triángulos. Por esta razón las armaduras bien concebidas están constituidas de triángulos.

En la fig. 116 indicamos una celosía compuesta de triángulos unidos por un lado que es común; dos de los vértices de un triángulo deben ser comunes a los otros dos del triángulo vecino. Así en la fig. 116, los vértices 2 y 3 son comunes para los triángulos A y B. Y dispuestos de tal manera que un mismo vértice pertenezca a lo más a tres triángulos.

La celosía que cumple estas condiciones se denomina entonces, *un sistema articulado simple y completo*. En tal sistema si se suprime una sola barra deja de ser indeformable; por esto se les denomina también con el nombre de sistema *estrictamente indeformable*.

Se reconoce también por medio de la regla de Pigeaud: si un sistema triangulado es simple y completo, se puede con una línea continua recorrer todas las barras de la triangulación, partiendo de un nudo inicial para terminar en un nudo final.



figs. 116 - 117



Así, en la fig. 116 se puede recorrer, con un lápiz, la celosía con un trazo continuo, partiendo del nudo 2 y luego siguiendo este orden: 2 1 3 2 4 3 5 4 6 5 7 6.

En cambio, cuando en un sistema triangulado se puede suprimir ciertas barras, sin que el sistema deje de ser indeformable, se dice que dicho sistema es de barras *sobrantes*.

En la fig. 117, que representa una viga con cruz de San Andrés, se puede suprimir las barras señaladas con la letra *a*, sin que el sistema deje de ser indeformable.

Por lo dicho se deduce la siguiente propiedad para los sistemas triangulados simples y completos: una sección vertical en la viga, entre dos nudos consecutivos, no debe cortar sino a tres barras.

Propiedad que nos servirá para determinar las fuerzas interiores de la barra.

109.—Para el cálculo de vigas trianguladas se deberá tener en cuenta las siguientes hipótesis:

1º. Todas las cargas serán aplicadas directamente en los nudos o transmitidas a estos nudos por medio de piezas secundarias.

2º. Los ejes neutros de las barras deben ser líneas rectas y se encontrarán en el plano medio de la viga.

3º. Los ejes neutros de las barras que concurren a un nudo deben encontrarse en este nudo.

4º. Las barras de todo el sistema se supondrán articuladas en los nudos que forman; es decir, que se reúnen en un solo nudo ensambladas entre ellas por el intermedio de un eje único que a todas las atraviesa.

La condición primera no se cumple, cuando las cargas actúan directamente sobre la viga entre dos nudos consecutivos. En este caso, además de los esfuerzos de tracción o compresión, que son los únicos que se les debe hacer sufrir, se producen, en las barras que soportan las cargas, esfuerzos de flexión; los que se deberán tener en cuenta en el cálculo.

Para cumplir la segunda condición, se hará que las diagonales compuestas de hierro en ángulo, sean en número de dos para una misma barra, y colocadas a un lado y otro del eje vertical del cordón.

La condición tercera es muy importante y deberá cumplirse siempre; porque de lo contrario se producen esfuerzos secundarios que aumentarán el trabajo de las barras y serán



tanto más grande, cuanto que el punto de encuentro de las dos diagonales sea más alejado del eje neutro del cordón.

Para la condición cuarta, en efecto, los constructores americanos unen las barras por medio de pernos u otra pieza semejante; en cambio los europeos hacen las uniones por medio de ensamblajes rígidos con remaches o roblones. Esta manera de unir da lugar a esfuerzos secundarios pero que son poco importantes y no se les tiene en cuenta.

Como cada barra está unida a dos nudos, se desarrollan dos reacciones provenientes de cada nudo, ellas son iguales y de sentido contrario.

Los esfuerzos desarrollados en las barras son constantes a lo largo de ellas.

*Modo de repartición de las cargas.*—Estas pueden ser uniformemente repartidas o concentradas y actúan de tres diferentes maneras:

- 1º. En el cordón superior;
- 2º. En el cordón inferior;
- 3º. En el cordón superior e inferior.

Para los dos primeros casos, la repartición de las cargas en los diferentes nudos que reciben vigas las transversales, se hacen de la misma manera; pero se tendrán en cuenta cuando las vigas transversales están en la parte superior, entonces los nudos de esta parte serán los únicos cargados; e inversamente si las vigas transversales están en la parte inferior, estos nudos serán los cargados.

Cuando la carga es uniformemente repartida; la carga en un nudo dado en el que se apoya una viga transversal, es igual al producto del peso por unidad, por la media de las distancias que separan con los dos nudos vecinos.

Si uno de los nudos no recibe una viga transversal cargada, no llevará, en este caso, ninguna carga.

La carga de los nudos situados al recto de los apoyos, no se los toma en cuenta en el cálculo de la viga, sino sólo cuando se estudia la resistencia de dichos apoyos.

Conocidas las cargas que llevan cada uno de los nudos, se puede determinar el trabajo desarrollado en cada una de las barras de que se compone la celosía; para este propósito se dispone de tres métodos:

- 1º. El método de los polígonos de Cremona, o de los nudos;



2º. El método de Ritter o de los momentos;

3º. El método de las secciones o de Culmann.

La aplicación de estos métodos haremos a en dos capítulos: en el primero, nos ocuparemos exclusivamente de las armaduras de cubierta, por ser estructuras que se las analiza sólo con carga permanente y son más simples.

En el segundo capítulo, las celosías para puentes, en los que intervienen cargas permanentes y móviles.

## Armaduras de techo

### GENERALIDADES

110.—Las armaduras de techo, son estructuras de plano vertical que se apoyan por sus extremos en los muros del edificio, y colocadas paralelamente.

Las barras de estas armaduras, sobre todo las principales, están sujetas solamente a esfuerzos simples, o sea compresión y tracción, bajo la influencia de las cargas.

Se llama *luz* AB de la armadura a la distancia de los nudos extremos; o también a la distancia de los apoyos.

*Flecha* CD es la distancia del punto más alto a la línea que une los apoyos.

Las armaduras de techo están compuestas de piezas, que se las denomina como se indica en las figs. 118-120. Estas figs. indican: la perspectiva de un techo, la proyección vertical AB DB y la proyección horizontal.

*Par* AD y DB a los miembros del cordón superior y que están inclinados a un lado y otro y que forman las vertientes del tejado.

*Correas* HI y KL se llaman a las piezas normales al plano de la armadura y que tienen por objeto mantenerlas a estas verticales, y se apoyan en los pares por medio de un zoquetillo llamado ejión. Se los espacia de 1 a 2 m.

*Cabrios* FG se les llama a las piezas paralelas a los pares, montadas en cruz sobre las correas y colocados en el espacio de una armadura a otra. Espaciados de 0,50 m.

*Pendolón* CD es la pieza vertical media, que une la ensambladura de los dos pares con el punto medio del tirante.



*Tirante* AB es también la pieza horizontal que une los nudos extremos de la armadura.

*Cumbrera* o *Hílera* (1) DE es también la pieza horizontal, pero normal a las armaduras, colocada en la intersección de los dos planos del tejado y que forma la parte más alta.

En las armaduras de madera, se colocan a menudo numerosas piezas innecesarias que tienen por objeto oponerse a la deformación de los ensamblajes que presentan menos rigidez que los de hierro. En los cálculos se supondrán como que estas barras no existieran.

Todas las características de los sistemas triangulados indeformables, deben tener estas armaduras. Por esta razón se aplica todo lo que hemos dicho, de repartición y forma de acción de las cargas y también de métodos de cálculo.

Consideremos dos clases de cargas: 1º. El peso permanente o propio de la armadura y el del tejado; 2º. La carga pasajera; que es la carga producida por el empuje del viento.

Como las armaduras de techo se hace de madera o metal, o de ambos materiales a la vez; el peso depende naturalmente del material de que está fabricado, de la luz, de la flecha y de la distancia entre dos armaduras adyacentes.

Una fórmula aproximada para calcular el peso de la armadura es la dada por Merriman (2) que está basada, en 121 diseños de armaduras de luces que varían de 10 a 60 m. con una flecha de  $\frac{1}{6}$  a  $\frac{1}{3}$  de la luz, espaciadas de 2 a 4 m., con una presión normal a la cubierta debido al viento de 195 kilos por metro cuadrado:

Para madera

$$P = \frac{al}{2} \left( 1 + \frac{l}{10} \right)$$

Para hierro

$$P = \frac{3}{4} al \left( 1 + \frac{l}{10} \right)$$

en las que  $l$  es la luz en pies,  $a$  la distancia en pies entre dos armaduras, y  $P$  el peso en libras de la armadura.

(1) En el Ecuador se le denomina «cumbrero».

(2) Roofs and Bridges, pág. 35.



Para el sistema decimal dá Mathiú (1):

$$P = K a. l^2$$

en la que  $l$  es la luz en metros, a la distancia entre armaduras y  $K$  un coeficiente variable, que depende del material empleado en la cubierta:

- se tomará  $K = 0,80$  para tejado de zinc
- $K = 0,90$  » » » pizarra
- $K = 1,00$  » la teja de barro cocido.

La resistencia máxima admitida para la madera (eucalipto) será:

- a la tracción o compresión paralela a las fibras,  $50 \text{ k/cm}^2$
- al esfuerzo cortante paralelo a las fibras.  $12 \text{ k/cm}^2$

Para el *acero laminado* se dará los valores siguientes:

- a la tracción o compresión.  $1200 \text{ k/cm}^2$
- al esfuerzo cortante,  $1000 \text{ k/cm}^2$

Acero para *roblones* deberá resistir:

- al esfuerzo cortante  $900 \text{ k/cm}^2$

Hierro de *fundición*, los límites serán:

- a la compresión.  $800 \text{ k/cm}^2$

(No se emplea la fundición para las piezas sometidas a esfuerzos de tracción simple).

Peso de los materiales. La siguiente tabla dá la carga por metro cuadrado de techo, para los diferentes tipos en uso:

Designación de los materiales	Peso por m².
Tejas de barro cocido con el mortero necesario...	80 k.
Zinc N°. 14 con los soportes de madera.....	34 k.
Pizarra con los soportes de madera .....	45 k.
Hierro tol galvanizado de 1 mm. de espesor...	13 k.
Cubierta de vidrio de 5 mm. de espesor.....	12 k.

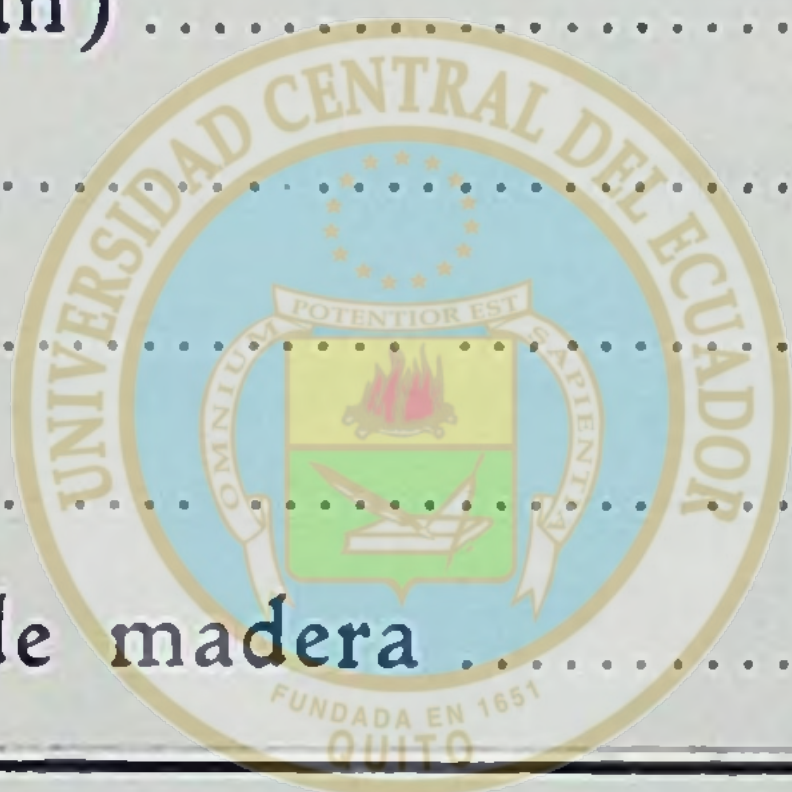
(1) *Resistance des Materiaux* pág. 419.



Se puede obtener también el peso por metro cuadrado de proyección horizontal, dividiendo estos valores por el coseno del ángulo que hace el tejado con la horizontal.

La pendiente del tejado depende del material empleado en la cubierta, y damos a continuación los valores dados por FORSTER en su Manual (pág. 786):

Clase de cubierta	Incl. grados	Relación del alto al ancho
Paja .....	45°	1 : 1
Tejas .....	45°	1 : 1
Pizarra (sistema inglés) .....	26°	1 : 2
Pizarra (sistema alemán) .....	38°	1 : 1,25
Chapa de zinc .....	6°	1 : 10
Chapa de cobre .....	6°	1 : 10
Cartón embreado .....	8°	1 : 7
Cemento de serrín o de madera .....	3°	1 : 20



ÁREA HISTÓRICA

DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

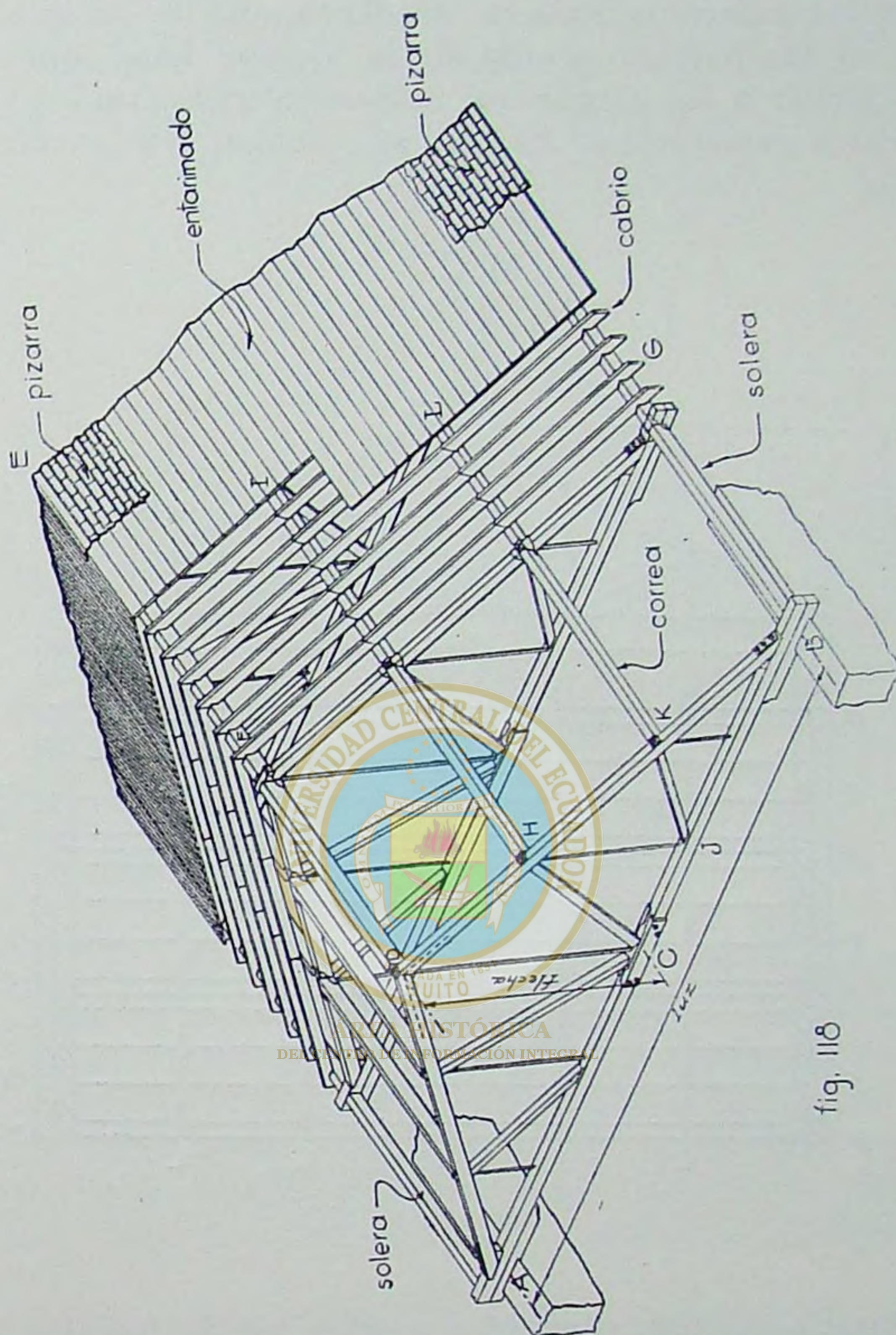
Las inclinaciones de la tabla anterior son los valores mínimos.

111.—*Cálculo de las piezas de una armadura.* No es estrictamente necesario el cálculo del material del tejado, de las correas y cabrios, puesto que siempre se les da dimensiones mayores que las que nos indican las fórmulas. Sin embargo, si es preciso, se calcularán estas piezas aplicando las fórmulas relativas a las vigas de los apoyos simples; aunque en realidad los momentos de flexión son menores, a causa de la continuidad; con todo esta circunstancia no se la tendrá en cuenta.

Las chapas de zinc, las correas y los cabrios, además de la sobrecarga del viento, deberán soportar el peso de un hombre (aprox. 80 kilos).

Siempre que se pueda, las correas se colocarán sobre los nudos de la armadura, de manera que las diferentes ba-





rras del sistema, consideradas como articuladas, no sufran sino esfuerzos longitudinales de compresión o de tracción, en dirección del eje.

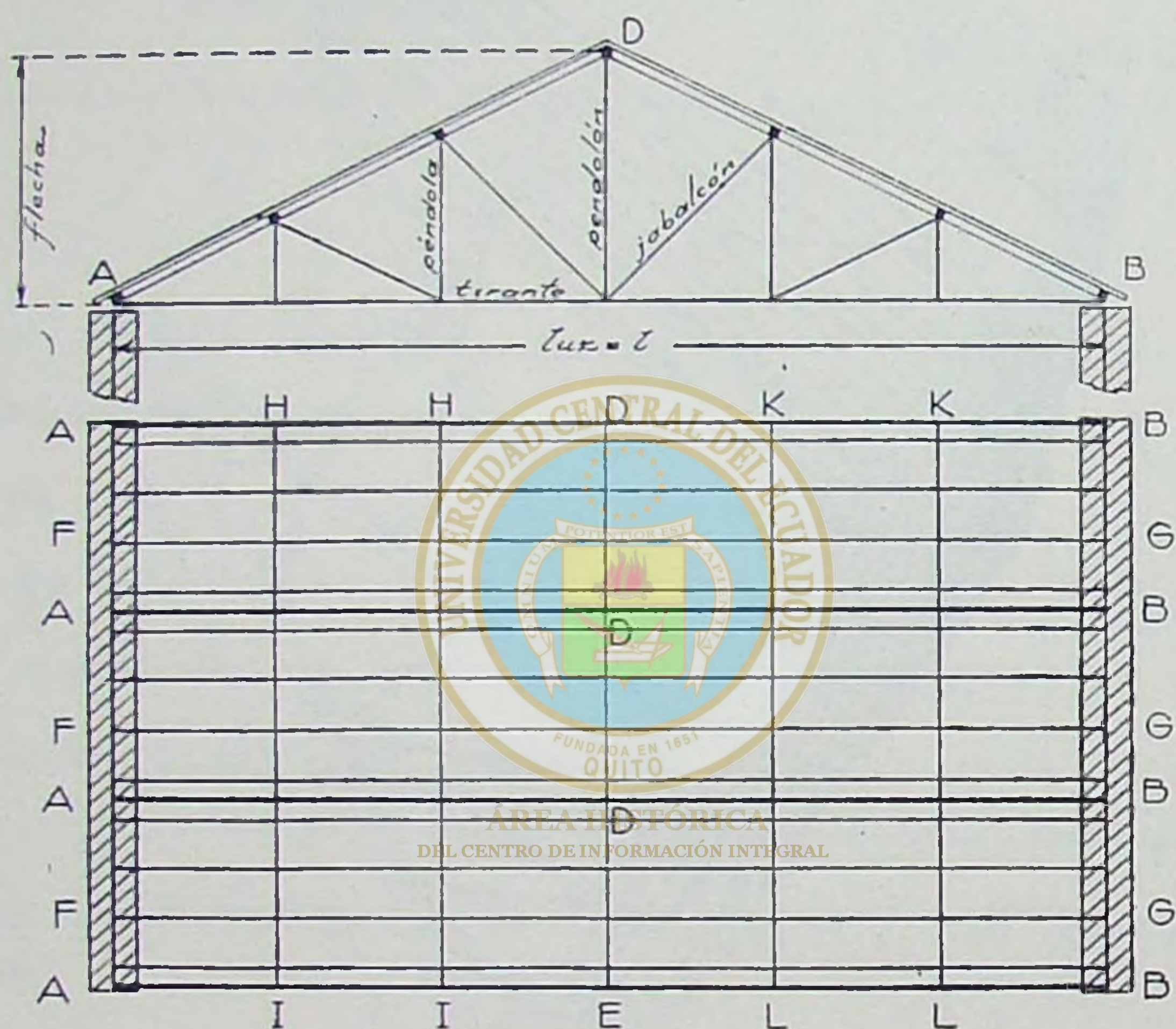
Sí por circunstancias especiales, las correas se apoyan en un punto intermedio de dos nudos contiguos, la carga que soportan estas piezas, se dividen en dos: las que se consideran como que actúan de una manera análoga a lo que hemos indicado en las vigas de puentes (pág. 104 y siguientes).



A los esfuerzos axiales, se deben añadir los que se producen en las barras a causa de la flexión local que pueden sufrir debido a las cargas que actúan entre dos nudos vecinos.

Estos esfuerzos de flexión se calculan por medio de la fórmula

$$\frac{M C}{I} \quad (1)$$



figs 119 - 120

Para las piezas sometidas a esfuerzos de tracción, es necesario que al esfuerzo axial  $\frac{F}{A}$  más el esfuerzo debido a la flexión  $\frac{M C}{I}$  sea menor que el trabajo práctico admitido como límite en el hierro o en la madera; es decir:

$$P > \frac{F}{A} + \frac{M C}{I} \quad (2)$$



en la que  $F$  es la fuerza longitudinal de la pieza;  $A$  el área de la sección transversal;  $M$  al momento de flexión;  $C$  la distancia del eje neutro a la fibra que trabaja más, y  $I$  el momento de inercia de la sección transversal.

Para las piezas comprimidas, se aplicará la fórmula de Rankine para columnas:

$$P \geq \frac{F}{A} \left( 1 + m n \frac{l^2}{r^2} \right) \quad (3)$$

expresión en la que  $m$  es un coeficiente numérico, que depende de las condiciones de apoyo de la columna y tiene por valor 1, cuando la columna articulada en sus dos extremidades; 2, cuando esta perfectamente empotrada;  $l$  es la longitud de la

pieza;  $r = \frac{I}{A}$  es el radio de giro. Y  $n$  tiene por valor:

para el acero  $n = 0,0001$

para la madera  $n = 0,0002$ .

Para determinar la sección transversal de una pieza sujeta solamente a compresión, el camino más simple es: suponer una sección transversal de ensayo y se aplica la fórmula Rankine; este resultado debe ser menor que el trabajo admitido en la práctica como límite para las piezas comprimidas no sujetas a pandeo. Si se divide al esfuerzo total por este último valor, nos dará la sección transversal conveniente.

*Separación de las armaduras.*—Teóricamente la separación de una armadura a la siguiente, es de  $\frac{1}{4}$  de la luz; pero en la práctica está subordinado a condiciones peculiares del edificio. Si la cubierta, descansa sobre las correas, la separación de las armaduras es de 5 metros, siempre que sean luces mayores de 20 metros.

Cuando la cubierta descansa directamente sobre las armaduras, el espaciamiento debe ser de 2 a 4 metros, según la clase del entarimado.



## Cálculo de las armaduras de techo

## METODO DE CREMONA

112.—El método de Cremona está basado en el principio de fuerzas concurrentes que dice (v. pág. 9): si al componer todas las fuerzas concurrentes se obtiene un polígono cerrado, las fuerzas están en equilibrio.

Para hacer más claro el proceso, tomemos una armadura de cubierta la más sencilla, la llamada de *rey*, fig. 121.

En la armadura actúan cinco fuerzas, *ab*, *bc*, *cd*, y *ef*, en cada uno de los nudos; éstas desarrollan dos reacciones cuya magnitud se conoce de antemano por cuanto las fuerzas y la armadura son simétricas y la dirección es paralela a las fuerzas.

Como el conjunto del sistema está en equilibrio cada nudo tomado aisladamente está también en equilibrio, bajo la acción de la fuerza directamente aplicada y de los esfuerzos de las barras que concurren en el nudo.

Si hubiera nudos en los que no actuara ninguna fuerza exterior, el equilibrio se hace entre los esfuerzos de las barras que allí se articulan; pero si las barras no fueran sino dos, la condición de equilibrio es que no soportan ningún esfuerzo y se llaman entonces barras sobrantes y pueden suprimirse sin cambiar el equilibrio del sistema.

En cada nudo se conoce la fuerza exterior en magnitud, en su línea de acción y en su sentido; los esfuerzos de las barras sólo se conocen en su línea de acción que son los ejes neutros de las barras.

Entonces, por el conocimiento completo de una de las fuerzas concurrentes, nos permite determinar las otras, siempre que las desconocidas no sean más de dos.

Es de mucha ayuda, en el trazado de polígono de Cremona, adoptar la siguiente notación:

Como hemos indicado en la pág. 21, se colocan las letras en los espacios de las fuerzas, principiando por la izquierda fig. 121; así: *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, que son las cinco fuerzas exteriores; *fg*, y *ga*, son las dos reacciones. Luego se ponen letras en los espacios o triángulos de la armadura. Cada barra se la designa por las dos letras de los espacios adyacen-



tes; por ejemplo las dos barras horizontales (tirantes) son la  $hg$  y la  $kg$ ; el pendolón es  $ij$ .

Esta notación tiene la gran ventaja de que en el polígono de Cremona, se designa con las mismas letras, pero con mayúsculas; las direcciones de las fuerzas o los esfuerzos de las barras están designados por el orden de las letras. Para lo cual hay que enunciarlas en el sentido de las agujas del reloj, al rededor de un nudo cualquiera.

Primero se traza el dinámico de las fuerzas exteriores, allí incluídas las reacciones, principiando por la primera fuerza de la izquierda y luego poniendo las demás en el orden en que se las encuentra al recorrer el contorno de la armadura. La primera fuerza es  $ab$  y actúa hacia abajo; de manera que pondremos a escala la magnitud  $AB$  en el mismo sentido. Continuando de esta manera, se ha terminado el dinámico: al leerse siguiendo el contorno de la armadura, en el sentido de las agujas de un reloj, se tiene  $abcdefg$ ; estas letras pero mayúsculas representan el dinámico; el orden de sucesión de las letras indica la dirección en la cual la fuerza actúa.

Figuraremos en el polígono, con líneas fuertes los esfuerzos de compresión y en líneas delgadas las de tracción.

En el nudo del apoyo izquierdo, tenemos la reacción  $gb$  y las dos barras de esfuerzos desconocidos,  $bh$  y  $hg$ ; por éste

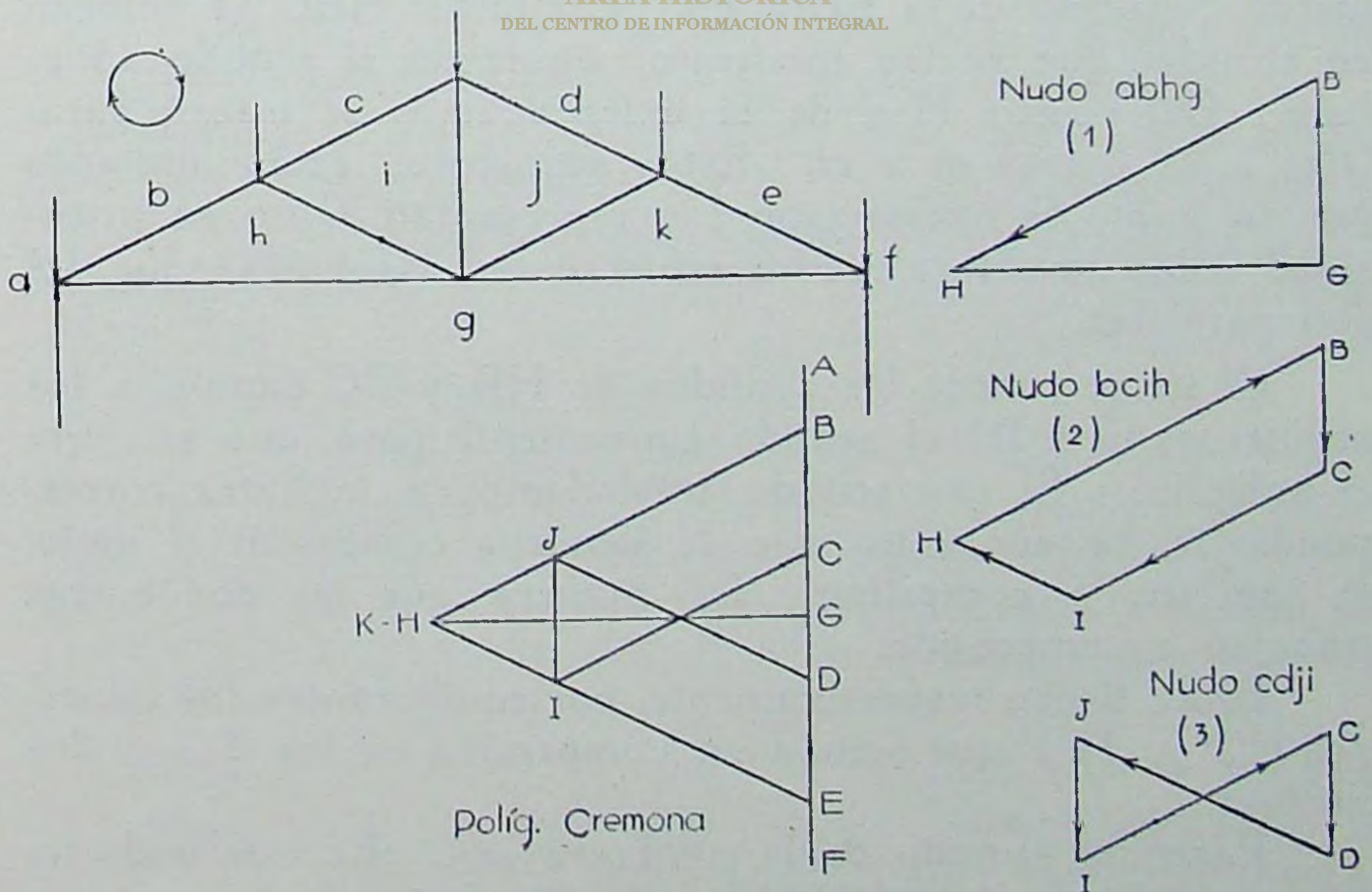


fig. 121



principiaremos el trazado de Cremona. La fuerza  $ab$  no tiene ninguna influencia en los esfuerzos de la armadura, sino únicamente en las piezas que forman el apoyo.

Se traza a escala la magnitud de la reacción  $GB$  y de las extremidades de este vector las paralelas a las barras  $bh$  y  $hg$  (v. en la figura 121 (1). Estos segmentos están limitados por su intersección  $H$  y se tiene el polígono  $BHG$ , en el que  $BH$  es el esfuerzo de la barra  $bh$  y  $HG$  de la barra  $hg$ .

Como se conoce el sentido de la fuerza  $CB$ , damos a los segmentos  $BH$  y  $GH$  un sentido tal que cerremos el polígono. Si este sentido transportamos a las barras correspondientes, se constata que  $bh$  tiende a comprimir al nudo y la barra  $hg$  a extender. Entonces la  $bh$  es compresión y la  $hg$  es tracción.

Estas fuerzas tienen como equilibrantes, las fuerzas  $H'B'$  y  $G'H'$  que actúan en compresión y tracción respectivamente sobre los nudos  $bcíh$  y  $hijk$ .

Pasemos ahora, al nudo superior  $bcíh$ , en el que las barras  $cí$  y  $ih$  son de esfuerzos desconocidos. Se construye el dinámico con la fuerza  $bc$  (fig. 121 (2) valiéndonos del esfuerzo conocido de la barra  $hb$ . Las líneas  $HBC$  se colocan en el orden que se las encuentra, siguiendo el sentido adoptado. Del origen  $H$  y de la extremidad  $C$  se trazan paralelas a las barras  $ih$  y  $cí$ . Estos segmentos están limitados por su punto de intersección  $I$  y representan tanto en intensidad como en naturaleza los esfuerzos en las barras que les son paralelas.

Como no se conoce los sentidos de  $HB$  y  $BC$  damos a los segmentos  $CI$  y  $IH$  el sentido conveniente para que se cierre el polígono. Si este sentido trasladamos a la barra correspondiente, se encuentra que  $cí$  tiende a comprimir el nudo;  $ih$  también a comprimir. De manera que las dos barras trabajan a compresión.

Estas tienen respectivamente, por equilibrantes los esfuerzos  $I'C'$  y  $H'I'$  que actúan en compresión en los dos nudos vecinos.

Pasemos al nudo de la cumbrera  $cdji$ . En este nudo tenemos la fuerza  $cd$  conocida y el esfuerzo en la barra  $ic$ , y desconocidas las barras  $dj$  y  $ji$ .



Tracemos el dinámico en la fuerza  $cd$  y con el esfuerzo de la barra  $ic$ , nos dá la línea  $ICD$  fig. 98 (3), tomadas en el orden ya establecido.

Luego de los puntos  $I$  y  $D$  se traza paralelas a las barras  $ji$  y  $dj$ . Estas paralelas están limitadas por su punto de intersección  $J$  y representan tanto en intensidad como en naturaleza, los esfuerzos de las barras que les son paralelas.

Conociendo el sentido del esfuerzo  $IC$  y de la fuerza  $CD$ , se dá el mismo a los segmentos  $DJ$  y  $JI$  para que este polígono se cierre. Se ve que si trasladamos estos sentidos al nudo de la cumbrera, la barra  $dj$  comprime al nudo y la  $ji$  la extiende. Luego la primera es compresión y la segunda tracción.

Y de una manera igual se sigue con todos los nudos.

Las construcciones de los polígonos, trazados separadamente para cada nudo, son útiles solamente para la explicación detallada del método de Cremona y no para la explicación del método más sintético y más cómodo que es el que vamos a indicar, llamado polígono de Cremona.

Se traza primero el dinámico de todas las fuerzas exteriores, incluídas las reacciones,  $ABCDEFGA$ . Sobre este dinámico vamos a trazar sucesivamente los polígonos correspondientes a cada nudo, fig. 98 (4).

Se principia como antes por uno de los nudos que no contiene sino dos barras de esfuerzos desconocidos.

En el nudo del apoyo izquierdo,  $abhg$ , tiene solamente dos barras desconocidas, la  $bh$  y la  $hg$ , y conocidas las fuerzas  $ga$  y  $ab$ . Como las fuerzas  $ab$  y  $ga$  son directamente opuestas, su resultante es igual a la diferencia de las dos; o lo que quiere decir que la fuerza  $ab$  no influye en el cálculo, por eso no se la toma en cuenta.

De los puntos  $B$  y  $C$  se trazan paralelas a las barras  $bh$  y  $hg$ , cuya intersección  $H$  nos da la magnitud de estos esfuerzos. El sentido en el polígono indicado por la reacción  $GA$ , nos da el sentido de las demás; así el sentido de  $BH$  indica compresión en la barra  $bh$ ; el sentido  $HG$  indica tracción para la barra  $hg$ .

Pasemos al nudo  $bcih$ : en este nudo se conoce el esfuerzo de la barra  $hb$  y la fuerza  $bc$ , que ya están figurados en el polígono de Cremona, y los esfuerzos desconocidos de las barras  $ci$  y  $ih$ ; de los puntos  $C$  y  $H$  se trazan paralelas a estas barras y su punto de intersección  $I$  nos determina las magni-



tudes, y las direcciones al recorrer este polígono, nos indica que ambas barras están en compresión.

Se pasa, luego, al nudo de la cumbrera  $cdji$ ; pues, no se puede pasar al nudo inferior, por cuanto tiene tres barras desconocidas. En este nudo se tiene desconocidas las barras  $dj$  y  $ji$ ; las otras líneas de este nudo ya están trazadas en el polígono de Cremona. Por los puntos D y I se trazan paralelas a las barras  $dj$  y  $ji$ , el punto de intersección J determina las magnitudes de estos esfuerzos. Siguiendo el sentido del contorno poligonal CDJIC, dado por la fuerza  $cd$  se deduce que  $dj$  está en compresión y  $ji$  en tracción.

Pasemos al nudo inferior  $ghijk$ , en el que concurren cinco barras y ninguna fuerza. Desconocidos son los esfuerzos de las barras  $jk$  y  $kg$ ; por los puntos J y G se trazan paralelas a estas barras, que se limitan por su intersección K y que está superpuesta en la intersección H, vértice que lleva por lo tanto dos letras. Además las paralelas JK y KG coinciden con las líneas BH y HG, por ser las barras  $jk$  paralela a la  $bh$ , y la  $kg$  forma una misma línea con  $hg$ . El sentido del polígono GHIJKG nos indica el de los esfuerzos conocidos de las barras  $gh$  y  $hi$ ;  $gh$  tiene que hacer tracción en este nudo y  $hi$  compresión; luego JK representa la compresión de la barra  $jk$  y KG la tracción de la barra  $kg$ .

No nos queda sino el esfuerzo de la barra  $ek$  por conocer: considerando el nudo  $dekj$ , debe darnos un contorno cerrado con las tres barras que concurren en este nudo y con la fuerza  $de$ ; luego simplemente hay que unir los puntos K y E. Si el dibujo está bien hecho esta línea debe ser paralela a la barra  $ek$ .

El sentido del contorno poligonal DEKJD, dado por la fuerza  $de$  o por los esfuerzos de las barras conocidas, nos indica que  $ek$  actúa en compresión.

Determinados los esfuerzos de todas las barras de la armadura, la construcción del polígono de Cremona está completo y los esfuerzos de cada barra se obtiene midiendo a la escala de las fuerzas cada una de las líneas.

Debe advertirse los siguientes puntos:

1º. Que el esfuerzo de cualquier barra de una armadura está representado por las mismas letras de la barra. Cuando está comprendida entre dos fuerzas, el esfuerzo se traza del punto común de las dos fuerzas en el dinámico.



2º. Que el dinámico de un nudo cualquiera se le designa con las letras que le rodean; y la dirección de los esfuerzos se indica por la sucesión de las letras que se obtiene al enunciarlas en el sentido de las agujas de un reloj.

3º. Que a un nudo cualquiera corresponde siempre en el polígono de Cremona, un polígono cerrado y viceversa.

4º. Que los esfuerzos correspondientes a tres barras que forman un triángulo, forman un haz en el polígono de Cremona.

5º. Que para determinar el esfuerzo que sufre una barra cualquiera, la lectura se hace en el polígono, en el mismo sentido que en el nudo a que corresponde. Llevando el mismo orden de sucesión en el polígono de Cremona indicará la dirección del esfuerzo que ejerce la barra sobre el nudo que se estudia: Si la dirección es hacia el nudo, el esfuerzo es compresión; si se aleja del nudo el esfuerzo es tracción.

6º. Que al construir el dinámico correspondiente a un nudo cualquiera, todos los lados del polígono, menos los dos esfuerzos desconocidos, estarán ya representados en el polígono de Cremona; y los puntos de los cuales deben trazarse estos esfuerzos, están indicados con una de las letras con las que se denomina a la barra. El punto de intersección de estos dos lados se marca con la letra común de las dos barras.

Para conseguir que el dibujo sea lo más preciso posible, aconsejo, que la armadura se debe dibujar con gran exactitud, y el polígono de Cremona con mucho cuidado. La causa de errores, especialmente en las armaduras que están compuestas de muchas barras, está en que la construcción de cada dinámico está basado en el trazado del precedente; acumulándose así los errores. Para evitar esto, debe cambiarse este método con el de Culmann, como explicaremos más adelante. O tam-

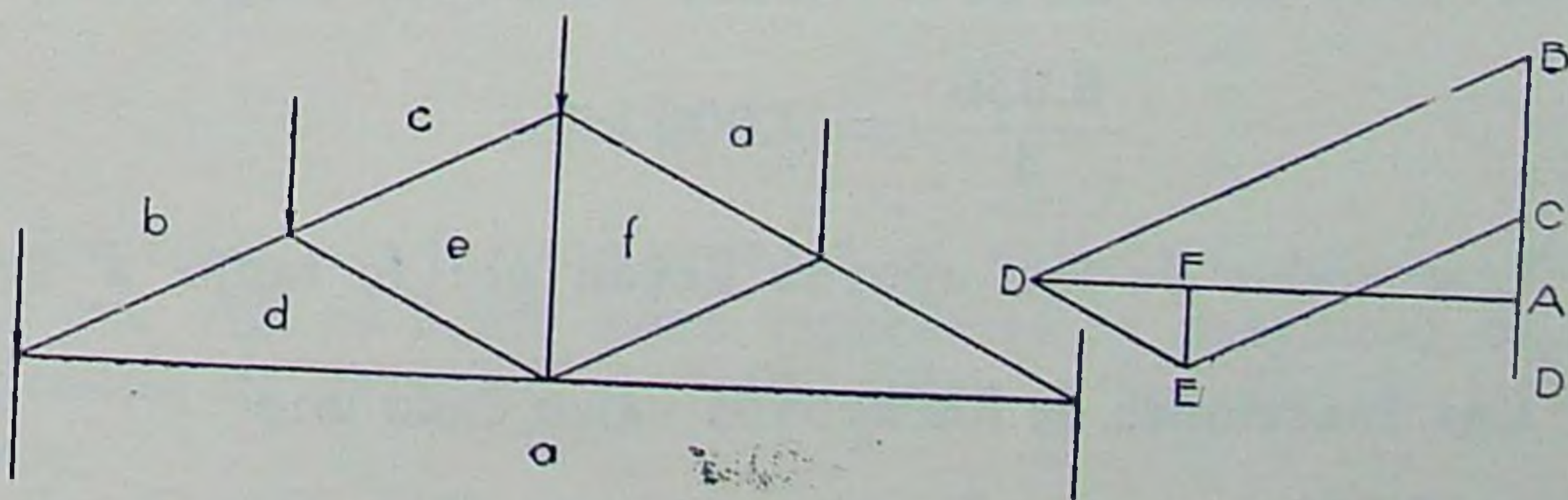


fig 122



bién principiar el dibujo del polígono de Cremona, por los dos extremos de la armadura hasta la mitad.

NOTA.—Por la fig. 122 se observa que cuando la armadura y las fuerzas son simétricamente dispuestas, el polígono de Cremona es también simétrico y por lo tanto no hay necesidad de dibujarlo para toda la armadura sino sólo la mitad; las barras simétricas sufren el mismo esfuerzo: así el esfuerzo de la barra  $bh$  es igual a su homóloga  $ek$ , etc.

113.—EJEMPLO. Sea una armadura de cubierta Polonceau, de 16 m. de luz, 4 m. de flecha. Los puntales  $ef$  y  $e'f'$  son perpendiculares en la mitad a los dos pares; la barra horizontal  $gc$  dista de la cumbrera 3,50 m. La carga permanente es de  $77 \text{ k/m}^2$  de superficie de cubierta con una distancia entre armaduras de 5 metros. (fig. 123).

El peso de la armadura es de:

$$P = K al^2 = 0.90 \times 5 \times 16^2 = 1.150 \text{ kilos};$$

admitiendo que el tejado es de pizarra el coeficiente es de 0,90.

El peso de la cubierta es entonces:

$$P' = 5 \times 17.88 \times 77 = 6.880 \text{ kilos.}$$

El peso total es:

$$1.150 + 6.880 = 8.030 \text{ kilos.}$$

Y cada nudo de la armadura lleva una carga de

$$\frac{8.030}{4} = 2.000 \text{ kilos.}$$

Los nudos de los apoyos llevan por lo tanto a 1.000 kilos.

Las reacciones de los apoyos valen cada uno

$$\frac{8.030}{2} = 4.000 \text{ menos la carga de 1.000 kilos}$$



que actúan en estos nudos, hacen que valga solamente 3.000 kilos.

Las fuerzas y la armadura siendo simétrica, nos imitaremos en el cálculo de los esfuerzos de las barras, sólo a la mitad.

Todas las fuerzas siendo ya definidas, se comienza con la construcción del dinámico ABC, que corresponde a la fuerza  $ab$  y a la mitad de  $bc$ , o sea 3.000 hilos.

En el nudo del apoyo se tiene conocidas solamente la reacción y desconocidas las dos barras  $ae$  y  $ec$ .

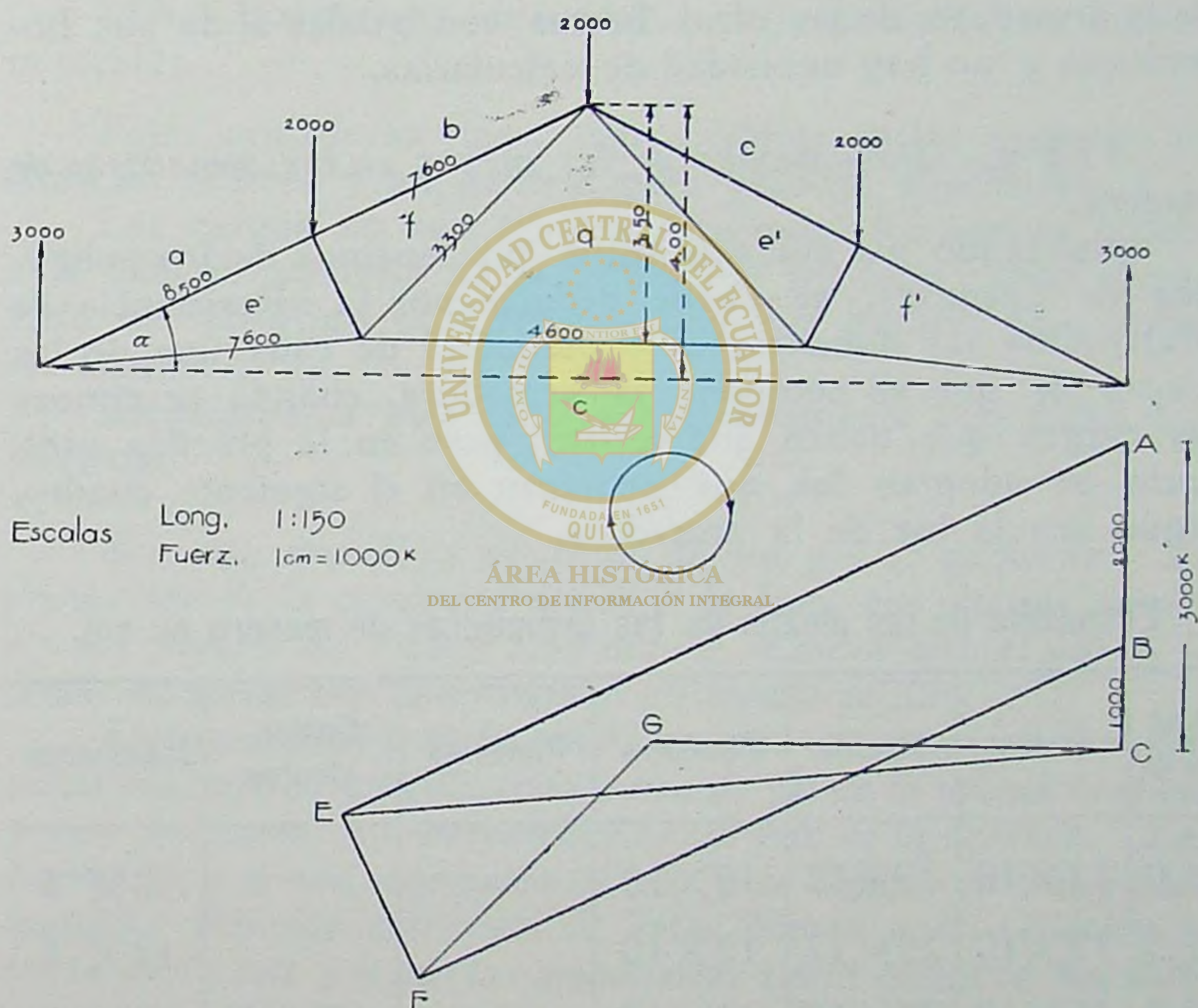


fig. 123

Con estas tres fuerzas se traza el polígono cerrado CAE; en el que  $AE = 8.500$  kilos representa la magnitud de la compresión de  $ae$ , y  $EC = 7.600$  kilos la tracción de la barra  $ec$ .

En el nudo  $abfe$ , tenemos sólo dos barras desconocidas  $bf$  y  $fe$ .



Por los puntos B y F se trazan paralelas a estas barras y el punto de intersección F determina las magnitudes. El segmento  $BF = 7.600$  kilos representa la compresión de la barra  $bf$ ; el segmento  $FE = 1.800$  kilos la compresión de la barra  $fe$ .

Pasemos al nudo inferior  $cefg$ , en el que hay dos barras desconocidas la  $fg$  y  $gc$ . Entonces por los puntos F y C se dibuja paralelas a estas barras y la intersección G determina las magnitudes,  $FG = 1.800$  kilos que es la tracción de la barra  $fg$ ; y  $GC = 4.600$  kilos es la magnitud de la tracción de la barra  $gc$ .

Con lo que se ha determinado los esfuerzos de la mitad de la armadura; de las otras barras son iguales al de sus homólogas y no hay necesidad de calcularlas.

113 a.—*Dimensiones de las piezas en las armaduras de madera.*

Aplicando los conocimientos que tenemos de los polígonos de Cremona, se puede deducir por la «Resistencia de Materiales» las dimensiones o escuadría de cada una de las piezas de que se compone la armadura, cuando se conoce las cargas que tienen que resistir; pero en la práctica ordinaria se adoptan las que aparecen en el siguiente cuadro, según sea la luz de la armadura.

Escuadría de las piezas de las armaduras de madera en cm.

Luz en m.	Pares	Tirante	Pendolón	Péndolas	Contra-vientos	Jabalcones
6,0	12×10	25×12	10×10			8× 8
7,5	13×10	25×12	12×10			12× 8
9,0	15×10	27×12	12×12		15×10	12× 8
10,5	15×13	28×15	15×12		17×10	12× 8
13,5	16×13	32×18	15×15	20×10	17×15	12×10
15,0	20×15	32×20	20×20	20×10	22×15	12×10
16,5	20×18	35×22	22×20	22×10	25×15	15×15
18,0	22×20	37×25	25×20	25×10	27×15	15×15



## Escuadría de Correas y Cabrios

Luz	Correas	Cabrios	Luz	Correas	Cabrios
1,80	15×10	10×6	3,00	20×15	15×9
2,40	17×12	12×8	3,60	22×17	17×10

114.—*Armaduras disimétricas bajo la acción de cargas verticales.*

Estas armaduras tienen uso corriente en las cubiertas de fábricas, talleres y en general para grandes superficies.

Las cargas no son iguales para todos los nudos, debido a la falta de simetría de la armadura; por esta razón el trazado del polígono de Cremona hay que hacerlo para todas las barras.

Estudiaremos este caso simultáneamente con datos numéricos.

Sea una armadura de 10 m. de luz, y 4,33 de flecha. La proyección de la cumbrera divide a la línea que une los apoyos en dos partes, de 7,50 y 2,50 m.; de manera que el par de la izquierda forme con la horizontal un ángulo de 30°.

La triangulación de la armadura está compuesta de un pendolón mn, que se articula con un tirante ph de la misma longitud y con la barra np perpendicular al par de la derecha. Las barras kl y ji son normales al par y le dividen en tres partes iguales. Por los extremos de estas barras y del pendolón se traza el tirante y luego las diagonales, como indica la fig. 124.

La equidistancia entre armaduras es de 5 m.; y actúa una carga uniformemente repartida de 40 kilos por metro cuadrado de cubierta, allí incluido el peso de la armadura, para la vertiente izquierda.

La vertiente de la derecha lleva una carga uniformemente repartida de veinte kilos por metro cuadrado.

Determinar por medio del polígono de Cremona los esfuerzos que soportan las barras de la armadura.



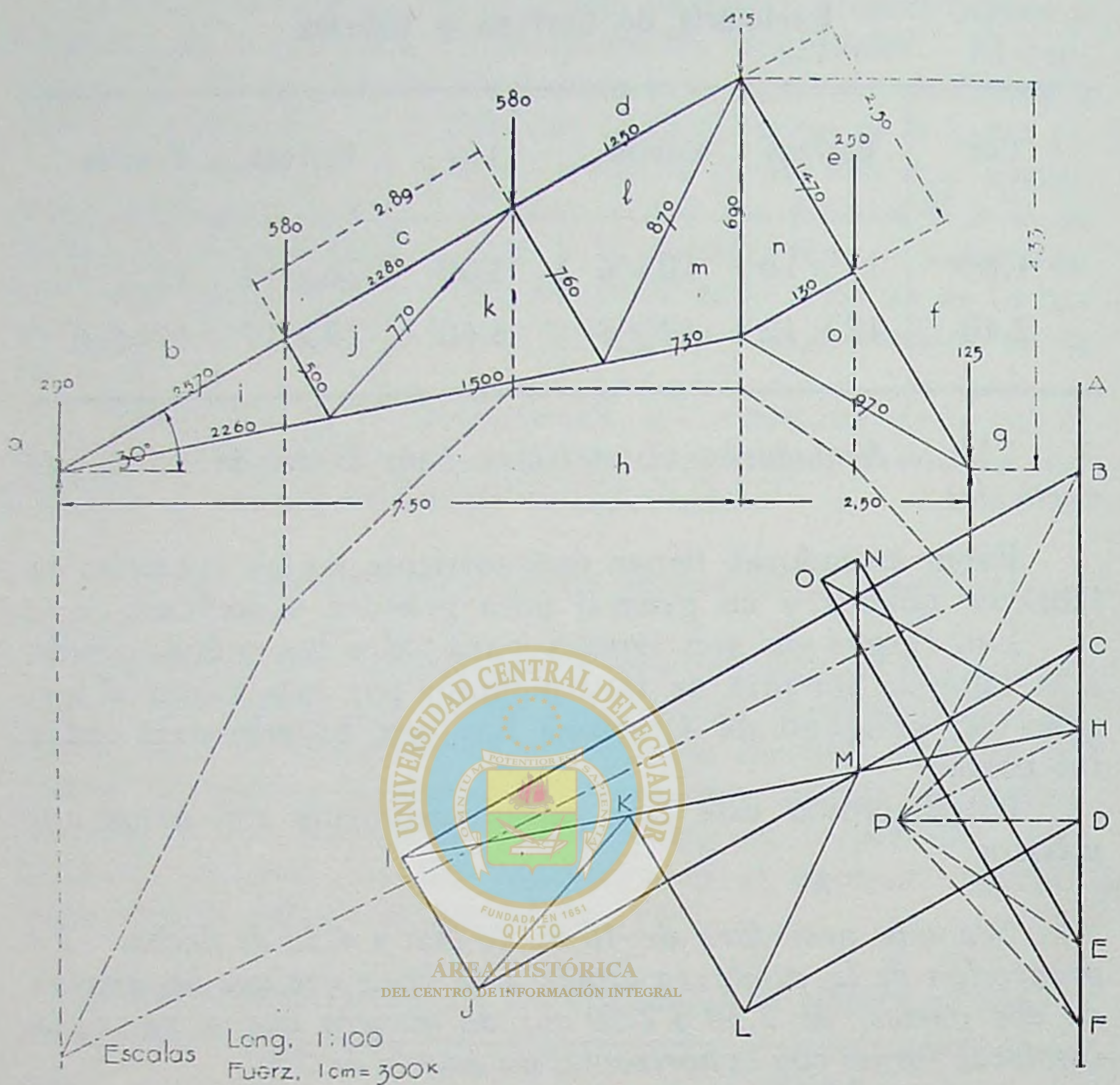


fig. 124

Primero designemos con letras, las regiones exteriores limitadas por las líneas de acción de las fuerzas y las regiones interiores del sistema triangulado.

Sobre cada nudo está concentrada una carga igual a la mitad de la suma de las cargas llevadas por las barras que allí concurren. Como cada una de las tres barras en que está dividido el par de la izquierda, tiene una longitud de 2,89 m.; la carga sobre cada nudo será:

$$2,89 \times 5 \times 40 = 580 \text{ kilos}$$

y sobre los nudos de la cumbrera y del apoyo será la mitad del valor anterior:



$$\frac{580}{2} = 290 \text{ kilos}$$

El nudo intermedio de la vertiente derecha lleva una carga de:

$$5 \times 2,50 \times 20 = 250 \text{ kilos}$$

Y el nudo de la cumbrera y el apoyo, llevan, por lo tanto la mitad de este valor:

$$\frac{250}{2} = 125 \text{ kilos}$$

este valor hay que sumar al hallado anteriormente, para encontrar la carga total en la cumbrera:

$$290 + 125 = 415 \text{ kilos}$$

Los nudos de los apoyos llevan: el de la izquierda 290 kilos y el de la derecha 125 kilos. Pero como estas cargas tienen las mismas líneas de acción que sus propias reacciones, se anulan aquellas con estas y no se las tiene en cuenta en el cálculo.

ÁREA HISTÓRICA  
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Ahora ya conocidas las cargas, calculemos las magnitudes de las reacciones de los apoyos.

Se traza el dinámico de las fuerzas exteriores BCDEF y el funicular correspondiente (líneas de puntos). El lado de cierre del funicular nos proporciona el radio polar PH que determina las reacciones  $FH = 965 \text{ k.}$  para la reacción derecha y  $HB = 860 \text{ k.}$  para la reacción izquierda.

Para determinar los esfuerzos de las barras del sistema, vamos a construir el polígono de Cremona, principiando por un nudo que contenga solo dos esfuerzos desconocidos y observando un solo sentido de recorrido, el de las agujas de un reloj.

Principiemos por el nudo del apoyo izquierdo *abih*. Desconocidos son los esfuerzos de las barras *bi* y *ih*. Por los puntos B y H del dinámico se trazan paralelas a estas barras; éstas se encuentran en I. El sentido de recorrido es BIHB: compresión para la barra *bi* y tracción para *ih*.



Pasemos al nudo siguiente, el  $bcji$ . Desconocidos son los esfuerzos de las barras  $cj$  y  $ji$ ; de los puntos I y C del dinámico se trazan paralelas a estas barras; ellas se encuentran en J. El sentido de recorrido es CJIBC: compresión para  $cj$  y para  $ji$ .

Pasemos al nudo inferior  $ijkh$ , en el que tenemos dos barras de esfuerzos desconocidos, la  $jk$  y la  $kh$ ; de los puntos J y H del dinámico, se traza paralelas a estas barras, y se encuentra en K. El sentido para este polígono es IJKHI: tracción para  $jk$  y para  $kh$ .

En el nudo superior  $cdlkj$  se tiene dos barras de esfuerzos desconocidos la  $dl$  y  $lk$ ; de los puntos D y K del polígono de Cremona se trazan paralelas a estas barras y su punto de intersección es L. El sentido de este polígono es de CDLKJ: compresión para  $dl$  y para  $lk$ .

De una manera semejante se traza para los nudos restantes, pasando al  $lmhk$ , después al de la cumbrera  $denml$ , luego al  $efon$ . Hecho esto y si el trazado del polígono de Cremona está bien hecho, la paralela a barra  $oh$  trazada por el punto H debe llegar al punto O; esta última condición constituye una verificación de la exactitud con que se ha dibujado.

No nos queda sino traducir numéricamente el valor del esfuerzo de cada barra.

A este efecto, se mide a la escala de las fuerzas, que en nuestro dibujo es de 1 centímetro igual 300 kilos, en las líneas representativas del polígono de Cremona, el valor del esfuerzo de cada barra.

#### 114 a.—Caso especial.—Cargas disímétricas en las armaduras.

Sucede con frecuencia, que en los talleres de fábricas, molinos y otros establecimientos industriales, se suspenden del cordón inferior de una armadura de cubierta, pesos que por su magnitud merecen tomarse en cuenta en el cálculo del esfuerzo de las barras. Tales son, por ejemplo, los ejes o árboles de una transmisión de fuerza. En este caso es conveniente y más cómodo determinar los esfuerzos de las barras, debidos a estas cargas por medio de un polígono separado.

Para ilustrar este procedimiento indicamos la fig. (124 a) la manera de trazar el polígono de Cremona.



La carga AB, suspendida del nudo inferior es la carga que se considera. Por el polígono se ve que esta carga no produce esfuerzo en las barras  $de$  y  $jh$ , mientras que en las demás causa efectos de la misma especie que cuando se considera la carga permanente debida al peso de los materiales. Luego los esfuerzos máximos deben aumentarse de esta magnitud.

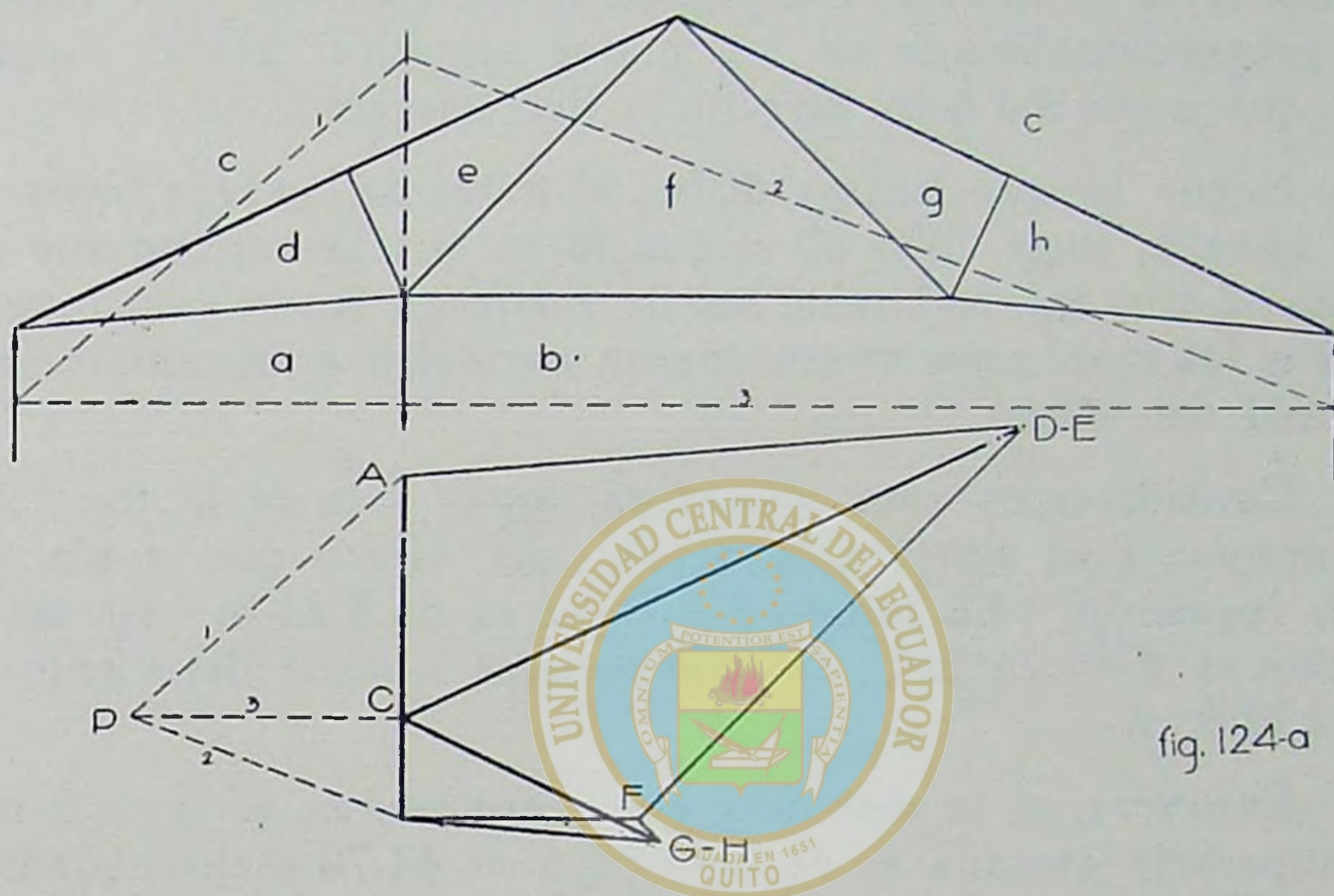


fig. 124-a

En otros casos, aunque raros, los pesos suspendidos pueden aún llegar a cambiar los esfuerzos máximos debidos a otras cargas, de compresión a tracción y viceversa.

Cuando el techo raso, está suspendido del cordón inferior, este peso se debe considerar como parte de la carga permanente y no necesita de diagrama separado. Se le combina con las otras cargas para el diagrama de carga permanente, tomándose las reacciones y pesos en el orden convenido, al rededor de la armadura y trasladados el dinámico.

### 115.—Armaduras bajo la acción del viento.

Hemos considerado hasta aquí cargas debidas al peso de los materiales que entran en la construcción de las armaduras de cubierta; pero si estas se las considera bajo la acción del viento, habrá que determinar los esfuerzos en las barras bajo esta circunstancia.



La presión debida al viento sobre la superficie de una cubierta, depende de su dirección y velocidad y también de la inclinación de la cubierta.

Se supone, en general, que el viento sopla horizontalmente, para simplificar los cálculos. Por medio de la fórmula que hemos dado ya, págs. 61 y 62, se calcula el valor de la componente normal a la superficie de la cubierta y se dividirá proporcionalmente en los nudos atacados por el viento, sea que sople del lado derecho o del izquierdo.

Según lo que hemos dicho, al tratar de las reacciones de los apoyos, págs. 39 y 60 se considera que las armaduras de pequeña luz, especialmente las de madera, tienen sus apoyos fijos y las reacciones se consideran paralelas a la componente normal del viento.

Consideremos una armadura igual a la de la fig. 123, de apoyos fijos sujeta a la acción del viento que sopla del lado izquierdo. La longitud del par es de 8,94 m.; su inclinación es  $d = 26^{\circ}34'$ . La componente normal del viento es de 130 k/m<sup>2</sup>.

Entonces, si la distancia entre armaduras es  $a = 5$  m.; la superficie atacada es de  $8,94 \times 5 = 44,70$  metros cuadrados. El empuje total será:  $44,70 \times 130 = 5.810$  kilos.

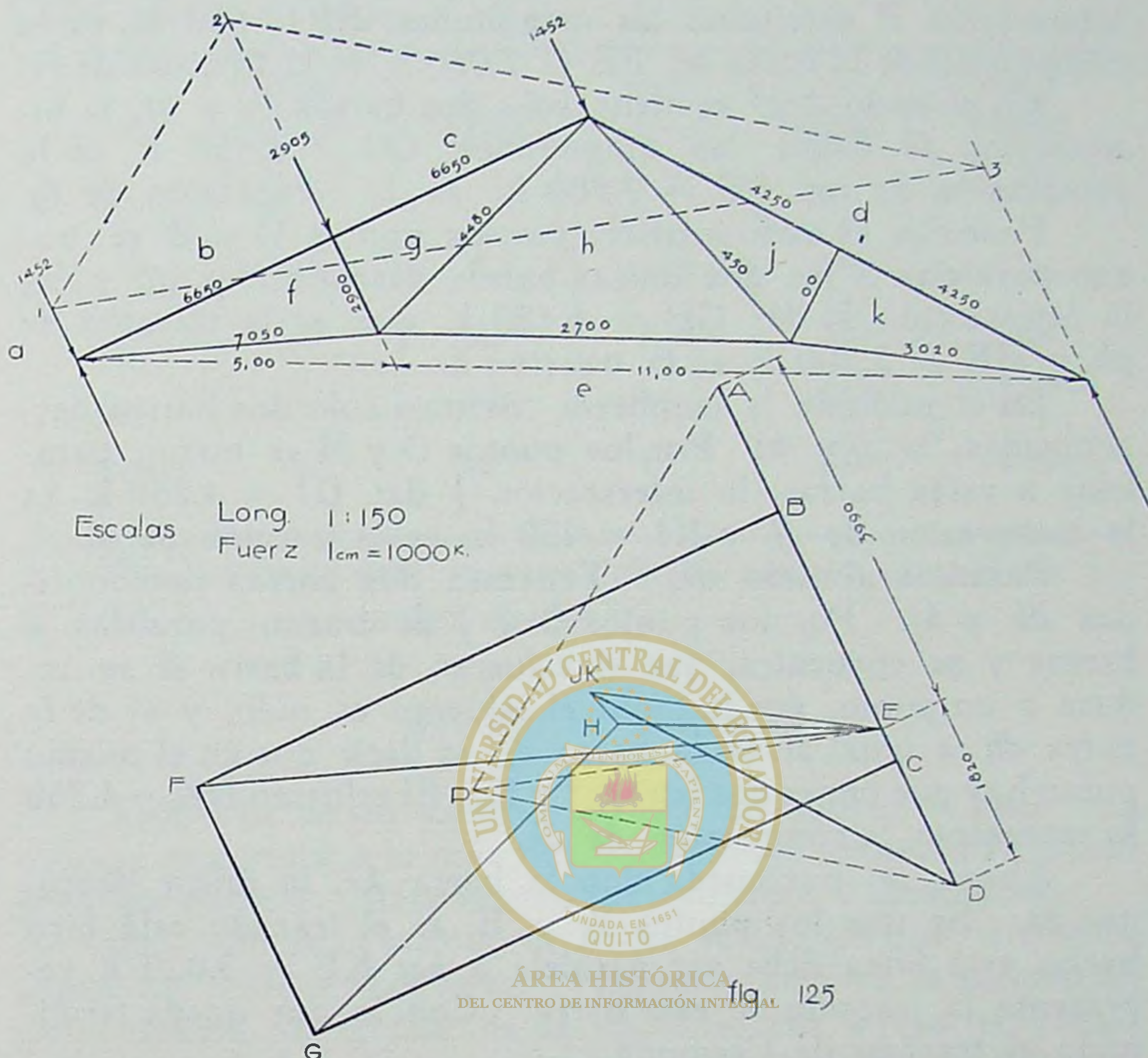
A causa de este empuje sufren los nudos del apoyo y de la cumbrera una carga de  $\frac{5.810}{5} = 1452$  k. y el nudo

intermedio soporta una carga de  $\frac{5.810}{2} = 2.905$  k. (fig. 125)

En este caso, para dibujar el polígono de Cremona, se principia por determinar las reacciones de los apoyos. Con un polo arbitrario P, se dibujan los radios polares y el funicular 1-2-3, y luego el lado de cierre 1-3. Por P se traza una paralela a esta línea que determina el punto E que nos hace conocer las reacciones:  $DE = 1820$  k. para el apoyo derecho y  $EA = 3990$  k. para el apoyo izquierdo. Este trazado está en línea de puntos, además véase en la fig. 48.

Se puede comprobar este cálculo considerando que la resultante AD del viento coincide con la componente  $bc$ , por ser las otras fuerzas simétricas y su línea de acción intercepta





a la horizontal que une los apoyos en  $z$ . Entonces sabemos por el teorema de fuerzas paralelas (pág. 22) que:

$$\text{la reacción izquierda } ea = \frac{5.810 \times 11}{16} = 3.994 \text{ k.}$$

la diferencia es despreciable y se puede admitir el primer valor como exacto.

Así queda completado el dinámico ABCDEA, línea que es normal a la cubierta o paralela a las fuerzas.

Después se trazan los polígonos de Cremona.

Principiando por el nudo  $abfe$ , se encuentran dos fuerzas de la misma línea de acción y de sentido contrario, la resultante será la diferencia aritmética de magnitud igual a  $EA - AB = EB = 2.550 \text{ k.}$  Además en este nudo concurren dos barras de esfuerzos desconocidos la  $bf$  y  $fe$ . Por



los puntos B y E se trazan paralelas a estas barras y el punto de intersección F determina las magnitudes:  $BF = 650$  k. es la compresión de la barra  $bf$ ;  $FE = 7.060$  k. es la tracción de  $fe$ .

En el nudo  $bcgf$  se tiene solo dos barras  $cg$  y  $gf$ , la intersección G define las magnitudes:  $CG = 6.650$  k. es la compresión de  $cg$ ;  $FG = 2.900$  k. es la compresión de  $fg$ .

Pasemos al nudo inferior: por los puntos G y E se trazan paralelas a las dos únicas barras desconocidas  $gh$  y  $he$ , la intersección H dá:  $GH = 4.480$  k. que es la tracción de  $gh$ , y  $HE = 2.700$  k. es la tracción de  $he$ .

En el nudo de la cumbrera tenemos solo dos barras desconocidas, la  $dj$  y  $jh$ . Por los puntos D y H se trazan paralelas a estas barras, la intersección J dá:  $DJ = 4.250$  k. es la compresión de  $dj$ , y  $JH = 450$  k. es la tracción de  $jh$ .

Pasemos al nudo  $dkj$ . Tenemos dos barras desconocidas  $dk$  y  $kj$ . Por los puntos D y J se trazan paralelas a barras y se encuentra, que el esfuerzo de la barra  $jk$  se reduce a un punto, por lo tanto el esfuerzo es nulo, y el de la barra  $dk$  es igual al de la barra  $dj$ ; es decir que en el mismo punto hay que poner dos letras, J y K. El esfuerzo  $DK = 4.250$  k. representa la compresión de  $dk$ .

Ahora, no nos queda sino la barra  $ke$ , la única desconocida. Se une los puntos K y E, si el trazado está bien hecho esta línea debe ser paralela a  $ke$ ;  $KE = 3.020$  k. representa la tracción de esta barra. Con lo que queda terminado el trazado de Cremona.

Si el viento soplas al lado derecho de la armadura, el diagrama de Cremona sería idéntico al de la fig 125, al hacerle girar al rededor de un eje vertical; por esta razón, se necesita un solo diagrama de Cremona, en el caso de apoyos fijos. Por lo tanto, los esfuerzos en las barras de cualquiera de las mitades de la armadura, cuando el viento sopla del lado derecho, son los mismos que los esfuerzos en las barras homólogas de la otra mitad de la armadura cuando el viento sopla del lado izquierdo. Por ejemplo si el viento soplas del lado derecho, el esfuerzo de  $jk$  sería  $2.900$  k. y el  $fg$  sería igual a cero, como antes.

116.— A continuación damos el valor de la componente, del empuje del viento normal a la cubierta; teniendo presente que se ha tomado para dicho cálculo, el valor de  $195$  k. por



metro cuadrado, como empuje de un huracán, registrado como el mayor de todos.

Inclin.	comp. normal k. m. <sup>2</sup>	Inclin.	comp. normal k. m. <sup>2</sup>	Inclin.	comp. normal k. m. <sup>2</sup>
5°	25	25°	110	45°	176
10°	47	30°	129	50°	186
15°	68	35°	146	55°	192
20°	88	40°	169	60°	195

Para inclinaciones mayores 60°, la presión normal se toma 195 kilos por metro cuadrado.

#### MÉTODO DE RITTER

117.—Si en un sistema triangulado simple se hace una sección ss cortará a lo más tres barras; esta propiedad es sólo para los sistemas estáticamente determinados o isostáticos.

Para aplicar el método de Ritter se supone que se conoce todas las fuerzas exteriores. Hagamos efectiva la sección ss en el sistema triangulado de la fig. 126, por la que se cortan las barras  $dk$ ,  $kj$  y  $ja$ ; la armadura queda dividida en dos partes: la de la izquierda y la de la derecha.

Cada parte si la hacemos independiente de la otra, no estarán en equilibrio, si sólo quedan bajo la acción de las fuerzas exteriores que le están aplicadas.

Para cumplir las condiciones de equilibrio, es suficiente aplicar en los puntos de corte los esfuerzos 1, 2, 3 que se desarrollaban en las barras  $dk$ ,  $kj$  y  $ja$  antes de su seccionamiento. De manera que:

$$R_1 + 1 + 2 + 3 = 0$$

y

$$R_2 + 1 + 2 + 3 = 0$$

llamando  $R_1$  y  $R_2$ , la resultante de las fuerzas de la izquierda y de la derecha respectivamente.

Aplicando el teorema de Varignon se tiene:

$$- \mathcal{M} R_1 + \mathcal{M} 1 + \mathcal{M} 2 + \mathcal{M} 3 = 0.$$



Pero si a estos momentos los referimos no a un punto cualquiera, sino con relación a uno que resulten nulos los momentos de los esfuerzos de dos barras, como es el nudo  $cdkji$ , a donde concurren las dos barras  $dk$  y  $kj$ , se deduce que:

$$-M R_1 + M 3 = 0 \quad \text{y} \quad M R_1 = M 3$$

y el momento de la barra  $ja$  es igual a:

$$M 3 = 3 \times \hat{e} \quad (1)$$

siendo  $\hat{e}$  el brazo de palanca o la distancia de la barra  $ja$  al nudo  $cdkji$ . Por la ecuación (1) el esfuerzo

$$3 = \frac{M R_1}{\hat{e}} \quad (2)$$

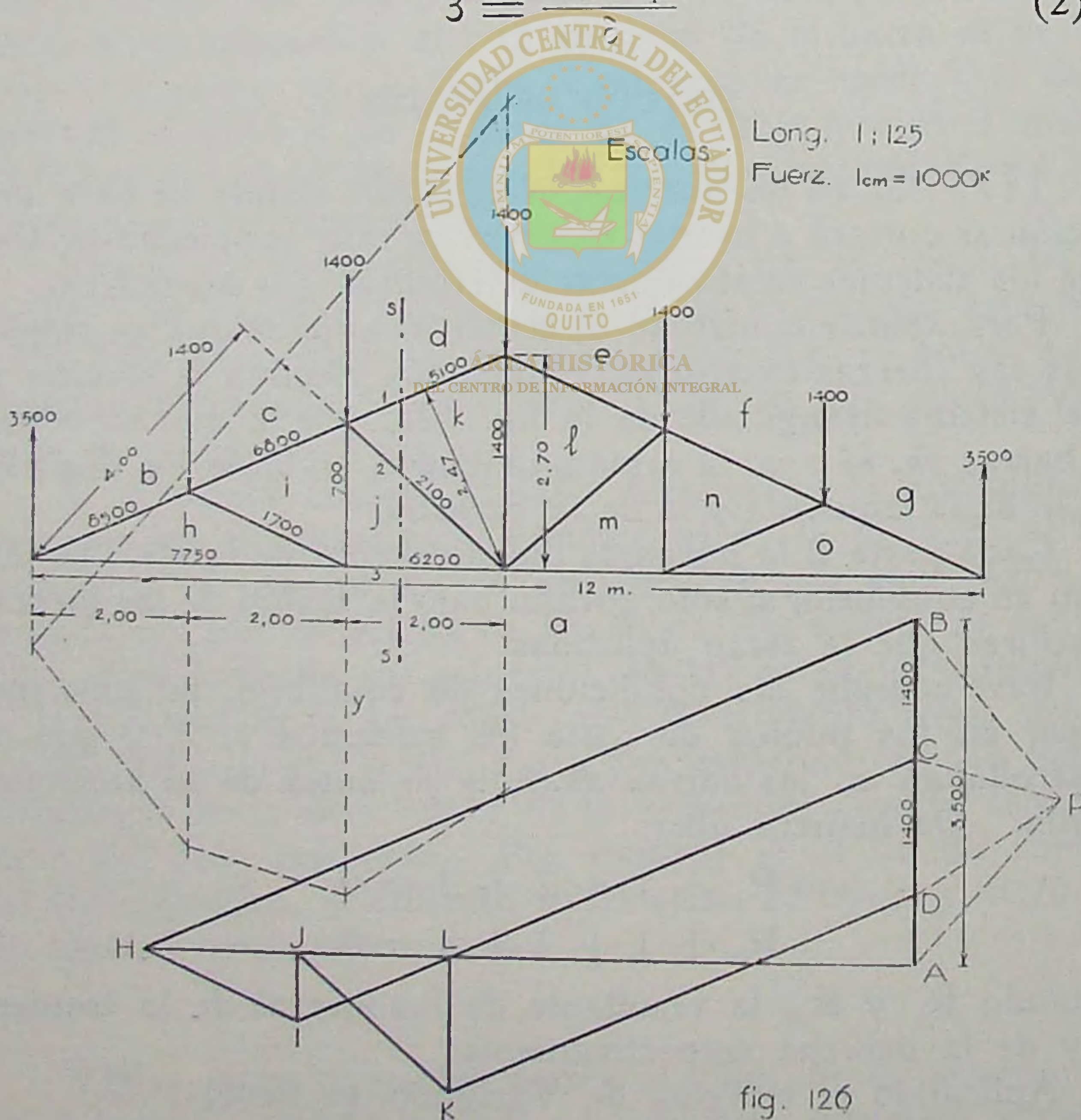


fig. 126



De donde se deduce, que el esfuerzo de una barra cualquiera es igual al momento de las fuerzas de la izquierda y dividido por la distancia de la barra al nudo opuesto.

Apliquemos a este caso la interpretación gráfica de momentos:

Primero construyamos el dinámico y el funicular relativo a las fuerzas  $R_1$  y luego se traza del nudo  $cdkji$ , la paralela a la resultante de este sistema; los lados extremos del funicular cruzan sobre esta línea, y determinan el segmento  $y$ .

Si designamos  $\Delta$  a la distancia polar, se tiene:

$$\mathcal{M} R_1 = y \times \Delta \quad (3)$$

sustituyendo en la ecuación (2):

$$z = \frac{y \times \Delta}{\delta} \quad (4)$$

En lugar de tomar una distancia polar arbitraria, hay interés de que esta distancia sea igual a la que hay del esfuerzo que se busca al nudo opuesto; es decir que  $\Delta = \delta$ ; entonces (4) queda:

$$z = y \quad (5)$$

Por la ecuación (2) se puede enunciar la regla siguiente:

*El esfuerzo de una barra de un sistema triangulado, es igual al momento de las fuerzas exteriores que se encuentran a la izquierda de la sección considerada, tomado con relación al nudo opuesto de la barra y dividido por la distancia de este nudo al de barra.*

Y por la ecuación (4): *el esfuerzo de una barra es igual a la ordenada  $y$ , limitada por los lados extremos del funicular, correspondiente al sistema de fuerzas de la izquierda de la sección, y trazada por el nudo opuesto a la barra, multiplicada por la distancia polar y dividida por la distancia que hay de esta barra al nudo que concurren las otras dos.* (1)

---

(1) Cuando esta distancia es igual a la distancia polar (ec. 5), entonces el esfuerzo de la barra es simplemente igual a la ordenada  $y$  medida a la escala de las fuerzas.



Este método gráfico se usa con más ventaja, en las armaduras de puentes que tienen los cordones superior e inferior horizontales.

La naturaleza del esfuerzo encontrado por el método de Ritter, está indicado por el sentido del par de traslación de esta fuerza al nudo opuesto a la barra; sentido que es contrario al par de traslación, al mismo nudo, de la resultante de las fuerzas de la izquierda; pues este par es equilibrante del primero.

118.—*Aplicación del método de Ritter. Una armadura de 16 m. de luz y 2.70 m. de flecha, soporta una carga de 127 kilos por metro cuadrado de cubierta.*

*Las armaduras están a una distancia de 5 m. Véase el esquema de la fig. 126; los nudos tienen una equidistancia de 2 m.*

La carga total en cada nudo es de 1.400 kilos.

Las reacciones de los apoyos  $X = Y = 3.500$  kilos.

Se desea encontrar, por el método de Ritter, los esfuerzos de las barras  $dk$ ,  $kj$  y  $ja$ , cortadas por la sección  $ss$ .

Tomemos un nudo tal que concurren dos de las barras seccionadas y sea el  $jklma$ , como eje de momentos.

Los momentos de las barras  $aj$  y  $jk$  son nulos; entonces por la ecuación (2) se tiene:

$$dk = \frac{MR_1}{\delta} = \frac{3.500 \times 6 - 1.400 (2 + 4)}{2,47} = 5.100 \text{ k.}$$

Para la barra  $ja$  tomemos momentos con relación al nudo  $cdkji$ , y se tiene:

$$ja = \frac{3.500 \times 4 - 1.400 \times 2}{1,80} = 6.220 \text{ k.}$$

De la misma manera, para encontrar el esfuerzo de la barra  $jk$ , se toma momentos con relación al apoyo izquierdo:

$$jk = \frac{1.400 (2 + 4)}{4} = 2.100 \text{ k.}$$



Para encontrar la especie de esfuerzo, consideremos la resultante de las fuerzas exteriores de la izquierda; ésta es hacia arriba: porque la reacción es mayor que las dos cargas.

Para la barra  $dk$ , se considera el par de traslación de la resultante con relación al nudo opuesto, al  $ajklma$ . Este par tiene un sentido igual al de las agujas de un reloj; pero como el par de traslación de la barra  $dk$  debe equilibrarle, tendrá sentido opuesto; sentido que nos indica que comprime a la sección izquierda de la armadura, luego es compresión.

Así mismo, el par equilibrante de la barra  $aj$  extiende, a la parte izquierda de la armadura, luego es tracción.

Y por fin para la diagonal  $jk$ , el par equilibrante de traslación de esta barra con relación al nudo  $hija$ , comprime a la parte izquierda de la armadura, luego es compresión.

Para aplicar la ecuación (4) construyamos un funicular de las fuerzas de la izquierda, cuya distancia polar  $\Delta$  es igual a la longitud de la barra  $ij$ , trazado que está en líneas de puntos (fig. 126).

Entonces el esfuerzo de la barra  $dk$  será:

$$dk = \frac{7.000 \times 1,80}{2,47} = 5.100 \text{ k.}$$

en la que  $y = 7.000 \text{ k.}$ , medida a la escala de fuerzas, y las otras dos magnitudes a la escala de longitudes. Este valor es igual al encontrado antes.

Para la barra  $ja$ , se puede aplicar directamente la ecuación (5) y como la distancia polar es igual a la distancia de la barra al nudo opuesto, se tiene:

$$ja = 6.200 \text{ k.}$$

medida la ordenada a la escala de las fuerzas.

Para la barra  $jk$ , es más cómodo el método anterior. La ordenada  $y$  habría que tomar en la vertical del apoyo izquierdo.

Para comprobar, hemos trazado, por el método de Cremona, los esfuerzos de las barras para la mitad de la armadura.



119.—Caso especial. Aplicación de los métodos de Cremona y de Ritter.

Cuando la armadura es de considerable luz, hay que evitar los momentos de flexión en los pares y para ello se colocan *bielas*, normales a estos. De esta manera el par queda dividido en porciones convenientes, que por lo general son iguales.

De esta clase es la armadura Polonceau, fig. 127.

Calculemos los esfuerzos de cada una de las barras.

Las cargas como las armadura son simétricas y por lo tanto sólo será necesario el cálculo para la mitad de dicha armadura.

Después de hacer las notaciones de las regiones exteriores e interiores se traza el dinámico de las fuerzas A B C D E. Las reacciones de los apoyos son iguales a la mitad de la carga total.

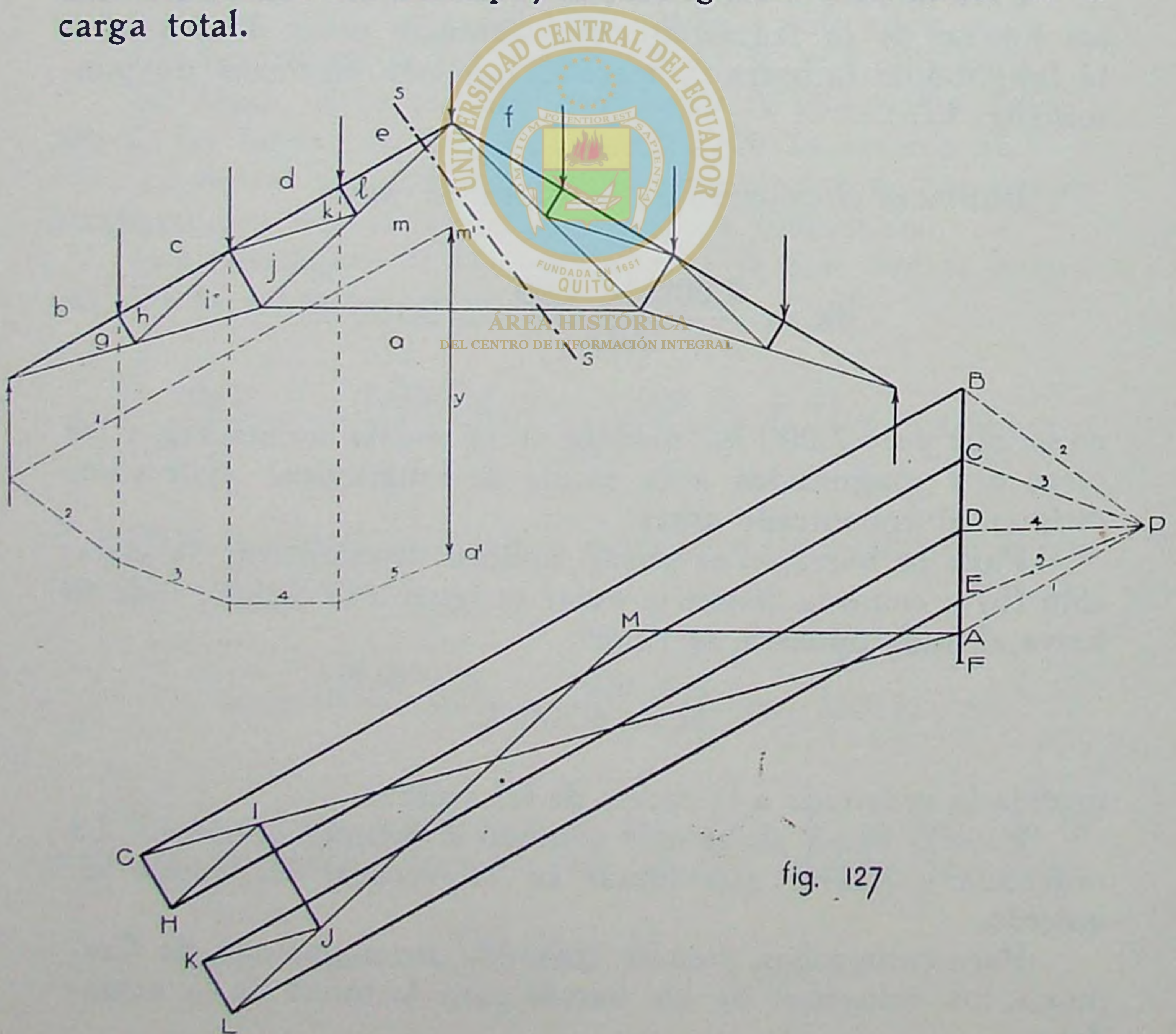


fig. 127



Se principia el trazado del polígono de Cremona, de la manera usual hasta los tres primeros nudos. Prosiguiendo el trazado, se encuentra que el nudo  $cdkji$  y el  $ijma$  tienen tres barras de esfuerzos desconocidos, y el método de Cremona es insuficiente para resolver esta dificultad; entonces con la ayuda del de Ritter podremos continuar.

A este efecto, con las fuerzs exteriores  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$ ,  $ae$  y la mitad de  $ef$ , puesto que no consideramos sino la mitad de la armadura, y el polo P, se dibuja el funicular correspondiente (líneas de puntos).

Para aplicar la ecuación (5), adoptaremos como distancia polar, la que hay de la cumbrera a la barra horizontal  $ma$ ; puesto que nuestro intento es conocer el esfuerzo de la barra  $ma$ , haciendo caso omiso del trazado de Cremona. El seccionamiento de la armadura se ha hecho según la línea  $ss$ , que corta a las tres barras  $el$ ,  $lm$  y  $ma$ . Se toma como eje de los momentos el nudo a donde concurren dos barras seccionadas, en nuestra figura, es el nudo de la cumbrera el escogido.

El orden en que se trazan los lados del funicular, está indicado con los números anotados en los respectivos radios polares.

Según la regla ya enunciada, en el artículo (117), se baja una vertical por el nudo de la cumbrera y el segmento  $m'a'$ , comprendido entre los lados extremos del funicular es el esfuerzo de la barra  $ma$ , medido a la escala de las fuerzas. Esta longitud  $m'a'$  se traslada sobre una paralela a la barra que parte de A; de manera que  $m'a' = AM$ . Así queda determinado el punto M del polígono de Cremona.

Conocido este dato ya se puede proseguir el trazado de Cremona; en efecto, en el nudo  $aijm$ , se conocen los esfuerzos de tres barras y sólo de las barras  $ij$  y  $jm$  son desconocidas.

Por I se traza una paralela a  $ij$  y por M una paralela a  $mj$ .

Para conocer la clase de esfuerzos que soportan las barras de este nudo, se hace la lectura siguiendo el sentido de las agujas de un reloj y a la vez se hace la lectura en el mismo orden en el polígono de Cremona; sentido que al trasladar a las barras nos manifiesta compresión o tracción. Así en el nudo que estamos estudiando:  $ij$  compresión;  $jm$  tracción;  $ma$  tracción.



Después se pasa sin dificultad a los demás nudos. El polígono de Cremona será de la forma indicada en la fig. 127, en la que están representados los esfuerzos de la mitad de la armadura; puesto que siendo simétricas las cargas y la armadura, los esfuerzos serán iguales a los de la otra mitad.

NOTA. Si el par de la armadura Polonceau, fig. 127, es simétrica con relación a la biela media, que es el caso general, las cargas serán también iguales y equidistantes unas de otras (en la figura el par está dividido en cuatro partes iguales); en este caso el trazado del polígono de Cremona se hace sin dificultad, con prescindencia del de Ritter, observando que los esfuerzos de las barras  $jk$  y  $hi$  son iguales; y también los esfuerzos de las bielas  $gh$  y  $kl$ .

Los esfuerzos de las barras  $hi$  y  $jk$  están representados por las magnitudes  $HI$  y  $JK$ . Y como,  $GH = KL$ , se necesita a causa del paralelismo de las tres bielas, que  $GH$  y  $KL$  se encuentren en una misma paralela a  $IJ$ .

Por esta razón el trazado del polígono de Cremona, relativo al nudo  $cdkjih$ , se hace sin mayor dificultad.

Se prolonga  $GH$  hasta que intercepte en  $K$  a la paralela al par que parte de  $D$ . Por el punto  $I$  se traza una paralela a  $GH$  hasta que encuentre a la línea, que siendo paralela a la barra  $JK$ , parte de  $K$ . Este punto de intersección es  $J$ .

De esta manera queda trazado el polígono cerrado  $CDKJIH$ , correspondiente al nudo que nos ocupa. Conociendo ya los esfuerzos de todas las barras de este nudo, se continúa el trazado de Cremona de la manera ordinaria.

ÁREA HISTÓRICA  
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

120.—*Armadura con apoyo móvil bajo la acción del viento.*

Debido a los cambios de temperatura aparece la dilatación y contracción en las armaduras de hierro, y si sus apoyos son fijos habrá un aumento en los esfuerzos de cada barra. Para evitar esto, un extremo se le asegura sólidamente con el apoyo, el otro queda libre, de manera que éste pueda moverse horizontalmente en el sentido de la armadura, sobre un dispositivo especial.

Al determinar los esfuerzos debidos al viento cuando un extremo es fijo y el otro móvil, es necesario dibujar dos diagramas de Cremona, uno para cuando el viento sopla en el lado fijo y el otro cuando sopla en el lado móvil o libre.

Por ejemplo, tomemos la armadura de la fig. 128, la luz es de 23 m., la flecha es 5,75 m., la flecha del nudo medio inferior es 1,20 m., y la distancia entre armaduras es 4,50 m.



El cordón superior está dividido en 8 partes iguales. Las barras intermedias son alternativamente verticales y diagonales, como están en la figura.

El empuje normal del viento vale  $100 \text{ k/m}^2$ . Luego el empuje total será:

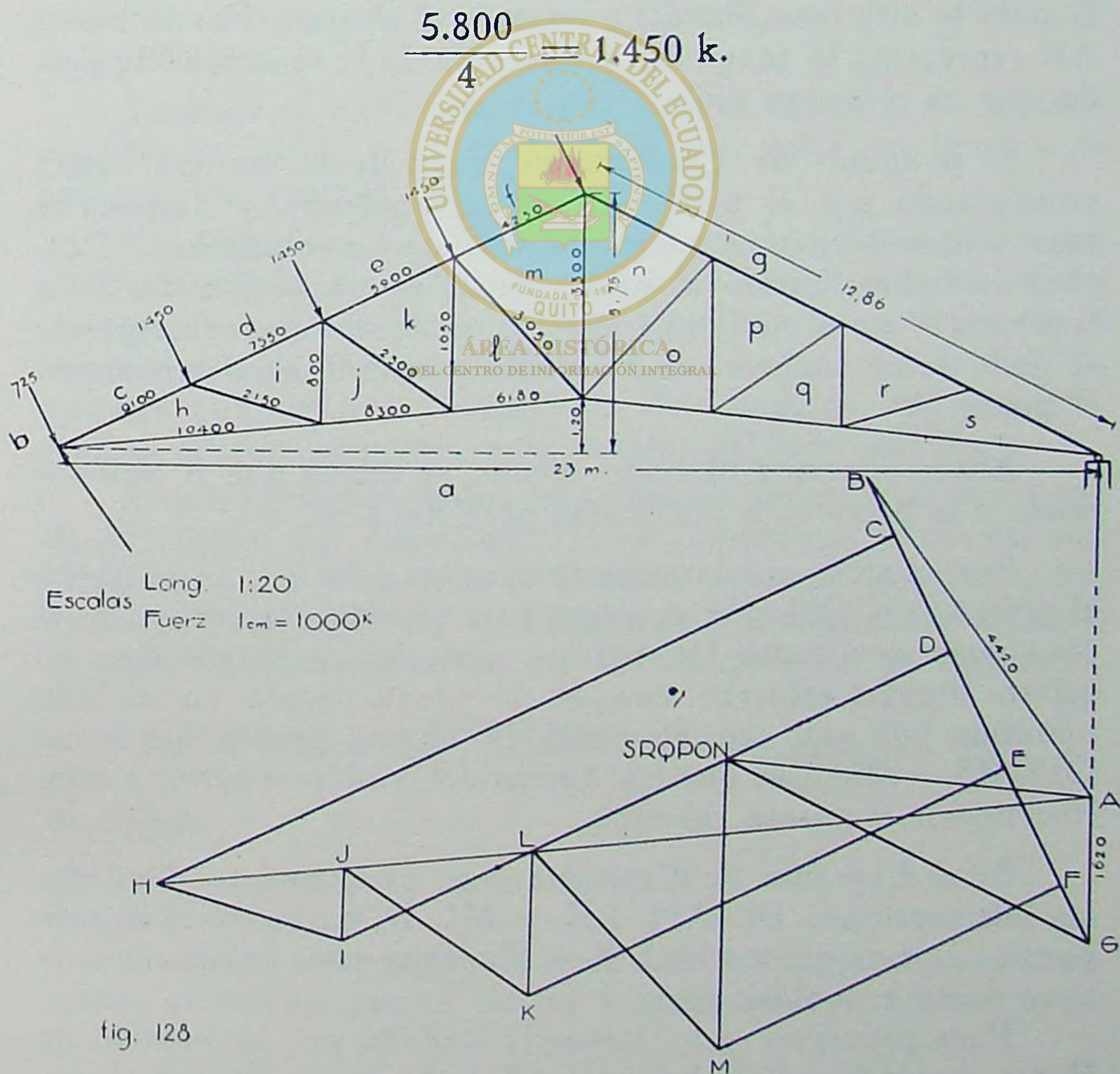
$$12,86 \times 4,50 \times 100 = 5.800 \text{ k.}$$

Entonces los nudos de la cumbrera y del apoyo soportan un empuje de

$$\frac{5.800}{8} = 725 \text{ k.}$$

y los tres nudos intermedios lleva cada uno:

$$\frac{5.800}{4} = 1.450 \text{ k.}$$





Las reacciones de los apoyos se pueden encontrar por cualquiera de los métodos conocidos; pero el siguiente es más sencillo por la simetría de las fuerzas. Se sabe por la simple inspección, que la resultante del viento pasa por el nudo *dekji*; entonces tomando momentos de todas las fuerzas con relación al apoyo izquierdo y teniendo en cuenta que el apoyo derecho es libre y por consiguiente su reacción será vertical, se tiene:

$$5.800 \times 6,48 - g_a \times 23 = 0$$

$$g_a = 1.620 \text{ k.}$$

Luego se traza el dinámico BG y por el extremo G se levanta una vertical  $GA = 1.620 \text{ k.}$ ; entonces se une A con B, pues la otra reacción debe cerrar el dinámico. Por lo tanto, AB representa la magnitud y dirección de la reacción izquierda, que es el apoyo fijo.

El polígono de Cremona se traza de la manera usual, principiando por el nudo del apoyo izquierdo, y después se pasa alternativamente a los nudos superior e inferior. Después de haber llegado al nudo *efmlk*, se pasa al nudo de la cumbrera y no al nudo inferior. El polígono que corresponde al nudo de la cumbrera es FGNMF quedando así determinado el punto N.

Ahora pasemos al nudo *almno*, se dibuja por A una paralela a la barra *oa* y por O una paralela a *no*.

Pero sucede que la primera paralela pasa por N cerrando el polígono y ON, por consiguiente, se reduce a cero. Igual cosa pasa con todas las barras verticales y diagonales, no sufren ningún esfuerzo cuando el viento sopla en el lado opuesto; por esto en el punto N hemos puesto las letras OPQRS. Mientras que las barras del cordón superior e inferior tienen el mismo esfuerzo.

Sí el diagrama de Cremona está exactamente dibujado, las intersecciones DI, AH, LK y ML se hacen en el mismo punto L. Los puntos H, I, K y M deben estar en una misma línea recta y equidistantes.

Para conseguir esto, hemos calculado por el método de Ritter el esfuerzo de la barra *al*, tomando momentos en el nu-



do en el que concurren las otras dos barras cortadas por una sección vertical, así:

$$4.420 \times 9,50 - 725 \times 9,64 - 1.450(6,43 + 3,215) - al \times 3,4 = 0$$

de donde

$$al = 6.180 \text{ k.}$$

Este valor se pone a escala sobre la paralela a la barra trazada por A y se continúa con las demás.

121.—Cuando el viento sopla sobre el lado libre de la cubierta, como en la fig. 129, las cargas sobre los nudos son las mismas que antes, y la reacción  $ga$  se encuentra por el funicular, trazado en puntos, o por cualquier otro método, y vale 3.550 k.

Después se traza una vertical por el extremo del dinámico,  $AG = 3.550$ ; y se notará que este valor es igual a la componente vertical  $AA'$  de la fig. 128.

El diagrama de Cremona se completa de una manera similar al de la fig. 128, en el que BM representa el esfuerzo en el cordón superior y AM el del cordón inferior de la mitad izquierda de la armadura. Las barras verticales y diagonales que están a la izquierda del pendolón  $mn$  no desarrollan ningún esfuerzo, a la inversa del caso anterior.

Las magnitudes de los esfuerzos se indican en cada una de las líneas del diagrama. Para comprobar estos valores, busquemos por el método de Ritter el esfuerzo de la barra  $bm$ ; tomando momentos de las fuerzas de la derecha con relación al nudo en que concurren las barras  $ml$  y  $la$ , se tiene:

$$bm \times 4,05 + 4,4 \times 5.800 - 11,50 \times 3.550 = 0$$

de donde

$$bm = 3.780 \text{ k.}$$

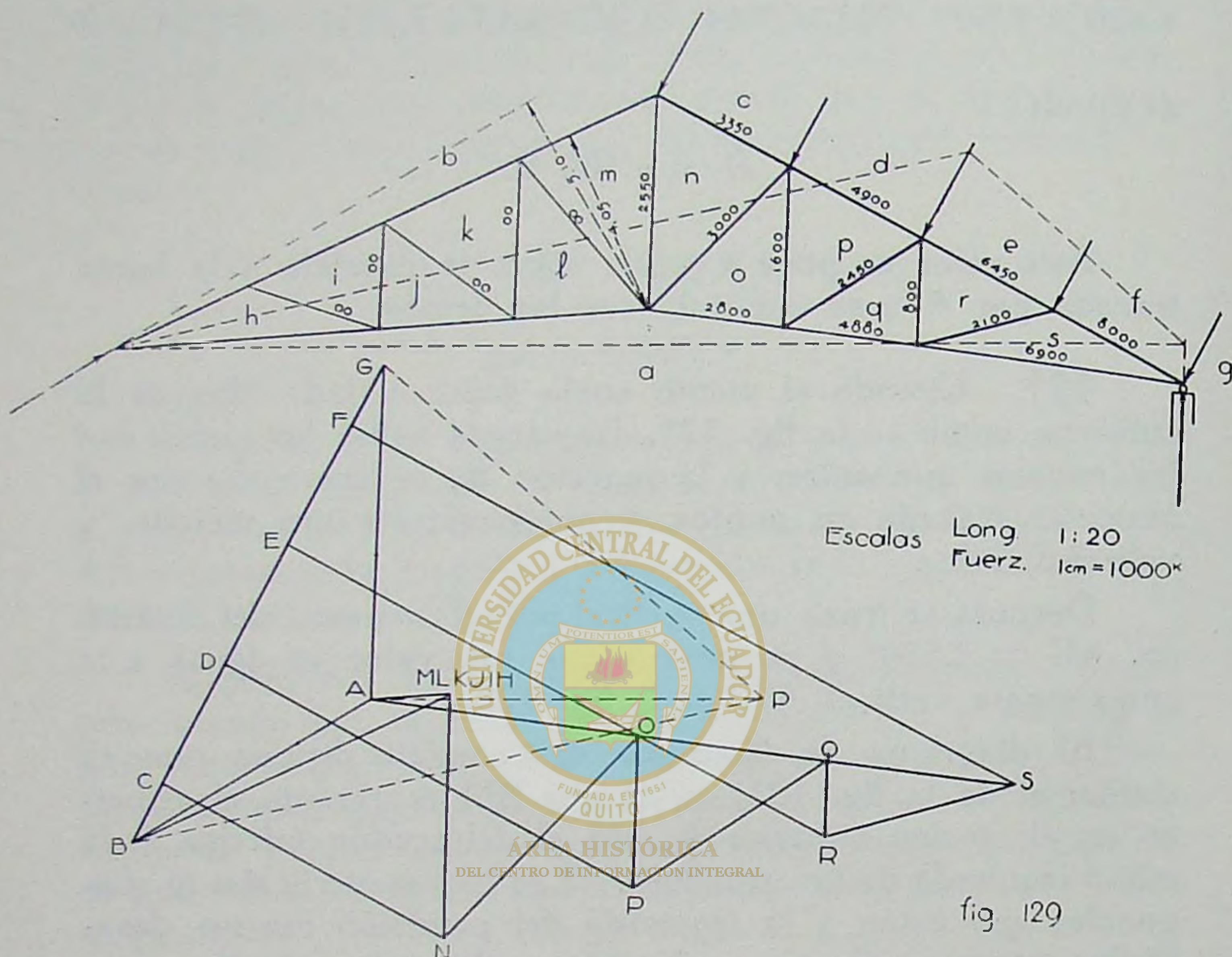
Se puede encontrar también, tomando momentos con relación al mismo punto, de las fuerzas de la izquierda:

$$3.000 \times 5,10 - bm \times 4,05 = 0$$



de donde

$$bm = 3.780 \text{ k.}$$



valor igual al encontrado en el diagrama.

Por la inspección de los diagramas de Cremona, se observa que los esfuerzos de las barras, cuando el viento sopla del lado del apoyo libre, son menores que cuando sopla del lado del apoyo fijo.

Por esta razón, es suficiente analizar sólo para el caso en el que los esfuerzos resultan mayores.

### 122.—Determinación de los esfuerzos máximos y mínimos.

A fin de dar dimensiones convenientes a cada una de las piezas de una armadura, es necesario conocer la variación de los esfuerzos a que estarán sujetos, cada uno de los miembros, bajo las variadas combinaciones de cargas que puede ocurrir. Las cargas que habrán de tomarse en cuenta, varían con las circunstancias locales de cada edificio, (Nº 114).



Para nuestras latitudes no hay necesidad de considerar la carga de la nieve, como sucede en las regiones templadas, que es requisito indispensable en todos los cálculos de cubiertas; sólo tendremos en cuenta la carga permanente y el empuje del viento.

De acuerdo con lo que acabamos de establecer, hay dos métodos:

1º. Construcción de un diagrama separado para cada especie de carga, tal como hemos hecho en los artículos anteriores; y luego añadir los esfuerzos así encontrados.

2º. Construcción de un solo diagrama en el que se ha empleado la combinación de las dos cargas.

El estudiante debe familiarizarse con los dos métodos; el segundo aparece que es generalmente preferido por las razones siguientes:

a) Bajo ciertas circunstancias, el primer método no da resultados exactos; como por ejemplo, en el caso del artículo 115, se supone que las reacciones son paralelas a la resultante, cuando sopla el viento; mientras que son verticales, cuando se considera sólo la carga permanente. La resultante de estas dos reacciones, no será, en la generalidad de los casos, paralela a la resultante de las fuerzas.

b) En el diagrama, construido según el método segundo, se puede medir directamente los esfuerzos máximos y mínimos.

c) Cuando la armadura tiene «cruz de San Andrés», la investigación de los esfuerzos es más simple por el método segundo.

En todo caso se tomará como esfuerzo mínimo el que sufre debido a la carga fija o permanente, y máximo será la suma de los dos esfuerzos, carga fija y empuje del viento.

Para conocimiento del segundo método, desarrollamos a continuación un ejemplo numérico.

### 123.—Cálculo completo de una armadura de madera:

*Sea una armadura americana del tipo Howe de la fig. 130, espaciada de 5 m.*

*Los pares están divididos en 6 partes iguales. La luz es de 16 m. La flecha es de 3,60 m. La cubierta es de hierro tol galvanizado, colocado sobre un entarimado de madera de 2*



cm. de espesor. El entarimado está soportado por cabrios cuya escuadría es de 9 cm. por 15 cm., espaciados de 0,60 m. entre ejes. Los cabrios descansan sobre las correas de 18 por 25 cm. de escuadría, y éstas se asientan sobre los nudos del cordón superior. Esta armadura la representamos en perspectiva en la fig. 118.

Cada cabrio soporta una área de cubierta de  $0,60 \times 2,92$ , (ya que la longitud de un par es de 8,77, y  $\frac{8,77}{3} = 2,92$ ) y

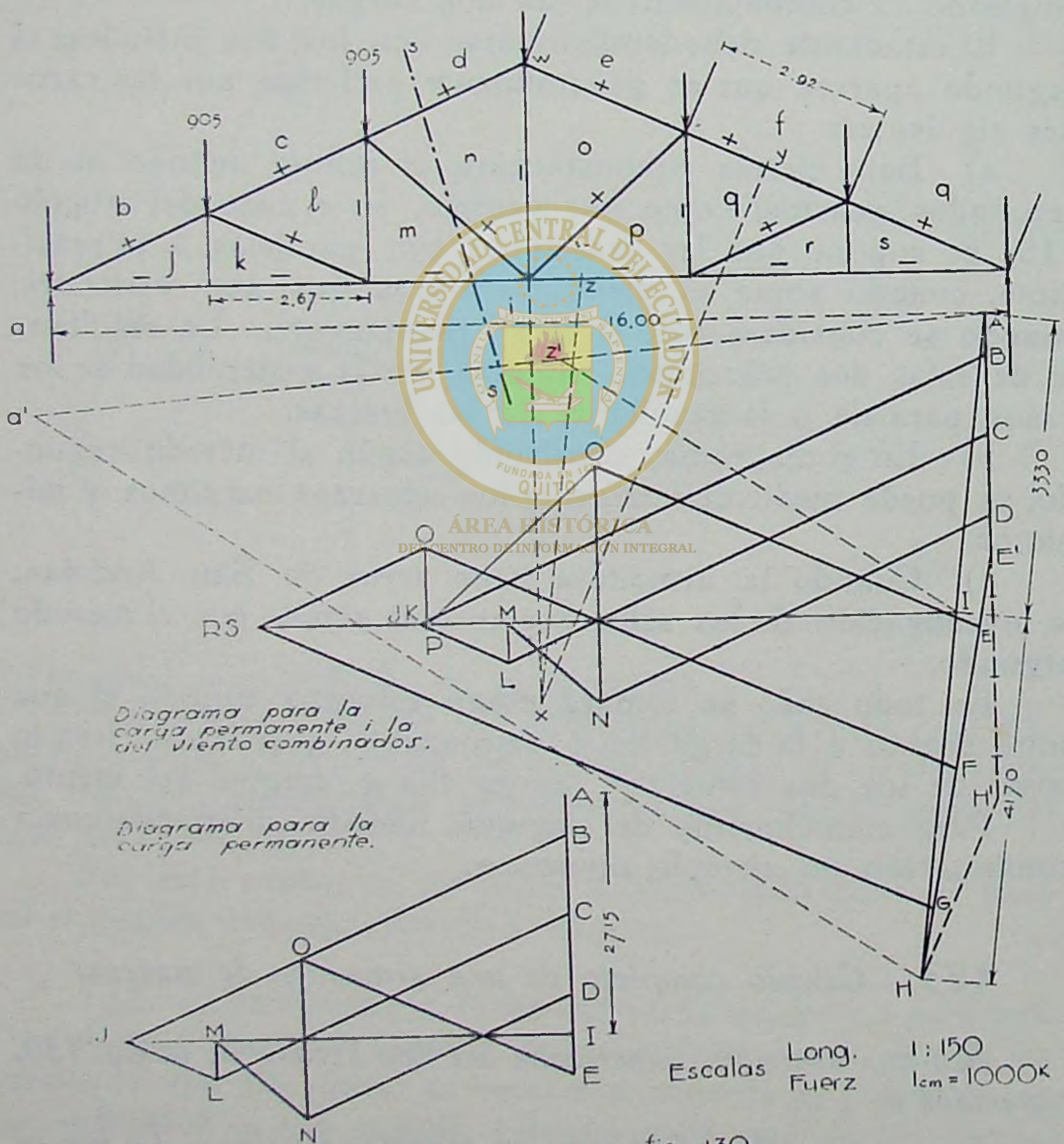


fig. 130



está calculada como una viga que lleva la máxima carga, incluido el peso propio que interviene en esta área.

Cada correa intermedia soporta una área de 2,92 m. de ancho por 5 m., y está también proporcionada para trabajar como una viga para la carga máxima que puede actuar sobre esa área. El alumno debe verificar las dimensiones de las correas y cabrios, empleando un trabajo límite de 60 kilos por cm.<sup>2</sup>.

#### CÁLCULO DE LOS PESOS

Peso del zinc y entarimado por m <sup>2</sup> . de área de cub.	= 17	k.
» de los cabrios (500 k/m <sup>3</sup> ) » » »	= 7,3	k.
» de las correas (500 k/m <sup>3</sup> ) » » »	= 9,8	k.
Total	= 34.10	k/m <sup>2</sup>

El peso de la armadura calcularemos por medio de la fórmula empírica de Merriman (en medidas inglesas):

$$P = \frac{al}{2} \left(1 + \frac{l}{10}\right) = \frac{16,4 \times 52,5}{2} \left(1 + \frac{52,5}{10}\right) =$$

$$= 5.380 \text{ libras} = 2.445 \text{ kilos.}$$

Para aplicar la fórmula hemos convertido los datos a medidas inglesas.

La presión del viento, sobre una superficie normal a su dirección, supondremos que es de 150 k/m<sup>2</sup>. (1)

La componente normal a la cubierta del empuje del viento, según la fórmula de la pág. 62, es:

$$N = p \cdot L \cdot \sin^2 \theta = 150 \times 1,00 \times \sin^2 24^\circ 14' = 25 \text{ k/m}^2.$$

Como esta fórmula da valores muy pequeños, adoptemos la fórmula del Reglamento Francés:

$$N = 120 \times \sin \theta = 120 \times \sin 24^\circ 14' = 49,20 \text{ k.}$$

en números redondos, sea 50 k. El valor de 120 k. ha fijado el Reglamento del 5 de noviembre de 1928, e indica que sólo

(1) Una velocidad del viento de 35 m. por segundo da una presión de 150 k/m<sup>2</sup>. de superficie normal a su dirección.



debe multiplicarse por el seno del ángulo que hace la cubierta con la horizontal.

#### CARGAS DE LOS NUDOS INTERMEDIOS DEL CORDÓN SUPERIOR

Peso de la cubierta.....  $34,1 \times 5 \times 2,92 = 498 \text{ k.}$

» » » armadura .....  $\frac{2445}{6} = 407 \text{ k.}$

Peso total de cada nudo intermedio 905 k.

Empuje del viento para un nudo  $50 \times 5 \times 2,92 = 730 \text{ k.}$

Cada nudo de los extremos soporta la mitad de la carga que lleva un nudo intermedio,

$$\frac{905}{2} = 450 \text{ k.}$$

En este ejemplo vamos a considerar: primero la carga permanente; y segundo la carga permanente y el empuje del viento combinado.

#### DIAGRAMA PARA LA CARGA PERMANENTE

La reacción de cada apoyo es de

$$\frac{905 \times 6}{2} = 2.715 \text{ k.}$$

Ponemos a escala, en el dinámico, el peso total y dividimos en porciones correspondientes a cada nudo.

Como en este caso la carga es simétrica como también la armadura, los esfuerzos en las barras homólogas serán iguales; por esta razón el diagrama de Crenona se dibujará sólo para la mitad.

A fin de evitar la larga sucesión de los nudos y para comprobar el dibujo, determinaremos por el método de Ritter los esfuerzos de las barras  $dn$ ,  $nm$  y  $mi$ .

Calculemos el esfuerzo de una de estas barras, como por ejemplo la  $mi$ , tomando momentos en el nudo que concurren las otras dos, entonces se tiene:

$$2.715 \times 5,33 - 450 \times 5,33 - 905 \times 2,67 = 2,4 \times MI$$

de donde



$$MI = 4.020 \text{ k.}$$

El momento de las fuerzas conocidas es de la dirección de las agujas de un reloj; el momento de  $MI$  que debe equilibrar al anterior, será de sentido contrario, sentido que tiende a alejarse de la porción de la armadura que está en consideración, entonces  $MI$  será tracción. Se trasporta esta magnitud encontrada al polígono de Cremona, trazando de  $I$  la longitud  $IM$  en dirección tal que represente tracción. Los esfuerzos de las otras barras  $dn$  y  $mn$  se determinan después al completar el polígono CDNML. Los esfuerzos de las otras barras a la izquierda de la sección se han calculado por medio del polígono de Cremona. Si, ahora, la línea  $MN$  es paralela a la barra  $nm$ , el dibujo queda comprobado como exacto.

Procediendo así, se notará que hemos evitado una larga sucesión de polígonos que dependen unos de los otros, lo que impide errores debidos al dibujo.

#### DIAGRAMA PARA LA CARGA PERMANENTE Y EL EMPUJE DEL VIENTO COMBINADO

Suponemos que el viento <sup>ST</sup>sopla sobre el lado derecho del techo.

Llamamos la atención a los puntos siguientes:

1º. Hemos trasladado a escala, de  $1 \text{ cm.} = 1.000 \text{ k.}$ , la resultante de las cargas permanentes y luego la resultante del empuje del viento.

Estas se indican en la fig. 130 por líneas de puntos,  $AE'H'H$ .

2º. La resultante total en la vertiente derecha del techo está representada por la suma geométrica de las fuerzas que actúan, (pesos y viento); de manera que se une  $E'$  con  $H$ . Esta resultante cuya magnitud es  $E'H$ , se divide en 6 partes iguales; correspondiendo al nudo de la cumbrera y al del apoyo  $\frac{1}{6}$  de esa cantidad y para los dos nudos intermedios  $\frac{2}{6}$ .

3º. Para determinar las reacciones de los apoyos, se nota: que la carga permanente por ser simétrica, la resultante pasa por la mitad de la armadura,  $xw$ ; la del viento, por la misma razón pasa por la mitad de la vertiente derecha y nor-



malmente a ésta. Estas dos resultantes tienen un punto de concurso, en  $x$ .

Si trazamos por este punto una paralela a la suma geométrica total  $AH$ , encuentra al cordón inferior en el punto  $z$ .

Las reacciones  $H_I$  y  $I_A$ , que se suponen paralelas, puesto que los apoyos son fijos, se han encontrado dividiendo la resultante  $AH$  en partes inversamente proporcionales a los segmentos del cordón inferior.

4°. Los esfuerzos se determinan de una manera similar, a lo explicado antes. Para calcular por el método de Ritter, los esfuerzos en la sección  $ss$  de la armadura, es conveniente determinar las componentes horizontales  $H$ , y las componentes verticales  $V$ , de las fuerzas exteriores.

Comp. horiz. del viento

$$H = \frac{3,60}{8,77} \times 2.190 = 898 \text{ k.}$$

Comp. vertical del emp. del viento

$$V = \frac{8}{8,77} \times 2.190 = 1.970 \text{ k.}$$

Tomando momentos con relación al apoyo derecho se tiene:

$$V_1 \times 16 = 5.430 \times 8 + 1.970 \times 4 + 898 \times 1,8 = 52.936$$

de donde

$$V_1 = \frac{52.936}{16} = 3.308 \text{ k.}$$

De la misma manera:

$$H_1 = \frac{898 \times 3.308}{5.430 + 1.970} = 400$$

Tomando momentos con relación al nudo  $cdnl$ , se tiene:

$$M_I \times 2,40 = 3.308 \times 5,34 - 400 \times 2,40 - 450 \times 5,34 - 905 \times 2,67$$



de donde

$$M_I = \frac{11.882}{2,40} = 4.950 \text{ k.}$$

Estas operaciones se han efectuado con la regla de cálculo.

Esta magnitud se lleva a partir del punto I y se determina M, y por M y D se trazan paralelas a las barras seccionadas *dn* y *nm*, de suerte que con las fuerzas formen un polígono cerrado.

Después se continúa con los demás nudos; si es necesario se hará otra sección para verificar si los esfuerzos obtenidos son exactos.

Midiendo a escala los esfuerzos de cada una de las barras en los diagramas, se encuentran los valores siguientes:

TABLA DE LOS ESFUERZOS

Barras	BJ	CL	DN	IJ	IK	IM	JK	KL	LM	MN
C. perm.	5430	4350	3240	4950	4950	4020	000	1050	420	1350
C. P. y E. del V.	7000	5850	4730	5950	5950	4950	000	1560	450	1350
Máximos	7000	5850	4730	5950	5950	4950	000	1560	450	1350

	GS	FQ	EO	IS	IR	IP	RS	QR	PQ	OP
C. perm.	5430	4350	3240	4950	4950	4020	000	1050	420	1350
C. P. y E. del V.	8150	6350	4600	7800	7800	5850	000	2120	830	2580
Máximos	8150	6350	4600	7800	7800	5850	000	2120	830	2580

Pendolón NO = — 1.750 y — 2.600 k.



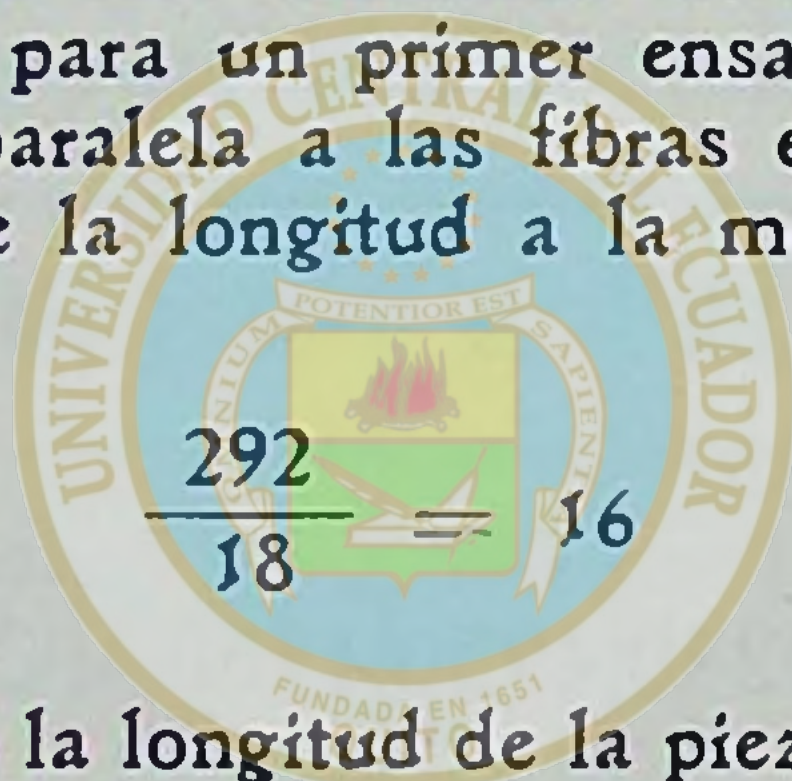
Las columnas con — representan esfuerzos de tracción; las demás son compresión.

La tabla inferior representa los esfuerzos de las homólogas de la tabla superior.

Por la observación de los valores de las dos tablas, se encuentra que la tabla inferior tiene valores más fuertes; lo que quiere decir que las barras colocadas en la media armadura que es atacada por el viento, sufren esfuerzos mayores.

Es más racional emplear en los miembros de la armadura, el hierro y la madera. Serán de hierro todas las barras verticales o péndolas que sufren esfuerzos de tracción, y de madera las demás.

*Cálculo del par.* Según la tabla de los esfuerzos, deducidos del diagrama, el máximo es 8.150 k. a la compresión. La longitud del par entre dos nudos consecutivos es de 2,92 m. Según las escuadrías dadas en el N°. 114, para una armadura de 16 m. es de  $20 \times 18$  cms. Adoptemos estos valores para un primer ensayo. La resistencia admitida en compresión y paralela a las fibras es  $60 \text{ k/cm}^2$ . para nuestro eucalipto. La relación de la longitud a la menor dimensión transversal es:



$$\frac{292}{18} = 16$$

Se sabe que cuando la longitud de la pieza sometida a compresión, es mayor que 5 veces la más pequeña dimensión transversal, se debe calcular como columna.

La fórmula para el cálculo de columnas, universalmente empleada es la de Rankine, que la hemos dado en el N°. 111, ec 3.

$$P \geq \frac{F}{A} \left( 1 + m. n. \frac{l^2}{r^2} \right)$$

cuyos símbolos son ya conocidos y  $m = 1$  porque consideramos a las barras articuladas en los nudos.

Las características de la barra que estamos calculando son, tomando como unidades el cm. y el kilogramo:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 18^3}{12} = 9.720 \text{ cm}^4.$$

$$A = 20 \times 18 = 360 \text{ cm}^2.$$

$$r^2 = \frac{9.720}{360} = 27$$



$$\frac{l^2}{r^2} = \frac{292^2}{27} = 3.160$$

Se deberá tener sustituyendo los símbolos por los valores numéricos:

$$60 \geq \frac{8.150}{360} (1 + 0,0002 \times 3.160) =$$

$$23 \times 1,63 = 37 \text{ k/cm}^2.$$

Como satisface la desigualdad la sección del par es suficiente.

Si queremos calcular la carga total que puede soportar el par se tiene:

$$R = \frac{60 \times 360}{1,63} = 13.200 \text{ K.}$$

Adoptaremos este valor de  $20 \times 18$  teniendo en cuenta los ensamblajes y orificios para los pernos. Aunque teóricamente, se puede aceptar escuadrias más pequeñas para las porciones del par que están próximas a la cumbrera, sin embargo se acostumbra dar una misma sección transversal en todo el largo del par, por economía y facilidad en la mano de obra para los empalmes.

*Cálculo de los tirantes.* En la tabla encontramos que el tirante *is* y el *ir* tienen un trabajo máximo de 7.800 k.

En la práctica se adopta el mismo coeficiente de trabajo a la compresión, cuando es el esfuerzo en el sentido de las fibras; entonces para una resistencia admisible de 60 k. por centímetro cuadro, la sección necesaria será:

$$\frac{7.800}{60} = 130 \text{ cm}^2.$$

O sea una sección de  $12 \times 12$  cm. Pero, a causa de los ensamblajes de las diferentes piezas que concurren en el tirante será prudente adoptar una sección de  $20 \times 20$  cm.

*Cálculo del jalcón kl y qr.* Esta barra tiene un esfuerzo de compresión máximo de 2.120 k. Su longitud es de 2,90 m.

Según las dimensiones dadas en el N°. 114, adoptaremos para un primer ensayo, la sección transversal de  $15 \times 15$  cm. La relación de la longitud a la menor dimensión transversal es:

$$\frac{290}{15} = 19$$

Puesto que la longitud de la columna es pequeña, nos determinará la sección transversal, el esfuerzo inclinado que trasmite el par a



esta barra. Para este propósito determinaremos la sección transversal, tomando el esfuerzo admisible de la fórmula de Hankinson, para estos casos:

$$N = \frac{P \cdot Q}{P \sin^2 \theta + Q \cos^2 \theta}$$

en la que N es el trabajo admisible sobre superficies inclinadas a las fibras; P es el trabajo a la compresión por unidad en la dirección de las fibras; Q es el trabajo a la compresión por unidad normal a las fibras; y  $\theta$  es el ángulo entre la dirección de la fuerza y el eje de la barra.

Para el valor de P tomaremos el de antes  $= 60 \text{ k/cm}^2$ . y para  $Q = 16 \text{ k/cm}^2$ . El ángulo para nuestro caso concreto es de  $60^\circ$ .

Reemplazando en la Fórmula los valores numéricos tenemos:

$$N = \frac{60 \times 16}{60 \sin^2 60^\circ + 16 \cos^2 60^\circ} = 19 \text{ k/cm}^2.$$

Luego el área necesaria es:

$$\frac{2.120}{19} = 112 \text{ cm}^2.$$

La dimensión  $15 \times 15$  es más que suficiente.

Si hubiéramos calculado a esta barra como columna, la carga de seguridad que puede llevar, en estas condiciones es de  $31 \text{ k/cm}^2$ . o sea 7.200 k. como carga total; mientras que con la fórmula de Hankinson la carga de seguridad es mucho menor y por consiguiente obliga a emplear una sección mayor y evitar con esto esfuerzos de pandeo.

*Cálculo del jalcón mn y op.* Esta barra tiene un esfuerzo de compresión máximo de 2.580 k. La longitud de esta pieza es 3,60 m. y adoptemos la sección dada por la tabla N°. 114, que da  $15 \times 15$ . La relación:

$$\frac{360}{15} = 24$$

es considerable y se debe hacer primero una investigación como columna.

Las características de la barra son:

$$I = \frac{h^4}{12} = \frac{15^4}{12} = 4.219 \text{ cm}^4.$$

$$A = 15 \times 15 = 225 \text{ cm}^2.$$



$$r^2 = \frac{4.219}{225} = 19$$

$$\frac{l^2}{r^2} = \frac{360^2}{19} = \frac{129.600}{19} = 6.821$$

Se deberá tener, sustituyendo los símbolos por los valores numéricos, en la fórmula de Rankine:

$$60 \geq \frac{2.580}{225} (1 + 0,0002 \times 6.821) = 27$$

Luego la sección escogida es suficiente.

*Cálculo de la barra vertical o péndola jk.* Si está suspendido del cordón inferior el techo raso, esta barra soportará algo de esta carga. Y cuando no lo está, la barra no trabaja por ningún concepto y así nos indica los valores de la tabla. Su función se reduce a evitar la deflección del tirante ij. Los constructores emplean para esta barra una barilla de 1.6 cm. de diámetro.

La barra lm y pq se calcula fácilmente; el esfuerzo máximo es de 830 k. Para seleccionar el diámetro es conveniente referirnos a los tamaños que se encuentra en el mercado.

La sección teórica es:

$$\frac{830}{10} = 83 \text{ mm}^2$$

es decir de un diámetro de 1,3 cm. Pero como en los extremos de la varilla debe hacerse rosca de tornillo para asegurar con pernos; la sección en el fondo del tornillo debe tener 13 mm. y como esta dimensión es generalmente los  $\frac{8}{10}$  del diámetro del cuerpo de la barilla, entonces este último diámetro será

$$\frac{13}{0,8} = 16,3 ;$$

es decir la próxima mayor que se encuentra en el mercado es de 19 mm. que es la que se adopta.

De una manera similar para el pendolón que tiene un esfuerzo máximo de 2.600 K. se encuentra que una barilla de 25 mm. es suficiente.

Para tener resultados más exactos, hay que añadir los esfuerzos debidos a los momentos de flexión a causa del peso propio de la barra o de fuerzas extrañas.



## MÉTODO DE CULMANN

124.—El método gráfico, llamado de Culmann, consiste en resolver un problema de descomposición de fuerzas, que se enuncia así:

Descomponer una fuerza o un par en un sistema equilibrante de tres, cuyas líneas de acción son dadas.

Se presentan tres casos:

1º. Descomponer una fuerza dada en otras tres, de las que se dan sus líneas de acción y forman un triángulo.

En la fig. 131, sea  $F$  la fuerza dada, que se conoce en magnitud, dirección y sentido. Por otra parte sean las líneas  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  las tres líneas de acción y que formen con la primera fuerza un sistema en equilibrio. Vamos a conocer las magnitudes de estas últimas:

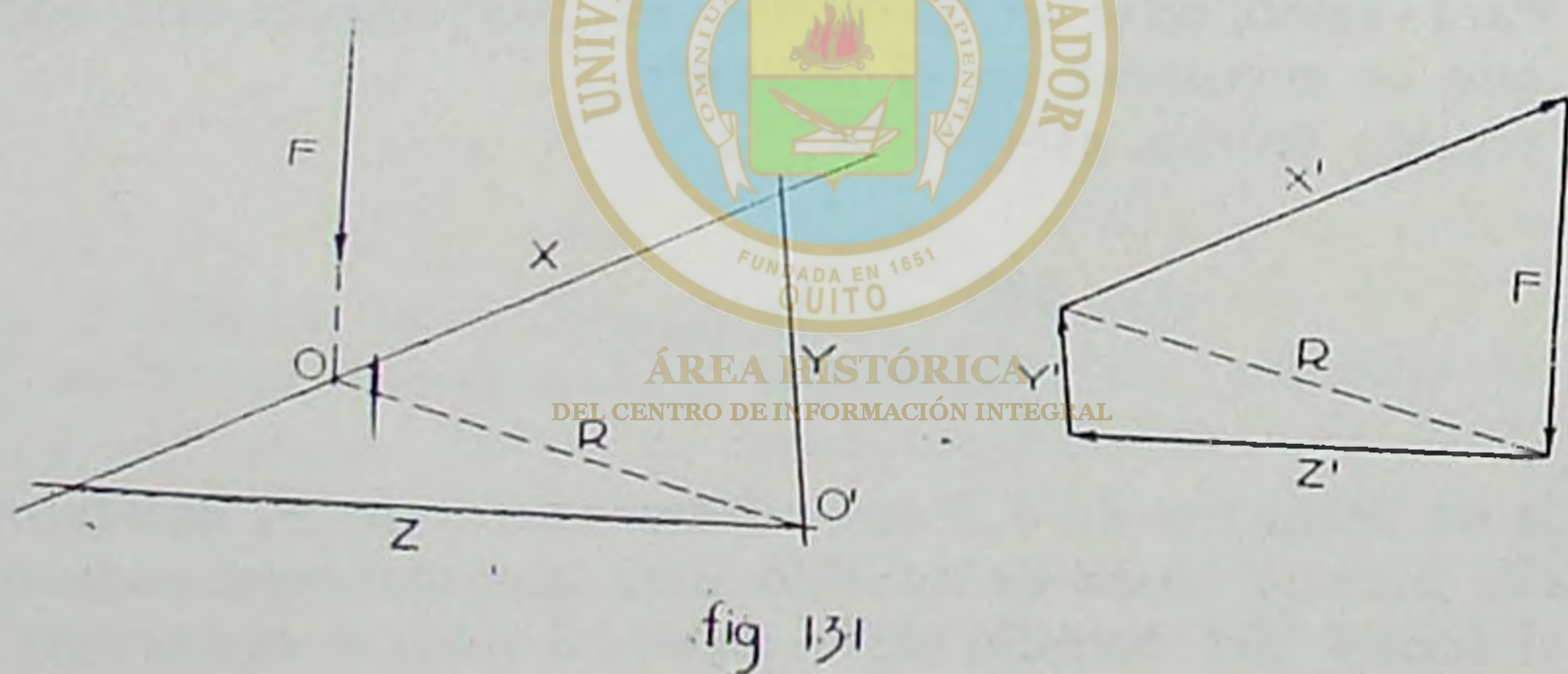


fig 131

Las fuerzas  $Z$  y  $Y$ , tienen una resultante  $R$ , cuya línea de acción pasa por el punto de intersección  $O'$ , y debe satisfacer la ecuación:

$$F + X + R = 0.$$

Las fuerzas  $F$  y  $X$  tienen un resultante  $R'$  cuya línea de acción pasa por su punto de intersección  $O$ .

Pero como  $R$  y  $R'$  deben hacerse equilibrio, puesto que el sistema total debe estarlo; estas dos resultantes deben ser iguales, de sentido contrario, y tener la misma línea de acción.

Como deben pasar las resultantes por  $O$  y  $O'$ , la línea de acción está determinada por estos dos puntos.



De las extremidades de un vector que represente la magnitud de  $F$  se trazan paralelas a las líneas de acción  $X$  y a la recta  $00'$ . El punta de intersección de estas paralelas define las magnitudes de  $X$  y de  $R$ .

Después debemos descomponer  $R$  en dos fuerzas, según las líneas de acción de  $Y$  y  $Z$ . De las extremidades de la fuerza  $R$  se trazan paralelas a estas dos últimas líneas. La intersección define las magnitudes de las fuerzas  $Y$  y  $Z$ .

2º. Descomponer una fuerza  $F$  en un sistema equilibrante de tres fuerzas, cuyas líneas de acción son, dos de ellas paralelas y la tercera cualquiera.

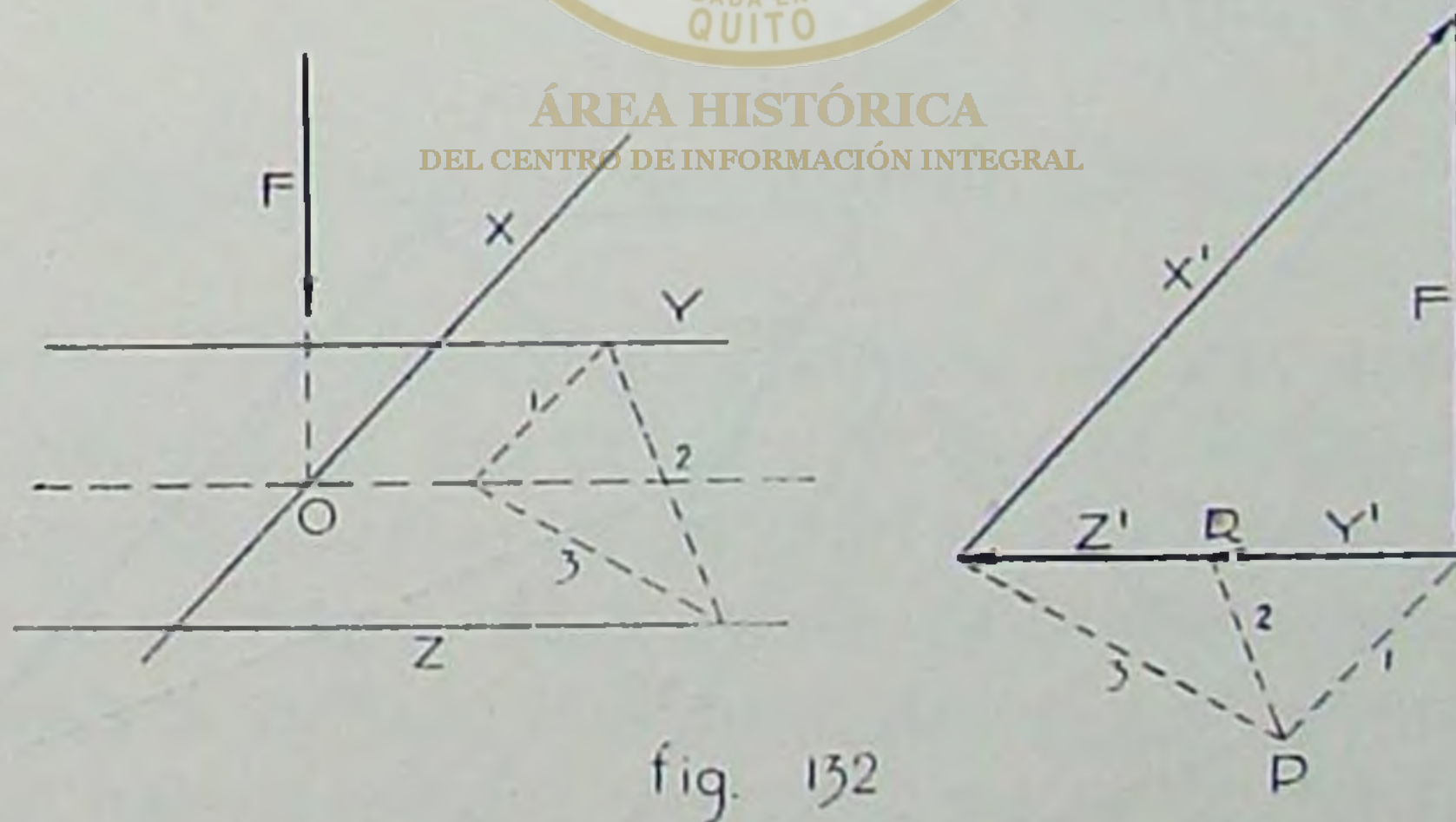
Sea la fuerza  $F$  la dada, fig. 132 y las tres líneas de acción  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , estas dos últimas son paralelas.

Las fuerzas  $Y$  y  $Z$  que son paralelas, tienen una resultante  $R$  que es igualmente paralela.

El sistema en equilibrio queda así:

$$F + X + R = 0.$$

Las fuerzas  $F$  y  $X$ , tienen una resultante  $R'$  cuya línea de acción pasa por su punto de intersección  $O$ .



Las dos resultantes parciales  $R$  y  $R'$  estando en equilibrio, deben ser iguales, de sentido contrario y de la misma línea de acción. Como esta última debe pasar por  $O$  y ser paralela a  $Y$  y  $Z$ , está determinada por estas dos condiciones.

De los extremidades del vector representativo de la magnitud de la fuerza  $F$ , se trazan paralelas a la línea de acción  $X$  y a la resultante parcial  $R$ ; el punto de intersección de estas líneas determina sus magnitudes.



Nos queda descomponer  $R$  en dos fuerzas según  $Y$  y  $Z$ . Para esto se traza el funicular 1-2-3 de polo desconocido. Por los extremos de la fuerza  $R$  se trazan paralelas a los lados del funicular 1 y 3 lo que determina el polo  $P$ . Por  $P$  se dibuja una paralela al lado de cierre 2 y la intersección de esta línea con  $R$  nos da las magnitudes de las dos fuerzas  $Y$  y  $Z$ .

3º. Descomponer un par de fuerzas  $ab$  y  $bc$  en un sistema equilibrante de tres fuerzas  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  cuyas líneas de acción son tres rectas cualesquiera.

En la fig. 133, las tres líneas dadas forman un triángulo, de manera que la  $Y$  y la  $Z$  tienen un punto de intersección  $O$ , por donde debe pasar la resultante de estas dos fuerzas; si llamamos  $R$  a esta resultante se debe tener:

$$(ab) + (bc) + X + R = 0$$

de donde

$$(ab) + (bc) = X + R$$

pero un par de fuerzas no puede equilibrarse sino con otro par; de donde se deduce que  $Y$  y  $R$  son fuerzas que deben formar también un par. Luego, la resultante parcial  $R$  pasará por  $O$  y será paralela a  $X$ .

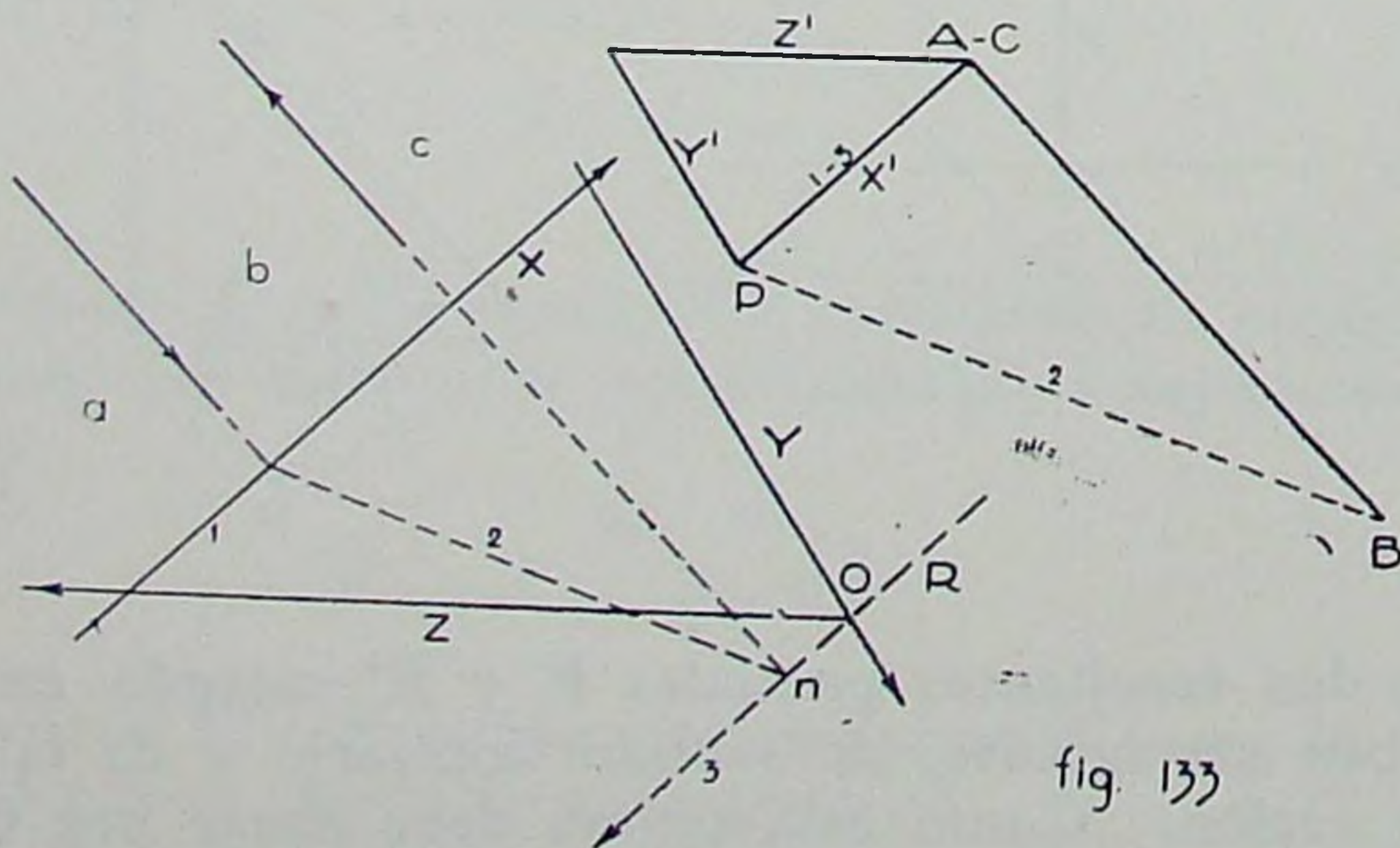


fig. 133

Para conocer las magnitudes de las fuerzas  $X$  y  $R$ , que forman un par equilibrante a  $ab$  y  $bc$ , se construye un funicular de lados 1-2-3 (tal como se ha indicado en el capítulo pág. 49 relativo a pares).



Las líneas de acción del par dado, cortan a las paralelas  $X$  y  $R$  en los puntos  $m$  y  $n$ , que se los une por medio de una línea. Esta recta con las dos paralelas  $X$  y  $R$  forman los tres lados del funicular, que tienen los números 1 - 2 - 3.

Entonces se construye el dinámico  $ABC$ , por los extremos de esta línea se traza paralelas a los lados del funicular 1 y 2 que son los radios polares correspondientes y el punto de intersección,  $P$ , determina el polo. El lado 3 del funicular corresponde al radio polar 3 que coincide con el radio 1.

Por el teorema fundamental de Grafoestática, se sabe que el sistema de fuerzas dado se puede convertir en otro, cuyas líneas de acción son los lados extremos del funicular y sus magnitudes los radios polares 1 y 3. De manera que  $AP$  es la magnitud de  $R$  y  $PC$  es de  $X$ .

Ahora  $R$  hay que descomponer según las líneas de acción  $Y$  y  $Z$ .

De los extremos de  $AP$ , trazamos paralelas a  $Y$  y  $Z$ ; el punto de intersección define las magnitudes de las fuerzas buscadas.

Como se ve en la figura,  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  forman un dinámico cerrado y el funicular de este sistema no se cierra, luego se reduce a un par de fuerzas, lo que comprueba el acerto anterior.

ÁREA HISTÓRICA  
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

### 125.—Aplicación del método de Culmann.

*En la fig. 134 damos el esquema de una armadura de hierro para cubierta; la luz es de 20 m.; la flecha de 5 m. y la flecha del cordón inferior es de 0,80 m. El espaciamiento entre armaduras es de 5 m. El trazado de la armadura se hace con los jabalcones o tornapuntas normales al par, dividiéndolo a éste en cuatro partes iguales, como se ve en la fig. 134.*

Se pide, trazar los diagramas debidos a la carga permanente y al empuje del viento y verificar, por medio del método de Culmann, los esfuerzos de tres barras cortadas por una sección cualquiera.

Se considerará el apoyo izquierdo de la armadura como fijo y el derecho libre. Y conforme habíamos observado en el N°. 121 los esfuerzos máximos, en las barras, a causa del empuje del viento se obtiene, cuando sopla del lado del apoyo



fijo; por esta razón supondremos en el caso presente, que el viento ejerce su acción sobre este lado.

Los cálculos preliminares dan los resultados siguientes:

Longitud del par.....	11,18 m.
Peso de la armadura (fla. de Merriman).....	2.770 k.
Peso de la cubierta ( $50 \text{ k/m}^2$ de cubierta).....	3.354 k.
Carga total permanente.....	6.124 k.
Carga para cada nudo .....	765 k.
Reacción del apoyo con carga permanente.....	3.060 k.
Inclinación de la cubierta .....	$26^\circ 34'$
Presión normal a la cubierta por $\text{m}^2$ .....	90 k.
Empuje total del viento.....	5.000 k.
Para cada nudo es el empuje .....	1.250 k.
Reacción del apoyo libre (vertical).....	1.400 k.
Reacción del apoyo fijo (inclinación) .....	3.800 k.

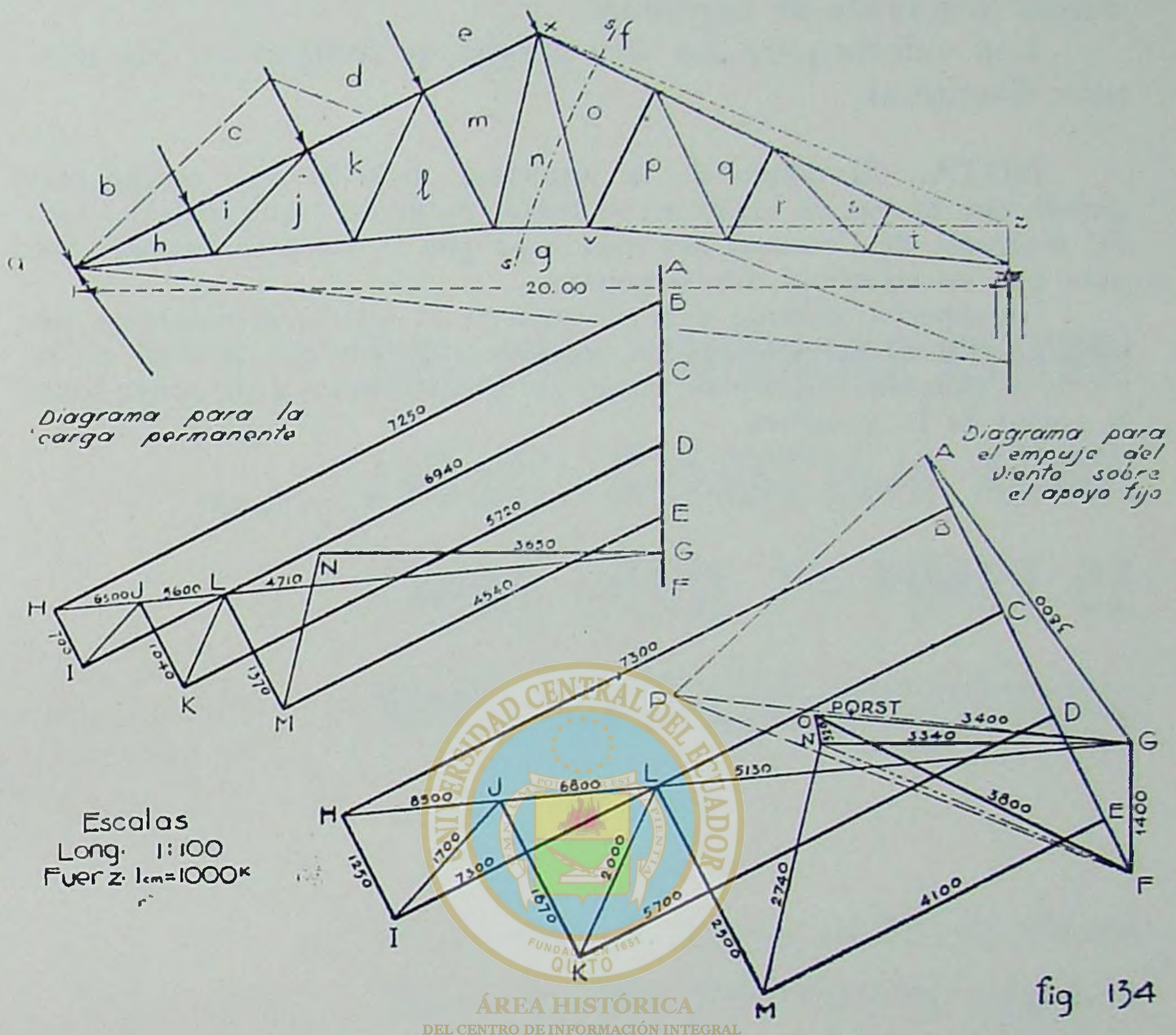
Las reacciones de los apoyos hemos obtenido gráficamente según el N°. 53 pág. 59.

Se traza un funicular arbitrario, que como se sabe, la resultante del empuje del viento pasa por la mitad del par y se reduce a un triángulo (líneas de puntos); después se determina el polo P, y por este punto se traza una paralela al lado de cierre del funicular hasta que intercepte a la vertical dibujada por F. Esta intersección determina el punto G y por consiguiente la magnitud FG de la reacción derecha. Se une GA y esta última línea es la magnitud de la reacción izquierda. La primera vale 1.400 k. y la segunda 3.800 k.

Determinados así el dinámico y las reacciones de los apoyos, se principia el trazado de los polígonos de Cremona por los métodos ya muy conocidos.

Para el diagrama del empuje del viento, debe trazarse los esfuerzos para todas las barras. Para que el dibujo resulte exacto, es conveniente determinar el esfuerzo de una o más barras por métodos independientes. Con este nuevo valor se continúa en el trazado. En efecto supongamos la sección ss que corta a tres barras, fo, on y ng y determinemos independientemente del polígono de Cremona, los esfuerzos, valiéndonos del método de Culmann.





La resultante de las fuerzas situadas a la derecha de la sección  $ss$ , es la reacción del apoyo derecho, única fuerza que se encuentra a este lado.

El esfuerzo de la barra  $ng$  siendo horizontal, tiene su intersección con la reacción en  $z$ , luego la resultante de estas dos fuerzas pasará por este punto; y como tiene que hacer equilibrio a la resultante de los esfuerzos de las otras dos barras y que pasa por su punto de concurso  $x$ , se deduce que la línea de acción de la resultante será  $xz$ . Que es el previsto en el primer caso.

Luego por  $F$ , trazamos una paralela a esta última línea (en puntos), hasta que corte a la horizontal que viene de  $G$ . La magnitud  $NG$  es el esfuerzo de la barra  $ng$ . Por  $N$  y  $F$  se dibujan paralelas a las barras  $fo$  y  $on$ , su punto de concurso determina sus magnitudes.



Encontrados los puntos O y N se continúa con las demás barras el trazado de Cremona.

Los valores para las dos cargas se indican en los mismos diagramas.

NOTA. El dibujo de la armadura debe hacerse mucho más grande que lo que se indica en el texto, de manera que ninguna línea del diagrama de Cremona sea más larga que la barra correspondiente, para que así resulte el dibujo preciso.

Un especial cuidado debe mantenerse al dibujar el diagrama debido al empuje del viento; con frecuencia sucede que al final no se cierra el polígono. Por esta razón, se dibujará desde cada apoyo hacia el centro de la armadura.

(Continuará)



ÁREA HISTÓRICA  
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL