Por el Profesor de Geometría Analítica e Hidráulica

Sr. Rafael Aníbal Jarrín

Procedimiento para construír la curva definida por una ecuación, y estudio analítico

PROCEDIMIENTO PARA CONSTRUIR LA CURVA DEFINIDA POR UNA ECUACION, Y ESTUDIO ANALITICO

I.—Curva definida por una ecuación cualquiera de la forma $y = f(x)$

Sabemos, por el análisis matemático, que la función $y = f(x)$ es continua para todos los valores de x con los cuales su primera derivada $f'(x)$ tenga un valor determinado y finito. Además sabemos que el coeficiente angular de la tangente en un punto $M(x_0, y_0)$, de la curva representativa, es el valor que toma $f'(x)$ para $x = x_0$, y que si se tiene:

$f'(x_0) = 0$, la tangente es paralela al eje ox,

$f'(x_0) = \pm \infty$, la tangente es paralela al eje oy,

$f'(x_0) > 0$, la función *y* es creciente en la proximidad del punto M,

$f'(x_0) < 0$, la función y es decreciente en la proximidad de M.

Dentro de un intervalo (a, b) de la variación de x, en que *y* sea continua, la raíz a_1, de la ecuación derivada $f'(x)$ igualada a cero, corresponderá a un máximo de y si para dicho valor a_1 dado a x, f' (x) se anula pasando de un valor positivo, para valores de x inferiores a la raiz, a un valor negativo, para valores de x superiores a dicha raiz. Lo que quiere decir que, la función *y* será primero creciente y después decreciente.

La raiz a_2 de f' (x) corresponderá a un mínimo de *y*, si para dicho valor a_2 dado a x, f' (x) se anula pasando de un valor negativo a otro positivo.

Tomando en consideración lo que antecede, se ve claramente que el procedimiento para construir una curva: $y = f(x)$, en coordenadas rectangulares, debe ser el siguiente:

1°. Desechar los valores de x para los cuales la función deja de ser definida; por ejemplo, la función $y = \sqrt{x}$ no es definida para valores negativos de x, porque entonces *y* adquiere valores imaginarios. Por la misma razón, la función $y = \sqrt{(x-1)(x-4)}$ tampoco es definida para valores de x comprendidos entre 1 y 4; luego esta curva no tendrá ningún punto en la parte del plano comprendida entre las paralelas a oy:

$$x = 1, \quad x = 4.$$

2°. Buscar los valores de x con los cuales la función *y* deja de ser contínua.

3°. Calculada la función derivada, se buscará igualmente como hemos hecho con la anterior, los valores de x con los cuales deja de ser definida o continua. Tomemos otro ejemplo; sea la función:

$$y = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ ;$$

calculando la derivada, tendremos:

$$y' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{x\sqrt{1-x}}{(1-x)^2\sqrt{1+x}} = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$$

Las funciones *y* y *y'* serán definidas si el subradical de cada una es positivo, lo cual se tiene sólo para valores de x comprendidos entre -1 y $+1$. Para $x = \pm 1$ se tiene:

$y' = \pm \infty$, y entonces y y y' dejan de ser continuas. Cuando y' es discontinua, toma generalmente un valor infinito.

4º. Buscar los valores de x para los cuales se tenga: $y = 0$, $y = \infty$ o $y = -\infty$. En el ejemplo anterior se tiene: $y = 0$, para $x = 0$ y para $x = -1$, $y = \infty$, para $x = 1$, que es una asíntota.

5º. Buscar las raíces de la derivada, con las que se anula, bien sea cambiando o sin cambiar de signo.

6º. Ordenando de una manera creciente, los valores así obtenidos de la variable independiente x, se obtendrán intervalos consecutivos, dentro de los cuales, o la función no es definida, o es continua y creciente, o bien, continua y decreciente, para saber lo cual tendremos que averiguar el signo que tenga la primera derivada dentro de cada intervalo.

7º. Calcular los valores correspondientes de la función y para los valores particulares que así hemos obtenido de la variable x.

A este procedimiento tendremos que añadir el estudio sobre la concavidad que presenta la curva hacia uno de los ejes de coordenadas, la determinación de sus puntos de inflexión y la de sus asíntotas. Averiguaremos también la simetría que tenga la curva, lo cual abrevia su construcción.

Por lo pronto, ilustremos lo dicho con un ejemplo.

Construír:

$$y = \pm \frac{x}{\sqrt{(x-1)\ (x-2)}}$$

Esta curva es simétrica con relación al eje $x'x$, pues, a todo punto M (x, y) corresponde otro M' (x, — y), a igual distancia de dicho eje. Bastará construír la rama de curva:

$$y = \frac{x}{\sqrt{(x-1)\ (x-2)}}$$

Calculemos la derivada:

$$y' = \frac{\sqrt{(x-1)\ (x-2)}}{(x-1)\ (x-2)} - \frac{x\,(2x-3)}{2\sqrt{(x-1)^3\ (x-2)^3}} = \frac{4 - 3x}{2\sqrt{(x-1)^3\ (x-2)^3}}$$

Las funciones y y y' son definidas y continuas si se tiene: $x < 1$ o $x > 2$, es decir para valores de x exteriores al intervalo (1, 2). Para $x = 1$ se tiene: $y = y' = \infty$; para $x = 2$, $y = -y' = \infty$.

Las dos paralelas a oy: $x = 1$ (recta $c'c$), y $x = 2$ (recta D'D), son asíntotas de la curva. (Fig. 1).

Para $x = 0$, la función se anula pasando de un valor negativo a otro positivo, porque entonces la derivada tiene signo positivo.

El valor $x = \frac{4}{3}$, que anula el numerador de y', está dentro del intervalo (1, 2) en el que la función y su derivada no son definidas. Y' se anula para $x = \pm \infty$, pues, entonces se tiene:

$$y' = \frac{4 - 3x}{2\sqrt{(x-1)^3\ (x-2)^3}} = \frac{\frac{4}{x} \mp 3}{2(x-1)\ (x-2)\sqrt{\frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x}}} =$$

$$= \frac{\mp 3}{\infty} = 0,$$

y el valor que corresponde a la función es: $y = \pm 1$, ordenadas de las asíntotas paralelas a $x'x$ (rectas A'A y B'B respectivamente).

En el siguiente cuadro hacemos constar también el signo de la derivada de y', o sea y'', porque según dicho signo sabremos las variaciones de y', pues, en los intervalos de continuidad, si $y'' > 0$, y' es función creciente; si $y'' < 0$, y' es función decreciente. Además, como veremos más adelante, por el signo de y'' se deduce el sentido de la concavidad de la curva.

En la función que estudiamos:

$$y'' = \frac{-6\sqrt{(x-1)^3\ (x-2)^3}}{4\,(x-1)^3\ (x-2)^3} +$$

$$+ \frac{(3x - 4)\ [3(x-1)^3\ (x-2)^3 + 3(x-2)^2\ (x-1)^3]}{4\,(x-1)^3\ (x-2)^3\ \sqrt{(x-1)^3\ (x-2)^3}}$$

y simplicando:

$$y'' = \frac{12x^2 - 33x + 24}{4\sqrt{(x-1)^5\,(x-2)^5}} = \frac{12\left[\left(x - \frac{33}{24}\right)^2 + \frac{63}{576}\right]}{4\sqrt{(x-1)^5\,(x-2)^5}}$$

x	y''	y'	y
— ∞		o	— 1
	+	crece +	crece —
o			o
	+	crece +	crece +
1		+ ∞	+ ∞
	La curva no tiene ningún punto en este intervalo		
2		— ∞	+ ∞
	+	crece —	decrece +
+ ∞		o	1

Vemos que y'' es también definida y continua, fuera del intervalo (1, 2), y su signo es siempre positivo fuera de dicho intervalo.

Los valores particulares de x que hemos obtenido, ordenados de — ∞ a + ∞, son:

— ∞, o, 1, 2, + ∞, los mismos que figuran con las variaciones correspondientes de *y'* y *y* en el cuadro, el cual facilita la construcción de la curva.

Como queda dicho, la curva:

$$y = -\frac{x}{\sqrt{(x-1)\,(x-2)}}$$

simétrica de la anterior con relación al eje x'x, está representada con línea de puntos.

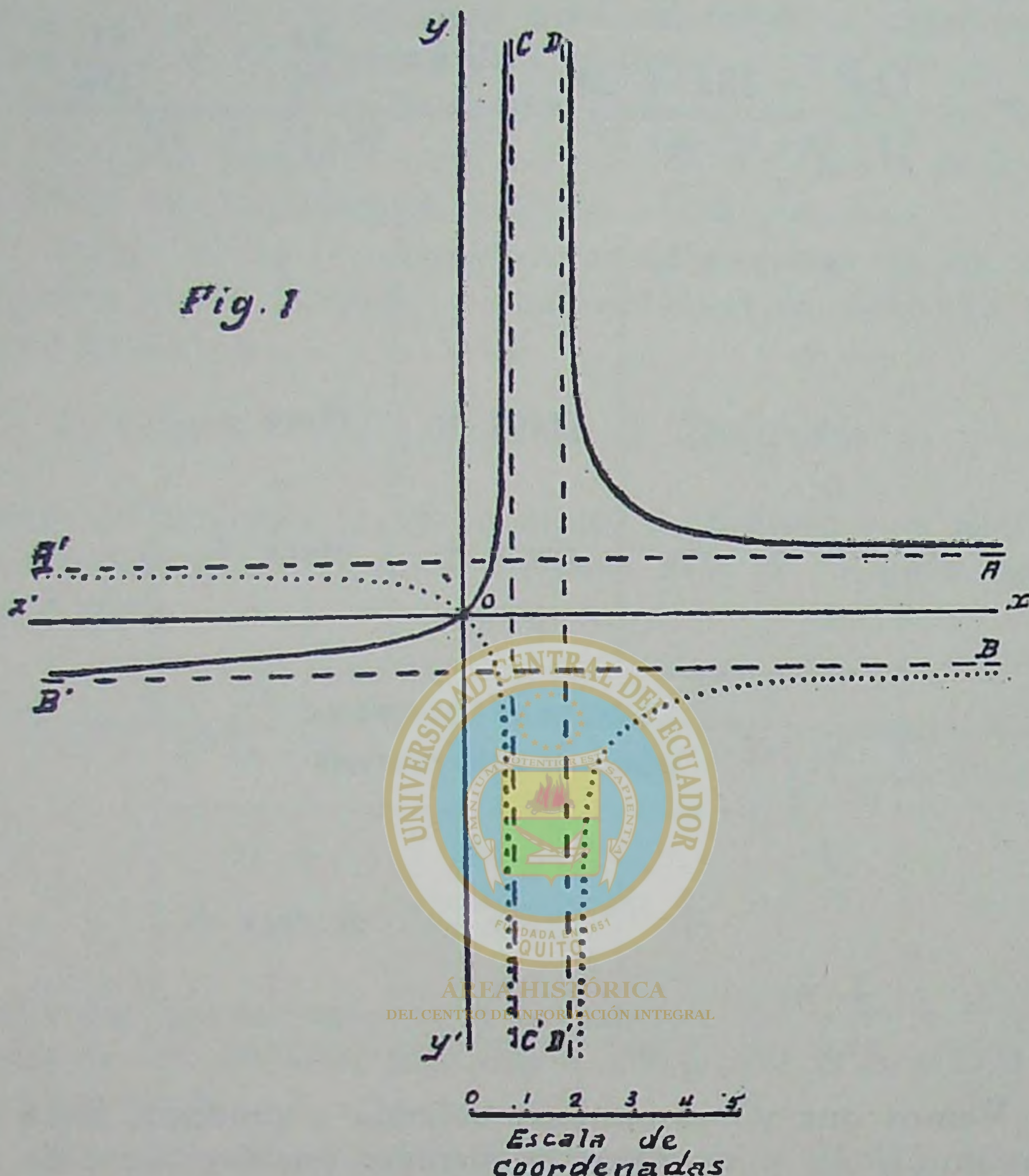


Fig. 1

Sentido de la concavidad de una curva y determinación de sus puntos de inflexión

Sea una curva: $y = f(x)$, (figura 2), en la cual consideramos un punto M (x_0, y_0) cuya abscisa esté dentro de un intervalo en el cual la función y sus derivadas sean definidas y contínuas; luego, $f'(x)$ y $f''(x)$ tendrán un valor determinado y finito: y'_0, y''_0, para $x = x_0$.

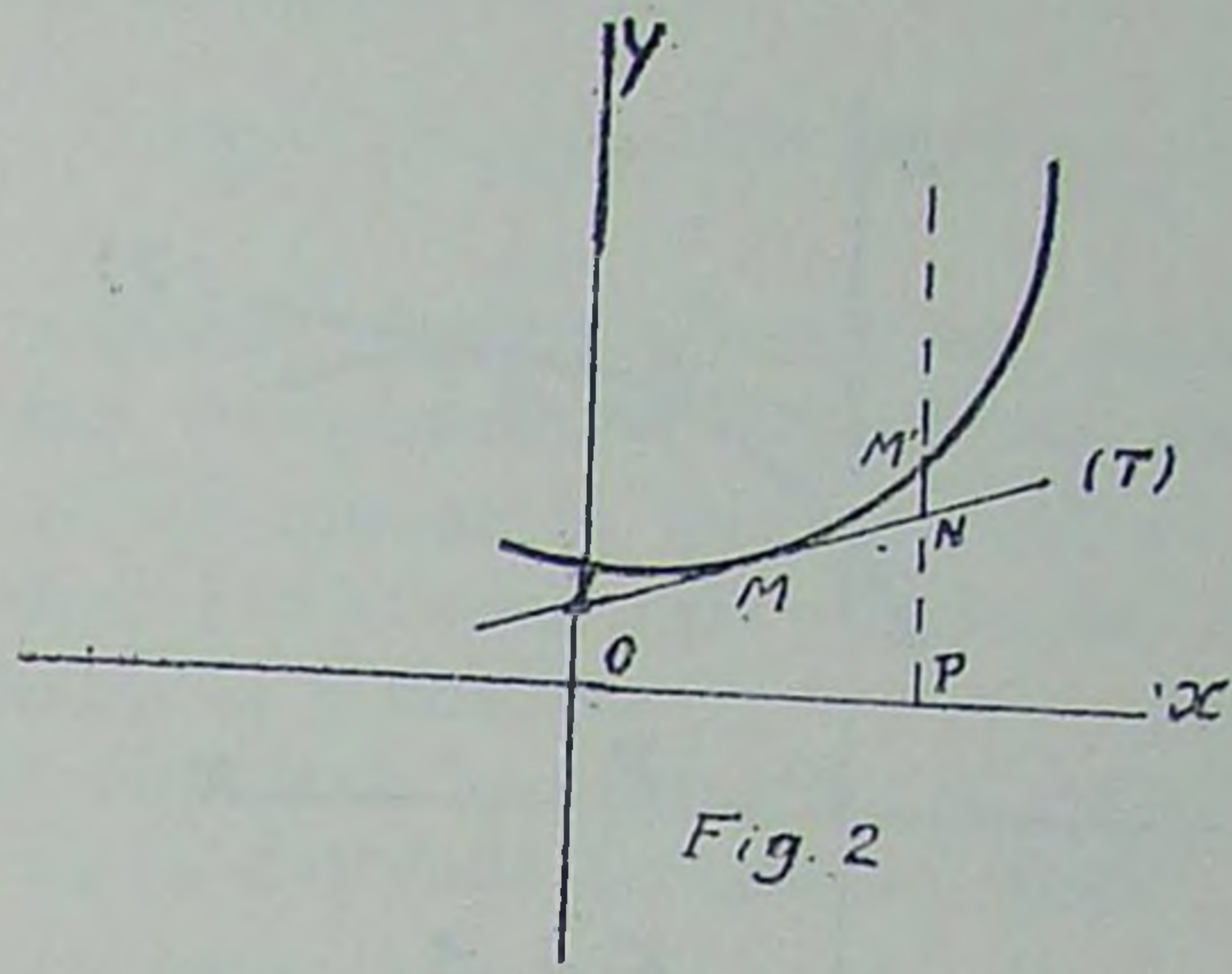


Fig. 2

La tangente (T) en el punto M tiene por ecuación: $Y - y_0 = y'_0 \; (X - x_0)$, considerando X y Y como coordenadas corrientes de esta recta.

Tracemos una paralela variable al eje oy, que pase por la proximidad de M y que cortará a la curva en un punto M', a la tangente (T) en un punto N y al eje ox en P. El punto M' se encontrará encima de la tangente (T), como indica la figura, si se tiene:

$$\overline{PM'} - \overline{PN} = \overline{NM'} > o \; ;$$

y si esto sucede en la proximidad de M, se dice que el sentido de la concavidad de la curva, en M, es hacia la *y* positiva.

M' estará debajo de (T) si se tiene como en la figura 3:

$$\overline{PM'} - \overline{PN} = \overline{NM'} < o \; ;$$

y si esto sucede en la proximidad de M, la concavidad será hacia la *y* negativa.

Pero, este segmento orientado $\overline{NM'}$ es igual a la diferencia entre la ordenada *y* del punto M' de la curva y la ordenada Y del punto N de la tangente (T), correspondiendo ambas ordenadas a una misma abscisa. Estas dos ordenadas son:

$$y = f(x), \qquad Y = y'_0 \; (X - x_0) + y_0 \; ;$$

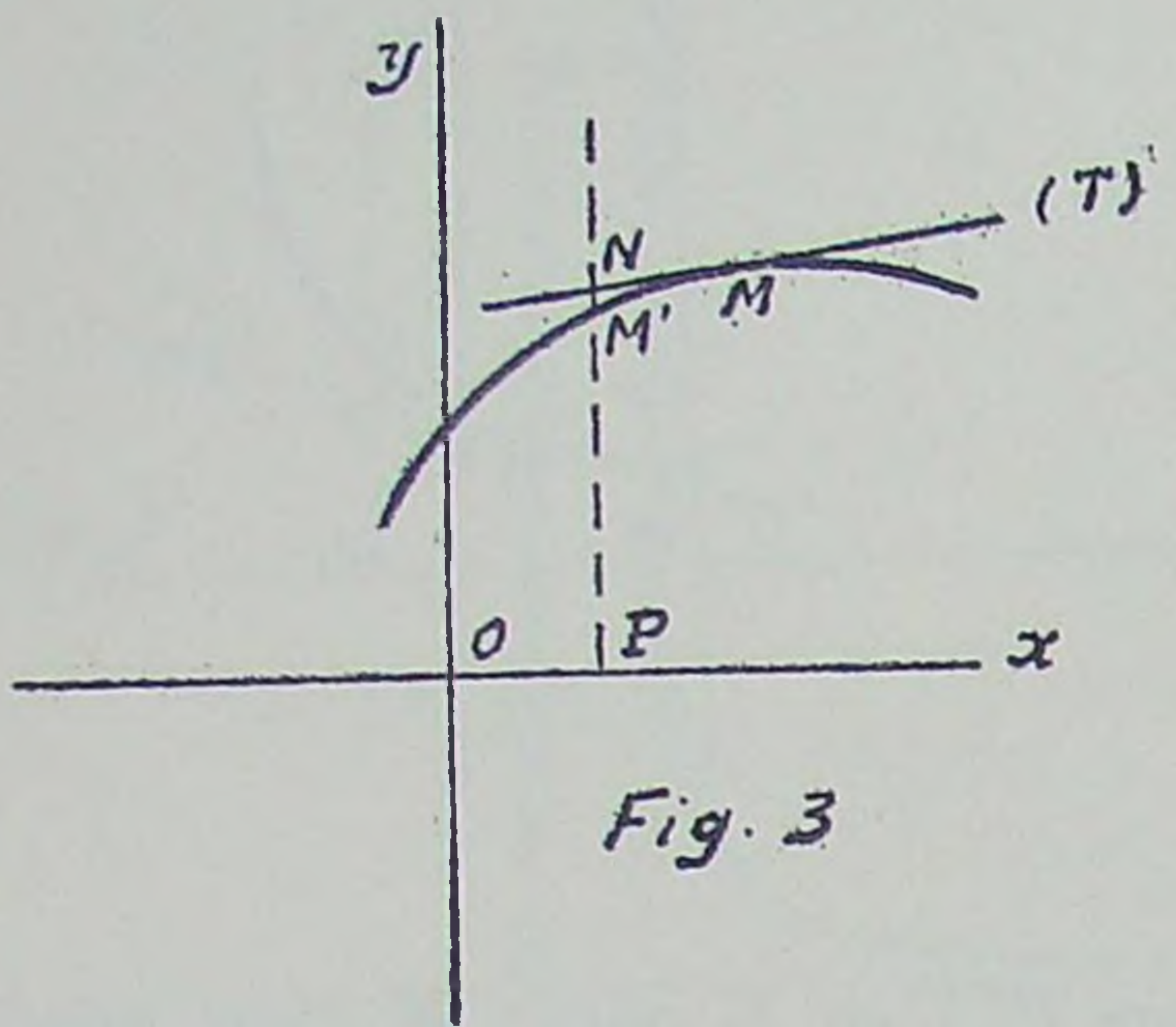


Fig. 3

de donde:

$$(1) \quad \overline{NM'} = y - Y = y - y'_0 X + y'_0 x_0 - y_0 = \varphi(x).$$

Claro está que la función $\varphi(x)$ se anula para $x = x_0$, o sea cuando PN pase por el punto $M(x_0, y_0)$.

Consideremos primero el caso de la figura 2, en el cual la función $\varphi(x)$, para valores de la variable inferiores a x_0, tiene signo positivo y es una función decreciente (el valor del segmento $\overline{NM'}$, al acercarse a M, va disminuyendo); para valores superiores a x_0 también tiene signo positivo, pero entonces es una función creciente (el valor de dicha función, segmento $\overline{NM'}$, va aumentando cuando x aumenta).

Según la teoría de la variación de las funciones, $\overline{NM'} = \varphi(x)$ se presenta en el caso de un mínimo para $x = x_0$. Las condiciones necesarias y suficientes para este mínimo serán que la primera derivada $\varphi'(x_0) = o$, y que en las derivadas siguientes, la primera que no se anule para $x = x_0$, sea tomando un valor positivo y de un orden par de derivación.

Derivando la ecuación (1) tendremos:

$$(2) \quad \varphi'(x) = y' - y'_0 = f'(x) - f'(x_0),$$

derivada que se anula para $x = x_0$, cumpliéndose así la primera condición común para un máximo o un mínimo.

Derivemos la ecuación (2):

$$(3) \quad \varphi''(x) = y'' = f''(x).$$

Si esta segunda derivada toma un valor positivo para $x = x_0$, quedan cumplidas las condiciones necesarias y suficientes para el mínimo de la función $\overline{NM'} = \varphi(x)$, y entonces la curva $y = f(x)$ tiene, en la proximidad del punto M, su concavidad hacia la *y* positiva.

También sucederá lo mismo si $\varphi''(x_0) = f''(x_0) = 0$, siempre que en la derivada tercera se tenga:

$\varphi'''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, y en la cuarta:

$\varphi^{IV}(x_0) = f^{IV}(x_0) > 0$, a fín de cumplir las condiciones del mínimo, cuyo razonamiento se prolonga como queda indicado (Nótese que a partir de la segunda derivada, las de $\varphi(x)$ son idénticas a las de $f(x)$).

De una manera análoga estudiemos el caso de la figura 3, en el que, más concisamente, diremos siempre en la proximidad de M:

$\overline{NM'} = \varphi(x)$, es una función continua de valores negativos y *creciente* cuando $x < x_0$;

$\overline{NM'} = \varphi(x)$, es una función continua de valores negativos y *decreciente* cuando $x > x_0$.

Luego se presenta el caso de un máximo de $\varphi(x)$, para $x = x_0$, y siempre que se llenen las condiciones necesarias y suficientes para dicho máximo la curva tendrá, en la proximidad de M, su concavidad hacia la *y* negativa.

De dichas condiciones, en la ecuación (2) hemos visto que se cumple la primera: $\varphi'(x_0) = 0$, y sólo nos restará saber si la primera de las derivadas siguientes que no se anula, para $x = x_0$, es de un orden par de derivación y menor que cero.

Si esto se cumple en la derivada segunda, con la desigualdad:

$$\varphi''(x_0) = f''(x_0) < 0$$

quedan llenas dichas condiciones.

Sucederá lo mismo si:

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = 0, \qquad f^{IV}(x_0) < 0.$$

En la curva que construímos (figura 1)

$$y = + \frac{x}{\sqrt{(x-1)(x-2)}},$$

vimos que y" era siempre positiva para todo valor de x exterior al intervalo (1, 2); luego dicha curva es convexa y presenta su concavidad hacia la *y* positiva.

En la simétrica de la anterior:

$$y = - \frac{x}{\sqrt{(x-1)(x-2)}},$$

fuera del mismo intervalo se tiene: $y'' < o$; luego tiene su concavidad hacia la *y* negativa.

Nos falta sólo que estudiar el caso en el cual:

$\varphi''(x_0) = o, \quad \varphi'''(x_0) \neq o$, o lo que es lo mismo:

$$f''(x_0) = o, \quad f'''(x_0) \neq o;$$

y generalizando más la cuestión, el caso en el cual:

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots\ldots = f^{(n)}(x_0) = o,$$

$$f^{(n+1)}(x_0) \neq o,$$

siendo n par; de manera que la primera derivada que no se anula, a partir de la 2ª, y para $x = x_0$, es de un orden impar de derivación.

Resulta entonces que la función $f'(x)$, del coeficiente angular de la tangente, pasa por un máximo o un mínimo, para $x = x_0$, según que se tenga respectivamente:

$$f^{(n+1)}(x_0) < o, \quad \text{o: } f^{(n+1)}(x_0) > o;$$

pues, la primera condición, para dicho máximo o mínimo, $f''(x_0) = o$, ya la suponemos llena. La función $\varphi(x)$ considerada en los casos anteriores, en el presente no pasa ni por un máximo ni por un mínimo, para $x = x_0$.

Para fijar las ideas, hagamos $n = 2$ y

$$\varphi''' (x_0) = f''' (x_0) > o;$$

entonces, $f' (x_0)$ es un mínimo del coeficiente angular de la tangente, $f' (x)$, y como x_0 está encerrado dentro de un intervalo (a, b), $b > a$, en el cual $f (x)$ y sus derivadas son definidas y continuas, se tendrá que en la proximidad del punto $M (x_0, y_0)$ y para $x < x_0$, $f' (x)$ es una función decreciente, y que para $x > x_0$, $f' (x)$ es una función creciente (una función al pasar por el valor mínimo, primero es decreciente y después creciente).

Esto se efectuará en el caso de la curva de la figura 4, y en la cual, el punto $M (x_0, y_0)$ se llama punto de inflexión.

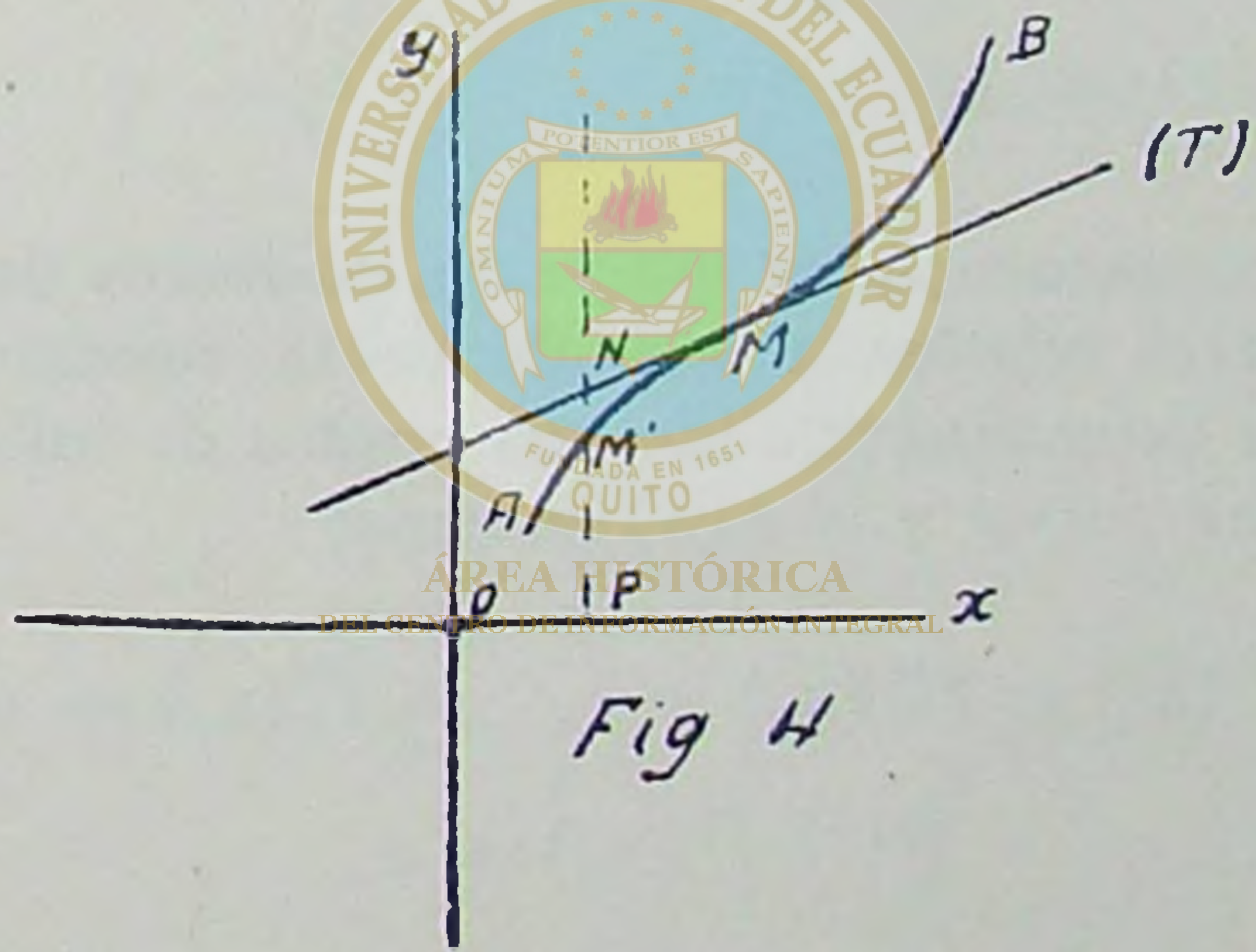


Fig 4

Además, si para valores de x inferiores a x_0, o sea dentro de un cierto intervalo (a_1, x_0), $f' (x)$ es función decreciente, entonces $f'' (x)$ será menor que cero, y el arco AM correspondiente a la función y tendrá su concavidad hacia la y negativa; y si para valores de x superiores a x_0, o sea dentro de un cierto intervalo (x_0, b_1), $f' (x)$ es función creciente, se tendrá que $f'' (x) > o$, y el sentido de la concavidad de MB será hacia la y positiva. Luego, en el punto de inflexión, la curva atraviesa su tangente en M.

Empleando un razonamiento análogo veremos que si

$$f'' (x_0) = o, \quad y \ f''' (x_0) < o,$$

entonces $f'(x_0)$ es un máximo de $f'(x)$, y la disposición de la curva en la proximidad del punto $M(x_0, y_0)$ será como de la figura 5.

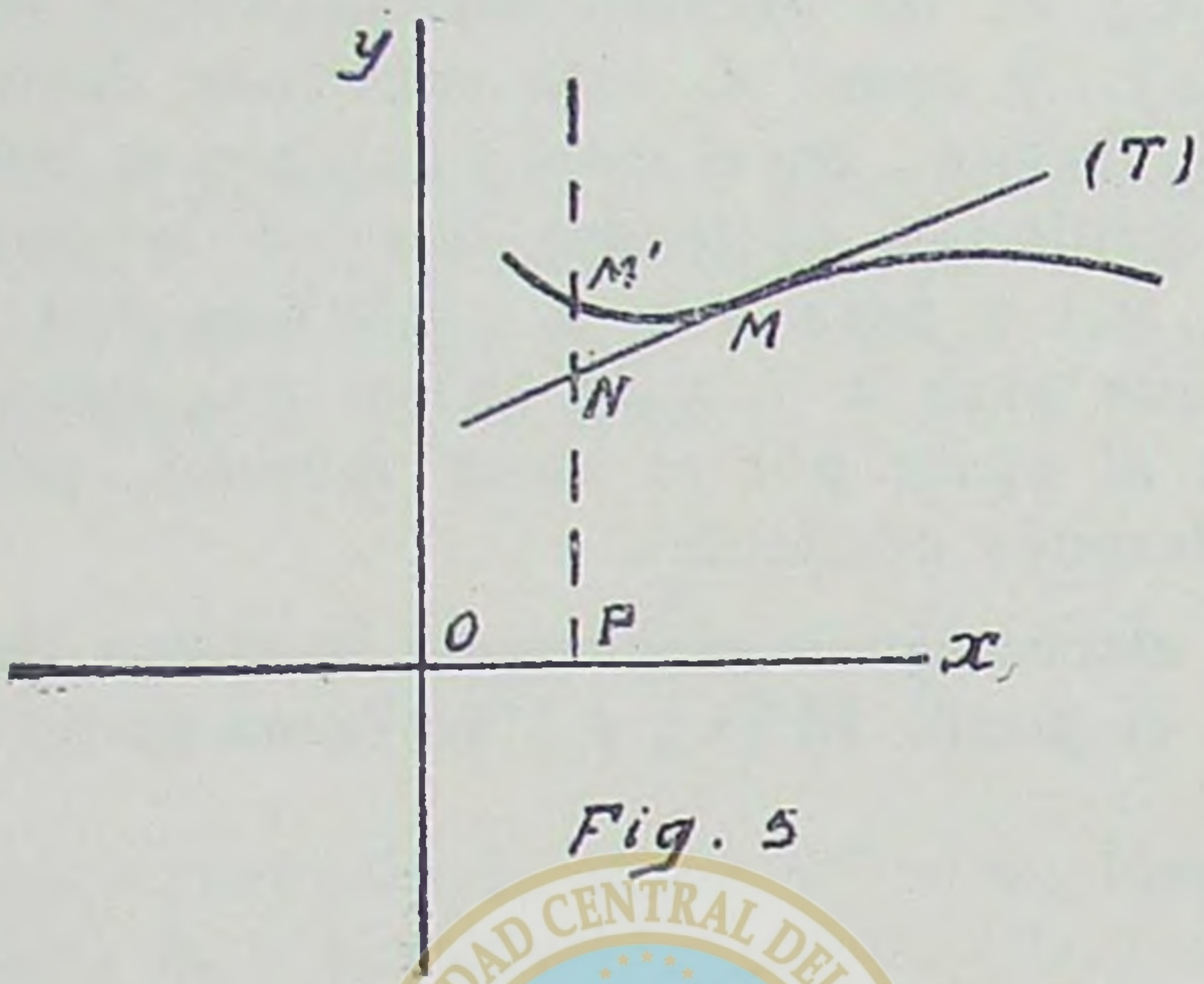


Fig. 5

Como consecuencia de todo esto, podemos dar la siguiente regla general relativa al sentido de la concavidad de una curva y a la determinación de sus puntos de inflexión:

Si en una curva $y = f(x)$ se tiene:

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots\ldots = f^{(n)}(x_0) = o,$$

$$f^{(n+1)}(x_0) \neq o,$$

si $(n+1)$ es par, dicha curva es convexa en el punto de abscisa x_0, y su concavidad será hacia oy si

$f^{(n+1)}(x_0) > o$, o hacia la y negativa si

$$f^{(n+1)}(x_0) < o.$$

(Obsérvese que si $(n+1) = 2$, la hipótesis será:

$$f'(x_0) = o, \quad f''(x_0) \neq o).$$

Si $(n+1)$ es impar, la curva tiene una inflexión en el punto de abscisa x_0; la disposición de su inflexión será como en la figura 4 si $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, y como en la figura 5 si

$$f^{(n+1)}(x_0) < 0 .$$

En general, la determinación de los puntos de inflexión de la curva $y = f(x)$ se hará buscando las raíces de $f''(x)$ en los intervalos en los que la función y sus derivadas son definidas y contínuas.

Sustituyendo el valor de dichas raíces en $f'''(x)$ se sabrá, por el signo de esta, la disposición de la curva en el punto de inflexión encontrado, pudiendo también averiguarse la concavidad antes y después de dicho punto.

Si $f''(x)$ no da ninguna raiz, la curva no tiene puntos de inflexión, como sucede en la de la figura 1.

Ejemplo. Construír la curva:

$$y = e^{\frac{1}{x}} \qquad \textit{(J. Tannery)}$$

y estudiar su concavidad. (Figura 6)

Las dos primeras derivadas de *y* son:

$$y' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2},$$

$$y'' = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 2\,x\,e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(2\,x + 1)}{x^4}.$$

En esta función *y* se presenta una singularidad: si x tiende hacia cero por valores positivos, se tiene:

$$y = e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \infty$$

(ε = infinitamente pequeño positivo);

y si x tiende hacia cero por valores negativos, resulta que:

$$y = e^{\frac{1}{-\varepsilon}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{\varepsilon}}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

es decir que la rama de la curva que se presenta con sus abscisas negativas, se detiene en el origen. A esta singularidad se la llama: punto de detención.

En las derivadas, si x tiende hacia cero por valores positivos, se tiene:

$$y' = -\infty\,, \quad y'' = \infty\,;$$

y si por valores negativos, toman la forma $\frac{0}{0}$, cuyo verdadero valor vamos a buscar:

$$1^{\circ}. \qquad y' = -\frac{1}{(-\varepsilon)^2} \times \frac{1}{e^{\frac{1}{\varepsilon}}} = \frac{-1}{\varepsilon^2 e^{\frac{1}{\varepsilon}}} = -\frac{1}{0 \times \infty}.$$

Calculemos el valor del denominador, haciendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ y que n tienda hacia el infinito; entonces:

$$\varepsilon^2 e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{e^n}{n^2} = \frac{e}{\sqrt[n]{n^2}} \times \frac{e}{\sqrt[n]{n^2}} \times \ldots\ldots \text{(n veces)}.$$

Ahora, busquemos el límite de

$$\sqrt[n]{n^2} = n^{\frac{2}{n}}, \text{ tendremos: } L\, n^{\frac{2}{n}} = \frac{2}{n} L\, n;$$

$$\text{lím. } L\, n^{\frac{2}{n}} = \frac{2\,L\,n}{n} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{(2\,L\,n)'}{(n)'} = \frac{2}{n} = 0$$

(hemos aplicado la regla de L' Hospital);

luego $\lim n^{\frac{2}{n}} = 1$, con lo que se tiene:

$$\varepsilon^2 e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \infty \,, \quad y' = \frac{-1}{e^{\frac{1}{\varepsilon}}\, \varepsilon^2} = 0.$$

$$2^{\circ}. \qquad y'' = \frac{1 - 2\varepsilon}{\varepsilon^4 \, e^{\frac{1}{\varepsilon}}} = \frac{1 - 0}{0 \times \infty}.$$

Calculando el valor del denominador, como en el caso anterior, y empleando el mismo procedimiento hallamos que:

$$\lim n^{\frac{4}{n}} = 1 \,, \quad \varepsilon^4 e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{e^n}{n^4} = \frac{e}{\sqrt[n]{n^4}} \times \frac{e}{\sqrt[n]{n^4}} \times \ldots\ldots$$

(n veces),

$$\varepsilon^4 e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \infty \,; \text{ luego, } y'' = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Encontramos, pues, que la función *y* y sus derivadas *y'* y *y''* son definidas y contínuas para todo valor de x, menos para x = o : el eje oy, x = o, es una asíntota. La tangente en el punto de detención es el eje ox; pero a dicho punto no se le puede considerar como un mínimo, puesto que el signo de y' es siempre negativo y la función *y*, discontinua (para el mínimo de *y* se requiere que dentro de un intervalo, en que *y* sea contínua, y' se anule pasando de valores negativos a positivos).

También se anula y' para $x = \pm \infty$, correspondiendo a la función el valor: y = 1, que es la ordenada de la asíntota paralela a ox. (Recta A'A).

Conforme a la teoría expuesta sobre la concavidad y puntos de inflexión, estudiemos:

$$f''(x) = y'' = \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4};$$

esta derivada se anula para

$$x = -\frac{1}{2},$$

valor con el cual:

$$y = e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \qquad y' = -\frac{4}{e^2};$$

vimos que también se anula para $x = -\varepsilon$, pero la función deja de ser continua. La curva tiene un solo punto de inflexión:

$$I\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right).$$

Para $x > -\frac{1}{2}$, se tiene: $y'' > o$, y la concavidad es hacía oy.

Para $x < -\frac{1}{2}$ se tiene: $y'' < o$, y la concavidad es hacía oy'.

Los valores particulares de x que hemos obtenido, ordenados desde

$-\infty$ hasta $+\infty$, son:

$$-\infty, \quad -\frac{1}{2}, \quad \mp\varepsilon, \quad +\infty,$$

con los cuales se dispone el cuadro siguiente:

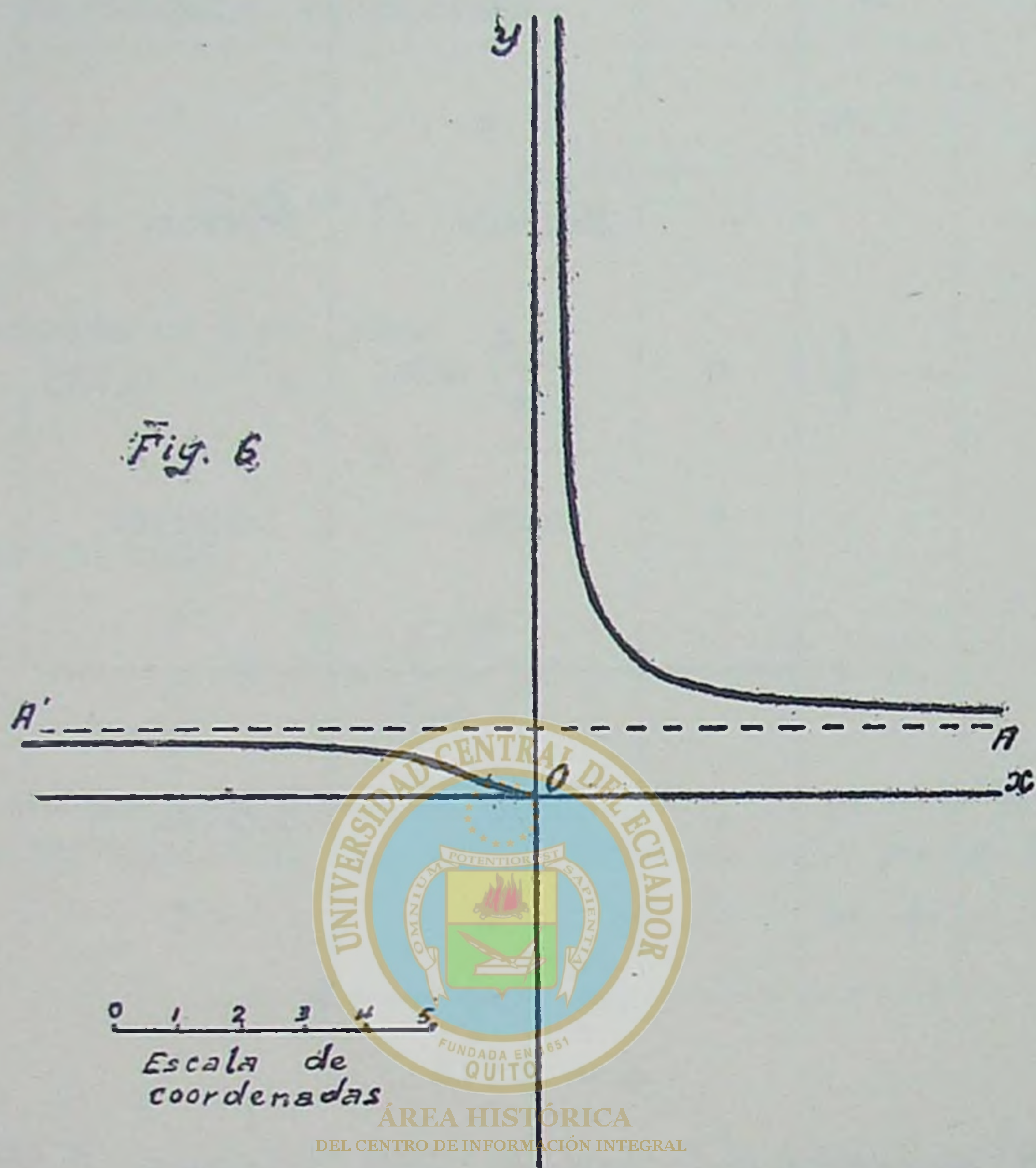
x	y''	y'	y
$-\infty$		0	1
	$-$	decrece, $-$	decrece, $+$
$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{4}{e^2}$ mín.	$e^{-2} = 0{,}135$
	$+$	crece, $-$	decrece
$\mp \varepsilon$		0	0
		$-\infty$	∞
	$+$	crece, $-$	decrece, $+$
$+\infty$		0	1

$$e = 2.718...$$

El procedimiento indicado para construir una curva $y = f(x)$ nos ha servido también para la determinación de las asíntotas, paralelas a oy o a ox, y además, la posición de la curva con relación a ellas. Nos faltará solamente que determinar las otras asíntotas que puedan haber.

Sabemos que éstas se determinan por medio de su coeficiente angular c y de la ordenada d, correspondiente al punto de su intersección con oy (ordenada en el origen). El valor de c se obtiene buscando en la ecuación de la curva el límite de la relación $\frac{y}{x}$ para $x = \pm \infty$; y el de d, después de encontrado el de c, buscando en la misma ecuación el límite de $(y - cx)$, para $x = \pm \infty$. Se tiene:

$$c = \text{lím.}\ \frac{y}{x}, \qquad d = \text{lím.}\ (y - cx),$$



para $x = \pm \infty$; entonces, la ecuación de la recta asíntota será:

$$y = cx + d.$$

En la ecuación

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

se tiene:

$$c = \text{lím.} \frac{y}{x} = \text{lím.} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0, \text{ para } x = \pm \infty;$$

$$d = \text{lím. } y = \text{lím. } e^{\frac{1}{x}} = 1, \text{ para } x = \pm \infty;$$

entonces, la asíntota será: $y = 1$, que ya encontramos antes.

Más adelante, al estudiar la teoría relativa a la construcción de curvas dadas por una ecuación entera de la forma:

$$f(x, y) = o,$$

veremos también otro método para la determinación de las asíntotas, y que será aplicable a una ecuación algébrica de la forma: $y = f(x)$, después de volverla entera.

Ciertas curvas pueden también admitir una curva asintótica. Sea:

$$y = \frac{f_m(x)}{f_n(x)},$$

donde suponemos que $f_m(x)$ y $f_n(x)$ son polinomios enteros en x, de grados m y n respectivamente, además, $m > n + 2$, o: $m = n + p$, siendo p un número entero por lo menos igual a 2. Efectuando la división de la relación dada, tendremos:

$$(1) \quad y = \frac{f_m(x)}{f_n(x)} = f_p(x) + \frac{R(x)}{f_n(x)},$$

donde $f_p(x)$ es un polinomio entero en x, de grado p, y $R(x)$ es también entero, pero de un grado inferior a n. La curva dada por esta ecuación (1) admite a $f_p(x)$ como curva asintótica. En efecto, si construimos:

$$(2) \quad y_1 = f_p(x),$$

y consideramos la diferencia $y - y_1$ entre las ordenadas de dos puntos de estas dos curvas que tengan una misma abscisa x, dicha diferencia tiende hacia cero para $x = \pm \infty$, pues se tiene entre (1) y (2):

$$y - y_1 = \frac{R(x)}{f_n(x)},$$

fracción en la cual el grado del numerador es inferior al del denominador, y por consiguiente tiende hacia cero para $x = \pm \infty$.

Lo que quiere decir que las ramas infinitas de la curva (2) tienden a confundirse con ciertas otras de la curva (1).

Decimos entonces que la (2) es curva asintótica de la (1),

EJEMPLO. Construir la curva:

$$y = \frac{x^5}{x^3 - 1} = x^2 + \frac{x^2}{x^3 - 1}. \qquad \text{(Figura 7)}$$

Calculemos sus derivadas:

$$y' = \frac{5x^4 (x^3 - 1) - 3x^7}{(x^3 - 1)^2} = \frac{2x^7 - 5x^4}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^4 (2x^3 - 5)}{(x^3 - 1)^2};$$

$$y'' = \frac{(x^3 - 1)(14x^6 - 20x^3) + 6x^2 (5x^4 - 2x^7)}{(x^3 - 1)^3},$$

$$y'' = \frac{2x^3 (x^6 - 2x^3 + 10)}{(x^3 - 1)^3}.$$

La función y sus derivadas son definidas y continuas, para todo valor de x, menos para el que anula a cada denominador, $x = 1$. La paralela a oy: $x = 1$ (recta AA'), es una asíntota; y según la teoría que acabamos de exponer, la parábola: $y_1 = x^2$, de eje oy (representada con línea de puntos en la figura 7), es curva asintótica de la propuesta; en efecto, para $x = \pm \infty$, la diferencia:

$$y - y_1 = \frac{x^2}{x^3 - 1} = \frac{1}{x - \frac{1}{x^2}},$$

entre las ordenadas de una misma abscisa x, tiende hacia cero.

La curva pasa por el origen, y como y' se anula para $x = o$, es tangente en este punto al eje ox y a la parábola asintótica.

También y'' se anula para $x = o$.

Al estudiar la concavidad, observemos primeramente que el factor de y'',

$$x^6 - 2x^3 + 10,$$

es siempre positivo; en efecto, si hacemos: $z = x^3$, $z^2 = x^6$, dicho factor equivale al siguiente trimonio de 2o. grado en z:

$$z^2 - 2z + 10,$$

cuyas raíces son imaginarias y el coeficiente de z^2, positivo.

Luego, este trimonio es siempre positivo para todo valor de z, y por lo tanto, también lo será el factor considerado, para todo valor de x.

Sigamos investigando el signo de y'':

Para $x < o$, y'' es positiva, y la concavidad es hacia oy.

Para valores de x comprendidos entre o y 1, y'' es negativa y la concavidad es hacia oy'.

Para $x > 1$, y'' es positiva y la concavidad es hacia oy.

El origen es, pues, un punto de inflexión; el sentido de la concavidad de la curva cambia al atravesar este punto.

Para $x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, y' se anula pasando de valores negativos a positivos, y la función y pasa por un mínimo que es:

$$y = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{2} - 1} = 2\,\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{3}}}{3} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{6{,}25}$$

En la ecuación de la curva, la relación:

$$\frac{y}{x} = \frac{x^4}{x^3 - 1},$$

crede indefinidamente para $x = \pm \infty$; luego existe, además de la asíntota $x = 1$, una dirección asintótica doble, paralela a oy. En este caso se tiene:

$y = \infty$, para $x = \pm \infty$, y se dice que las asíntotas respectivas se han alejado hacia el infinito, y que la curva presenta dos ramas parabólicas en la dirección oy. (Toda parábola tiene dos ramas infinitas correspondientes a una dirección asintótica paralela a su eje de simetría).

El cuadro siguiente está formado con los siguientes valores de x:

$$-\infty,\ 0,\ 1,\ \sqrt[3]{\frac{5}{2}},\ +\infty.$$

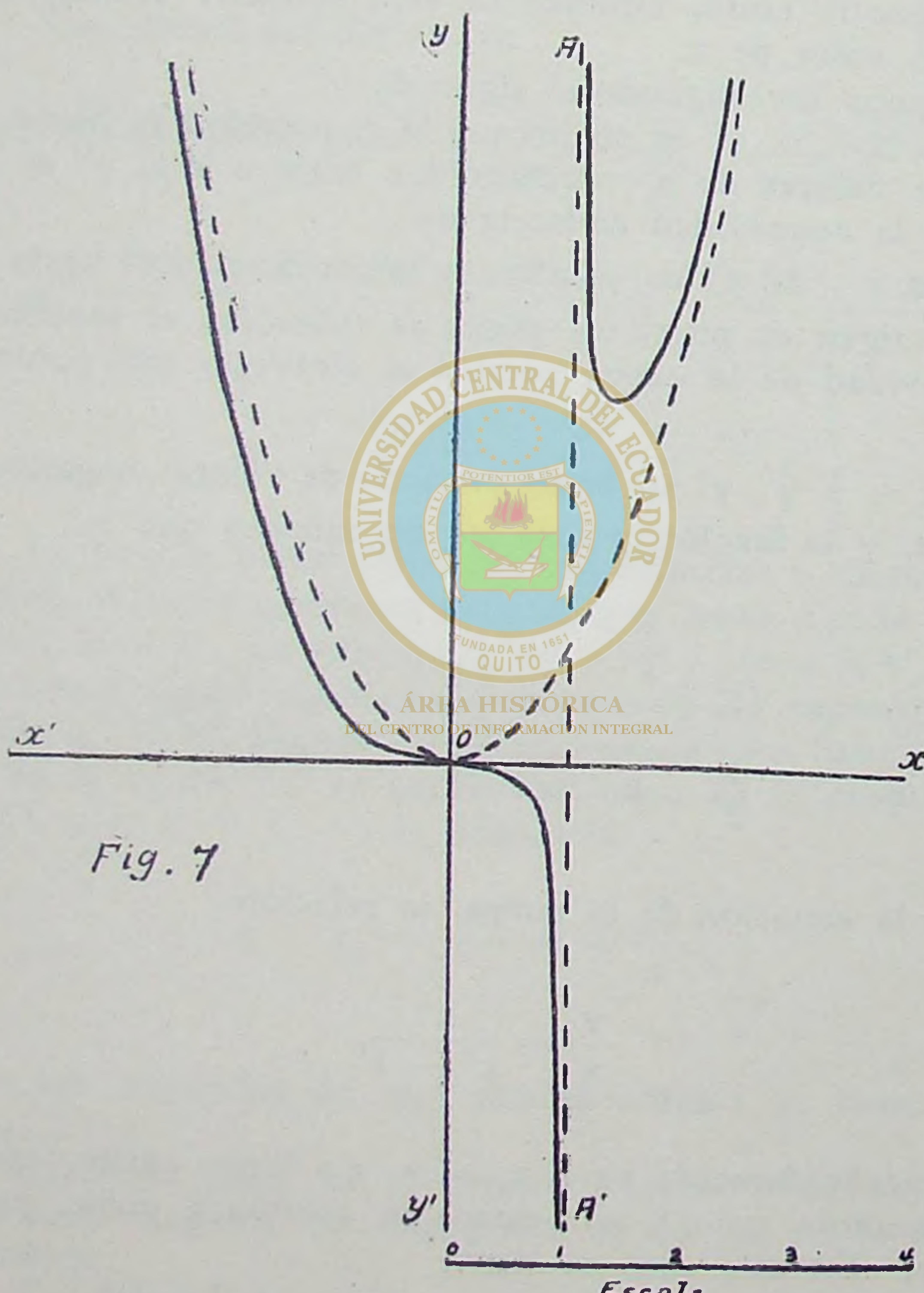


Fig. 7

x	y''	y'	y
$-\infty$		$-\infty$	∞
	$+$	crece, $-$	decrece, $+$
o	o	o, max.	o
	$-$	decrece, $-$	decrece, $-$
			$-\infty$
1			
		$-\infty$	$+\infty$
	$+$	crece, $-$	decrece, $+$
$\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$		o	$\frac{5}{3}\sqrt[3]{6{,}25}$, mínimo
	$+$	crece, $+$	crece, $+$
$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

II. Curva dada por una ecuación entera de la forma: f (x, y,) = o.

Cuando esta ecuación sea de fácil resolución con respecto a una de las coordenadas, por ejemplo *y*, podremos formar funciones explícitas, equivalentes en conjunto a la propuesta.

Por ejemplo, sea la ecuación de 2°. grado en *y:*

$$f(x, y) = y^2 (x - 1)(x - 2) - x^2 = o.$$

Resolviéndola, tendremos:

$$y = \frac{\pm\ x}{\sqrt{(x-1)\ (x-2)}};$$

o sean las dos funciones explícitas:

$$y_1 = \frac{x}{\sqrt{(x-1)\ (x-2)}}, \qquad y_2 = \frac{-\ x}{\sqrt{(x-1)\ (x-2)}},$$

cuyas curvas construimos en la figura 1. El conjunto de estas dos curvas representa la de la ecuación dada.

Para el caso en que no sea posible, o sea muy difícil, formar explícitamente las funciones y_1, $y_2, \ldots$ y_n, recurriremos a otros métodos para la construcción de la curva.

Recordemos que el coeficiente angular de la tangente, en un punto M $(x_0,\ y_0)$, de una curva $f\ (x,\ y) = o$, está dado por la relación:

$$y_0' = -\frac{f_x'\ (x_0,\ y_0)}{f_y'\ (x_0,\ y_0)},$$

siempre que las derivadas parciales no se anulen ambas a la vez para los valores x_0, y_0; entonces y_0' tendrá un valor finito o infinito, y M $(x_0,\ y_0)$ se llama punto ordinario.

Si y_0' toma la forma $\frac{o}{o}$, el punto M $(x_0,\ y_0)$ se llama *singular*.

La determinación de los puntos singulares de la curva se hará, pues, buscando los valores de x y de *y* que verifiquen las tres ecuaciones siguientes con dos incógnitas:

$$f\ (x,\ y) = o, \quad f_x'\ (x,\ y) = o, \quad f_y'\ (x,\ y) = o.$$

Las tangentes en estos puntos, buscaremos por otro método, cuya teoría no la podremos exponer claramente antes de recordar algo sobre las funciones homogéneas y algunas de sus propiedades, y sobre un haz de rectas que partan del origen, todo lo cual nos servirá también para la teoría de las asíntotas en esta clase de curvas.

Respecto a la concavidad e inflexión, la teoría expuesta anteriormente es aplicable a la curva $f(x, y) = o$, en todos los puntos ordinarios cuya tangente no sea paralela a oy. En este caso, siendo *y* función implícita de x, sus derivadas tendremos que calcular, como nos enseña el Análisis, por medio de las ecuaciones que forman las derivaciones sucesivas de la ecuación de la curva, o sean:

$$f'_x(x, y) + y' f'_y(x, y) = o,$$

$$f''_{x^2}(x, y) + 2y' f''_{xy}(x, y) + y'^2 f''_{y^2}(x, y) + y'' f'_y(x, y) = o,$$

....

Simetrias

Hemos dicho que para abreviar la construcción de una curva, debe averiguarse la simetría que presente.

I. Si en una curva $y = f(x)$, o $f(x, y) = o$, la ordenada *y* no cambia de valor con la transformación de x en $-x$, la curva es simétrica con relación al eje oy; pues a todo punto $M(x, y)$ corresponde su simétrico $M'(-x, y)$ con respecto a dicho eje.

Ejemplos: 1°. Las curvas: $y = \cos x$,

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

son simétricas con respecto al eje oy.

2°. Toda curva algébrica que no contenga en su ecuación sino potencias pares de x, es simétrica con relación al eje oy.

II. Si en una curva $y = f(x)$, o $f(x, y) = o$, la transformación de x en $-x$ trae consigo la de *y* en $-y$, la curva es simétrica con relación al origen; pues a todo punto $M(x, y)$ corresponde otro: $M'(-x, -y)$, simétrico del anterior con respecto al origen o.

Ejemplos. 1º. La curva $y = \operatorname{sen} x$ es simétrica con respecto a o.

2º. Toda curva algébrica en la cual todos sus términos sean, solamente de grado par, o sólo de un grado impar, tiene simetría con respecto a o. Están en este caso las curvas:

$$y = x^3, \quad Axy^3 + Bx^2y^2 + Cx^3y + Dx^2 + E = o.$$

(Obsérvese que una ecuación homogénea, cuyos términos sean sólo de grado impar, carece del término constante, y por consiguiente la curva respectiva pasa por el origen, que es centro de simetría y punto de inflexión).

En los casos I y II, para construír la curva se considerarán solamente los valores positivos de x, y se concluirá la construcción teniendo en cuenta la simetría.

III. Si una curva $f(x, y) = o$, contiene en su ecuación sólo potencias pares de *y*, la transformación de *y* en $-y$ no cambia el valor de x, y la curva es simétrica con respecto al eje ox.

Ejemplo. La curva ya construída en la figura 1, cuya ecuación vuelta entera es:

$$y^2 (x - 1) (x - 2) - x^2 = o.$$

En este último caso, para construír la curva se considerarán sólo los valores positivos de *y*, y se tomará en cuenta la simetría.

Funciones homogeneas.

Se dice que una función $f(x, y, \ldots)$ de varias variables es homogénea y de grado m, si se tiene:

$$(1) \qquad f(tx, ty, \ldots) \equiv t^m f(x, y, \ldots),$$

siendo t una cantidad cualquiera.

EJEMPLOS. La función:

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

es homogénea y de grado 2, pues, según la definición se tiene:

$$f(tx, ty) \equiv At^2x^2 + Bt^2xy + Ct^2y^2 \equiv t^2 f(x, y).$$

La función:

$$\frac{x}{y^3} - \frac{y}{x^3} = 0$$

es homogénea y de grado − 2.

Se ve fácilmente que:

1º. Si se multiplican entre sí varias funciones homogéneas, el producto será otra función homogénea de grado igual a la suma de los grados de las funciones.

2º. La potencia n de una función homogénea de grado m, es otra función homogénea de grado nm.

3º. Consideremos una función homogénea de grado m, y en la identidad (1) que nos sirve de definición hagamos $t = \frac{1}{x}$; tendremos:

$$\frac{f(x, y, \ldots\ldots)}{x^m} \equiv f\left(1, \frac{y}{x}, \ldots\ldots\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}, \ldots\ldots\right);$$

luego, una función homogénea de grado m, dividida por la potencia m de una de las variables, por ejemplo por x^m, da por resultado otra función que no depende sino de las relaciones de las otras variables a x.

HAZ DE RECTAS QUE PARTAN DEL ORIGEN.

En el plano, un haz o conjunto de m rectas que partan del origen está representado por una ecuación entera en x y *y*, homogénea y de grado m.

En efecto, sean las m rectas:

$$y - c_1 x = 0, \quad y - c_2 x = 0 \ldots\ldots, \quad y - c_m x = 0.$$

El producto de los primeros miembros nos da la siguiente ecuación entera en x y y, homogénea y de grado m:

$$(1) \quad (y - c_1 x)(y - c_2 x) \ldots\ldots (y - c_m x) = o,$$

y es evidente que, las coordenadas de todo punto que pertenezca a una de las rectas nulitarán a esta última ecuación, y las de los puntos que no pertenezcan a ninguna de éllas, no la nulitarán, puesto que no nulitan a ningún factor. Luego la ecuación (1) es la del conjunto de las m rectas.

De estas m rectas, si hay n que se confundan entre sí con el coeficiente angular c_1, en la ecuación (1) se presentará un factor: $(y - c_1 x)^n$, con el cual el enunciado subsiste. Igualmente, si entre las m rectas hay n de ellas que se confunden con oy, en la ecuación (1) se presentará el factor: x^n, con el cual queda siempre entera, homogénea y de grado m.

Probemos la proposición recíproca: Una ecuación entera en x y y, homogénea y de grado m, representa un haz de m rectas, distintas o confundidas, reales o imaginarias, que parten del origen.

En efecto, ordenando la ecuación considerada según las potencias decrecientes de y, será:

$$(2) \quad f(x, y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} x + A_2 y^{m-2} x^2 + \ldots + A_m x^m = o.$$

Supongamos primero que el coeficiente de y^m no sea nulo. En esta ecuación, para x = o, se tendrá y = o, solución que corresponde al origen. Si con cualquier otro valor de x, dividimos ambos miembros de (2) por x^m, tendremos:

$$(3) \qquad A_0 \left(\frac{y}{x}\right)^m + A_1 \left(\frac{y}{x}\right)^{m-1} + \ldots\ldots + A_m = o.$$

Considerando a $\frac{y}{x}$ como si fuera una sola incógnita, la ecuación (3) de grado m tendrá m raíces, distintas o múltiples, reales o imaginarias, o sea, las siguientes soluciones:

$$\frac{y}{x} = c_1, \quad \frac{y}{x} = c_2, \ldots\ldots \frac{y}{x} = c_m,$$

en las que cada una representa una recta que pasa por el origen.

Si en la ecuación (2), $A_0 = o$, $A_1 \neq o$, sacando x en factor y dividiendo ambos miembros por x^{m-1}, tendremos:

$$(4) \qquad x\left[A_1\left(\frac{y}{x}\right)^{m-1} + A_2\left(\frac{y}{x}\right)^{m-2} + \ldots\ldots + A_m\right] = o,$$

ecuación cuyo primer miembro se descompone en estas dos: $x = o$, o sea el eje oy, y el factor entre corchetes que representa, según lo que acabamos de ver, m-1 rectas distintas de oy y que parten del origen.

Si $A_0 = A_1 = o$, se sacará x^2 en factor que representará dos rectas confundidas con oy; y así sucesivamente. Queda pues probada la proposición recíproca.

Observemos que los coeficiente angulares y finitos de las rectas están dados por las raíces de la ecuación (3) en $\frac{y}{x}$, y si el haz tiene una o varias rectas que se confundan con oy, el primer factor x^n de una ecuación de la forma (4) representará dichas rectas de coeficiente angular infinito.

Por lo visto, si en la ecuación (2) del haz de rectas sustituímos x por 1 y y por c, las raíces de la ecuación resultante en c:

$$f(1, c) = o,$$

serán los coeficientes angulares finitos: c_1, c_2, ... c_m de dichas rectas. En el caso de que una de estas raíces c_1 sea imaginaria, tendremos:

$$c_1 = \frac{y}{x} = a + bi, \text{ o sea:}$$

$$y = (a + bi)\,x,$$

y la recta correspondiente es imaginaria.

Tangentes en los puntos singulares de una curva de ecuación entera: $f(x, y) = o$.

Hemos visto cómo se determinan estos puntos; ahora, para determinar también las tangentes en cada uno de ellos, traslademos previamente el origen de coordenadas al punto singular considerado y apliquemos la regla dada por el siguiente teorema:

Si una curva de ecuación entera $f(x, y) = o$ pasa por el origen, ella admite en este punto una o varias tangentes, reales o imaginarias, distintas o confundidas. El haz de tangentes está representado por el grupo de términos de menor grado, igualado a cero, de la ecuación de la curva.

En efecto, la curva carece del término constante, y agrupando los términos que tengan un mismo grado en funciones separadas señaladas con índices n, $n + 1$, ... de su respectivo grado, tendremos:

$$(1) \qquad f(x, y) \equiv f_n(x, y) + f_{n+1}(x, y) + \ldots\ldots + f_m(x, y) = o.$$

Como la curva pasa por el origen, el coeficiente angular c de la tangente en este punto será el límite de la relación $\frac{y}{x}$ cuando x tiende hacia cero, en la ecuación de la curva.

Sea, pues, la relación variable:

$$\frac{y}{x} = c',$$

en la que c' tiende hacia c cuando x tiende hacia cero.

Tendremos: $y = c'x$, que sustituyendo en la (1) nos dá:

$$(2) \qquad f(x, c'x) \equiv f_n(x, c'x) + f_{n+1}(x, c'x) + \ldots\ldots + f_m(x, c'x) = o.$$

La función homogénea y de grado n, f_n, multiplicada y dividida al mismo tiempo por x^n se hace:

$$\frac{x^n f_n(x, c' x)}{x^n} \equiv x^n f_n(1, c')$$

(Véase lo sentado sobre funciones homogéneas, 3.º).

Transformando de una manera análoga las demás funciones de la ecuación (2), esta se vuelve:

$$f(x, c' x) \equiv x^n f_n(1, c') + x^{n+1} f_{n+1}(1, c') + \ldots\ldots +$$

$$+ x^m f_m(1, c') = o,$$

que dividiéndola por x^n:

$$(3) \qquad f_n(1, c') + x f_{n+1}(1, c') + \ldots\ldots + x^{m-n} f_m(1, c') = o.$$

Cuando x tiende hacia cero, el límite de la ecuación (3) será:

$$(4) \qquad f_n(1, c) = o,$$

ecuación en c cuyas raíces reales o imaginarias, distintas o múltiples, son los coeficientes angulares de las tangentes respectivas, coeficientes que corresponden a la ecuación del haz de rectas:

$$(5) \qquad f_n(x, y) = o;$$

con lo cual queda sentado la legitimidad de la regla dada.

Observación: La ecuación (4) no da los coeficientes angulares infinitos, los cuales se deducen de la ecuación (5), como hemos visto en la teoría del haz de rectas.

Ejemplo. Volvamos a tomar la curva de la figura 1, cuya ecuación vuelta entera es:

$$(a) \qquad f(x, y) \equiv y^2 (x - 1)(x - 2) - x^2 = o.$$

Para determinar los puntos singulares que pueda tener, calculemos sus derivadas parciales que igualaremos a cero:

$$\text{(b)} \qquad f'_x(x, y) = y^2 (2x - 3) - 2x = 0,$$

$$\text{(c)} \qquad f'_y(x, y) = 2(x - 1)(x - 2) y = 0,$$

y busquemos las soluciones comunes a (a), (b) y (c). Las de (c) son:

$$x = 1\,,\ x = 2\,,\ y = 0,$$

de las cuales, las dos primeras no verifican a las ecuaciones (a) y (b), pero la tercera, $y = 0$, sí las verifica, dando cero como valor correspondiente de x; luego, el origen es el único punto singular de la curva. Para determinar las tangentes en este punto, apliquemos la regla dada por el teorema anterior. El grupo de términos de menor grado de la ecuación (a), igualado a cero nos dá:

$$2y^2 - x^2 = 0,$$

que es la ecuación del haz de tangentes, o sea:

$$y = \pm \frac{x}{\sqrt{2}}\,;$$

con lo que vemos que la curva admite en el origen dos tangentes, cuyos coeficientes angulares son respectivamente:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

A este punto singular se lo llama punto doble a tangentes distintas, pues, en este caso pasan por dicho punto dos ramas de curva.

Asíntotas de la curva dada por una ecuación entera:

$$f(x, y) = 0.$$

ASÍNTOTAS PARALELAS A OY. Se las determina por la regla siguiente: Las abscisas de las asíntotas paralelas a o y son las raíces del coeficiente de la mayor potencia de y (coeficiente que será un monomio o polinomio en x) de la ecuación de la curva.

En efecto, esta será:

$$f(x, y) = y^n f_0(x) + y^{n-1} f_1(x) + \ldots\ldots + f_n(x) = 0,$$

y dividiéndola por y^n:

$$f_0(x) + \frac{1}{y} f_1(x) + \ldots\ldots + \frac{1}{y^n} f^n(x) = 0.$$

En esta última ecuación para que y alcance un valor infinito se requiere que:

$$f_0(x) = 0,$$

cuyas raíces serán las abscisas de las asíntotas buscadas.

EJEMPLO. Tomemos el mismo anterior, donde se tiene que las raíces del coeficiente de la mayor potencia de y son:

$$x = 1, \qquad x = 2,$$

abscisas de asíntotas ya encontradas.

ASÍNTOTAS NO PARALELAS A OY.

Vamos primeramente a determinar las direcciones asintóticas de la curva. y después de conocidas éstas, la ordenada en el origen para cada asíntota.

1°. *Teorema:* El haz de rectas que parten del origen, daralelas respectivamente a las direcciones asintóticas que tenga una curva, dada por una ecuación entera, está representado por el grupo de términos de mayor grado, igualado a cero, de dicha ecuación.

En efecto, la ecuación de la curva puede escribirse en grupos homogéneos de grados m, m-1, m-2, ...0, en la forma que sigue:

$$(1) \qquad f(x, y) = f_m(x, y) + f_{m-1}(x, y) + \ldots\ldots + \text{Cte.} = o.$$

Si multiplicamos y dividimos al mismo tiempo cada uno de estos grupos respectivamente por x^m, x^{m-1},......x, la ecuación (1) se transforma en la siguiente:

$$(2) \qquad x^m f_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots\ldots + \text{Cte.} = o.$$

(Véase lo dicho sobre funciones homogéneas, 3°.)

Sabemos que el límite de la relación $\frac{y}{x}$, para $x = \infty$, es el coeficiente angular c de una asíntota.

Sea pues la relación variable:

$$\frac{y}{x} = c',$$

en la que c' tiende hacia c cuando x tiende hacia el infinito. Entonces, la ecuación (2) después de dividirla por x^m se hace:

$$(3) \qquad f_m(1, c') + \frac{1}{x} f_{m-1}(1, c') + \frac{1}{x^2} f_{m-2}(1, c') + \ldots + \frac{\text{Cte}}{x^m} = o$$

Cuando x tiende hacia el infinito, el límite de la ecuación (3) será:

$$(4) \qquad f_m(1, c) = o,$$

ecuación en c cuyas raíces reales o imaginarias, distintas o múltiples, son los coeficientes angulares de las asíntotas respectivas, coeficientes que corresponden a la ecuación del haz de rectas:

$$(5) \qquad f_m(x, y) = o.$$

Observación: La ecuación (4) no da los coeficientes angulares infinitos, los cuales se deducen de la ecuación (5) conforme hemos visto en la teoría del haz de rectas.

2º. Conocidos ya los coeficientes angulares de las asíntotas, vamos a determinar la ordenada en el origen para cada una, por el siguiente método:

Siendo d la ordenada en el origen de la asíntota de coeficiente angular c, ésta tiene por ecuación:

$$(1) \qquad y = cx + d.$$

Cortemos la curva dada, f (x, y) = o, con la recta (1), buscando la condición para que por lo menos un punto de intersección se encuentre en el infinito.

Tendremos:

$$f(x, cx + d) = o,$$

ecuación en x que ordenada según las potencias decrecientes toma la forma:

$$x^n P_0(d) + x^{n-1} P_1(d) + \ldots\ldots + P_n(d) = o,$$

y dividiéndola por x^n:

$$(2) \qquad P_0(d) + \frac{1}{x} P_1(d) + \ldots\ldots + \frac{P_n(d)}{x^n} = o.$$

Un punto de intersección se encontrará en el infinito, cuando su abscisa sea infinita; entonces, el límite de la ecuación (2) para $x = \infty$ será:

$$(3) \qquad P_0(d) = o,$$

polinomio o expresión en d, cuyas raíces serán las ordenadas en el origen correspondientes al coeficiente angular c.

Este método para determinar las asíntotas es muy eficaz, eficacia que no se consigue siempre al buscar el límite de las expresiones:

$$\frac{y}{x},\ y - cx,\ \text{para}\ x = \infty,$$

en las ecuaciones complicadas por el grado de la curva.

Ejemplo. Sea la curva:

$$f(x,\ y) \equiv y^3 (2x - 1) - x^4 + x^2 = o.$$

El coeficiente de la mayor potencia de *y* es:

$$2x - 1,$$

expresión que tiene por raíz:

$$x = \frac{1}{2},$$

o sea, la abscisa de la asíntota paralela a oy.

Para encontrar las demás asíntotas, igualemos a cero el grupo homogéneo:

$$\text{(a)} \qquad 2xy^3 - x^4 \equiv x(2y^3 - x^3) = o,$$

que representa el haz de direcciones asintóticas de la curva.

En este haz, la recta $x = o$, valor que verifica (a), corresponde a la dirección de la asíntota ya encontrada, $x = \frac{1}{2}$.

La otra expresión que verifica a la ecuación (a):

$$2y^3 - x^3 = o,$$

o sea:

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{2}},$$

corresponde a una dirección cuyo coeficiente angular es:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Si cortamos la curva dada con la recta:

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + d,$$

tendremos la siguiente ecuación que contiene las x de intersección:

$$\left(\frac{x}{\sqrt[3]{2}} + d\right)^3 (2x - 1) - x^4 + x^2 = o,$$

en la cual el coeficiente de la mayor potencia de x, igualado a cero como lo indica la regla, es:

$$P_0\,(d) = \frac{6\,d}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{2} = o;$$

entonces,

$$d = \frac{\sqrt[3]{4}}{12} = \frac{1}{6\sqrt[3]{2}};$$

luego, la asíntota buscada es:

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{6\sqrt[3]{2}}$$

Si nos fijamos en las condiciones de simetría que hemos dado, constataremos que esta curva no posee ninguna de ellas.

Calculemos las derivadas parciales para determinar los puntos singulares que tenga, igualándolas a cero.

(1) $f(x, y) = 2xy^3 - y^3 - x^4 + x^2 = 0$

(2) $f'_x(x, y) = 2y^3 - 4x^3 + 2x = 0$

(3) $f'_y(x, y) = y^2(6x - 3) = 0.$

Las dos soluciones de la ecuación (3) son:

$$y = 0, \quad x = \frac{1}{2},$$

de las cuales sólo la primera verifica a todas tres ecuaciones con el sistema de solución común:

$$y = 0, \qquad x = 0;$$

luego, el origen es el único punto singular de la curva representativa de la ecuación (1).

Como sabemos, las tangentes en este punto singular están representadas por el grupo homogéneo de menor grado, igualado a cero, o sea:

$$x^2 = 0,$$

haz de dos rectas confundidas con oy: en el origen van a parar dos ramas de la curva, admitiendo una tangente común y formando lo que se llama punto de retroceso de primera especie, en el cual la disposición de la curva es como indica la figura 8.

No la hemos concluído por no alargarnos demasiado y hacemos constar solamente que podríamos construírla, haciendo explícita la función *y* que nos da:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2(x^2 - 1)}{2x - 1}} = f(x),$$

y tomando en cuenta las determinaciones que dejamos hechas.

En general, para la representación gráfica de las expresiones:

$$y = f(x), \qquad o: \qquad f(x, y) = 0,$$

aplicaremos en lo posible toda la teoría que venimos dando.

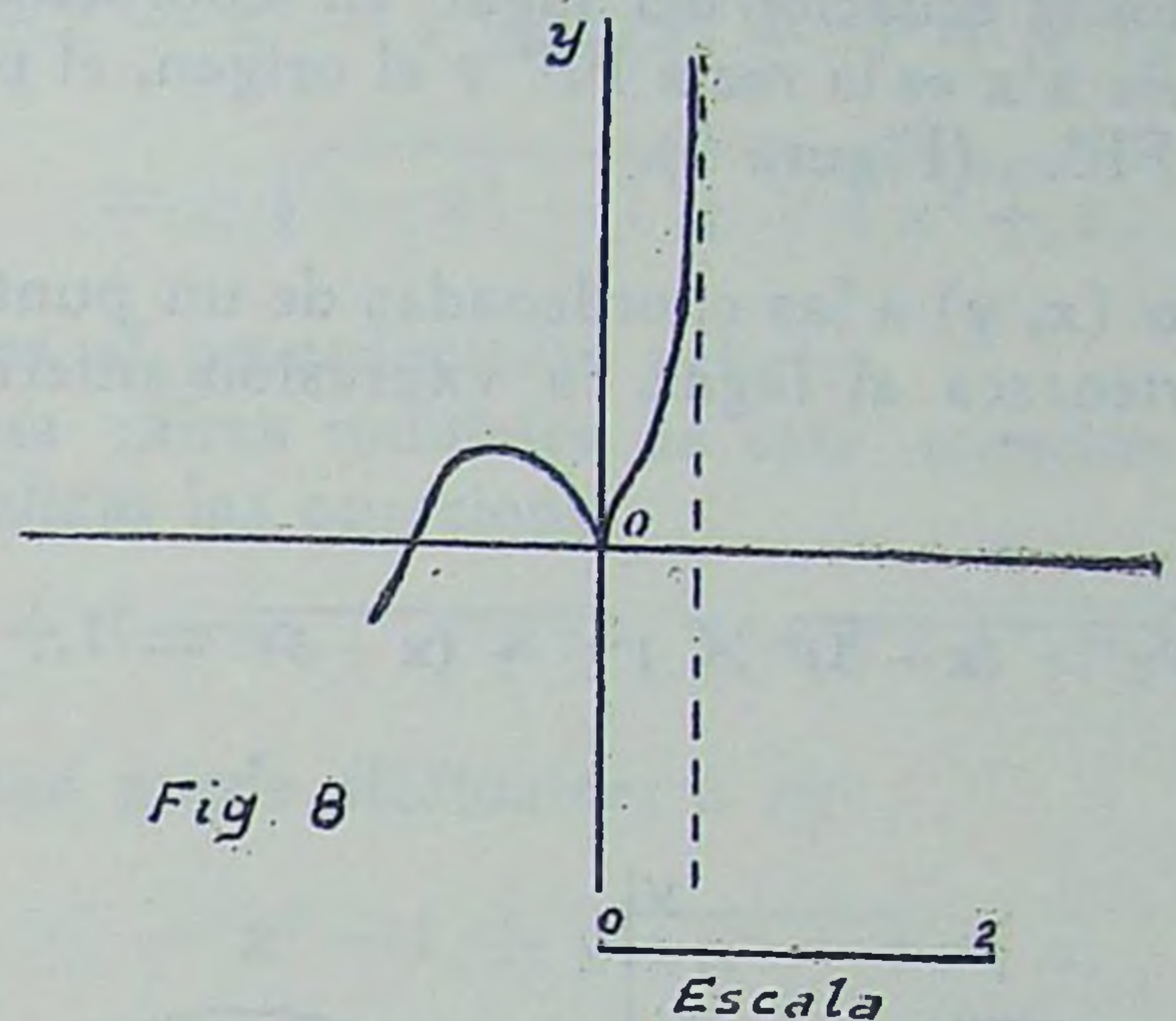


Fig. 8

Si la ecuación entera f (x, y) = o es de 2º. grado, o bicuadrada, con respecto a una de las coordenadas, por ejemplo *y*, resolviéndola se la puede discutir fácilmente, y para construir su curva, investigar lo siguiente:

1º. Los valores particulares de x para los cuales la ecuación, cuya incógnita considerada es *y*, admita raíces múltiples.

2º. Los valores particulares de x para los cuales admita raíces infinitas. Según vimos en las asíntotas, estos valores son los que anulan el coeficiente de la mayor potencia de *y* en la ecuación de la curva.

3º. Los valores de x para los cuales la derivada y' toma un valor infinito o nulo, y aquellos quo correspondan a y = o. En una ecuación f (x, y) = o, si hacemos y = o, el conjunto de términos que no tengan *y* será igual a cero.

Los valores así encontrados de x, ordenados de $-\infty$ a $+\infty$, darán ciertos intervalos dentro de los cuales buscaremos las diferentes determinaciones reales de *y*, como también las que corresponden a la extremidad de cada intervalo.

EJEMPLO: Dados dos puntos fijos F y F' cuya distancia es igual a 2, construir la curva, lugar geométrico de los puntos M para los cuales se tenga:

$$\overline{MF} \times \overline{MF'} = 1$$

Busquemos la ecuación del lugar en coordenadas rectangulares cuyo eje x'x es la recta FF' y el origen, el punto medio del segmento FF'. (Figura 9).

Llamando (x, y) a las coordenadas de un punto cualquiera M que pertenezca al lugar, la expresión anterior se convierte en:

$$\sqrt{y^2 + (x - 1)^2} \times \sqrt{y^2 + (x + 1)^2} = 1,$$

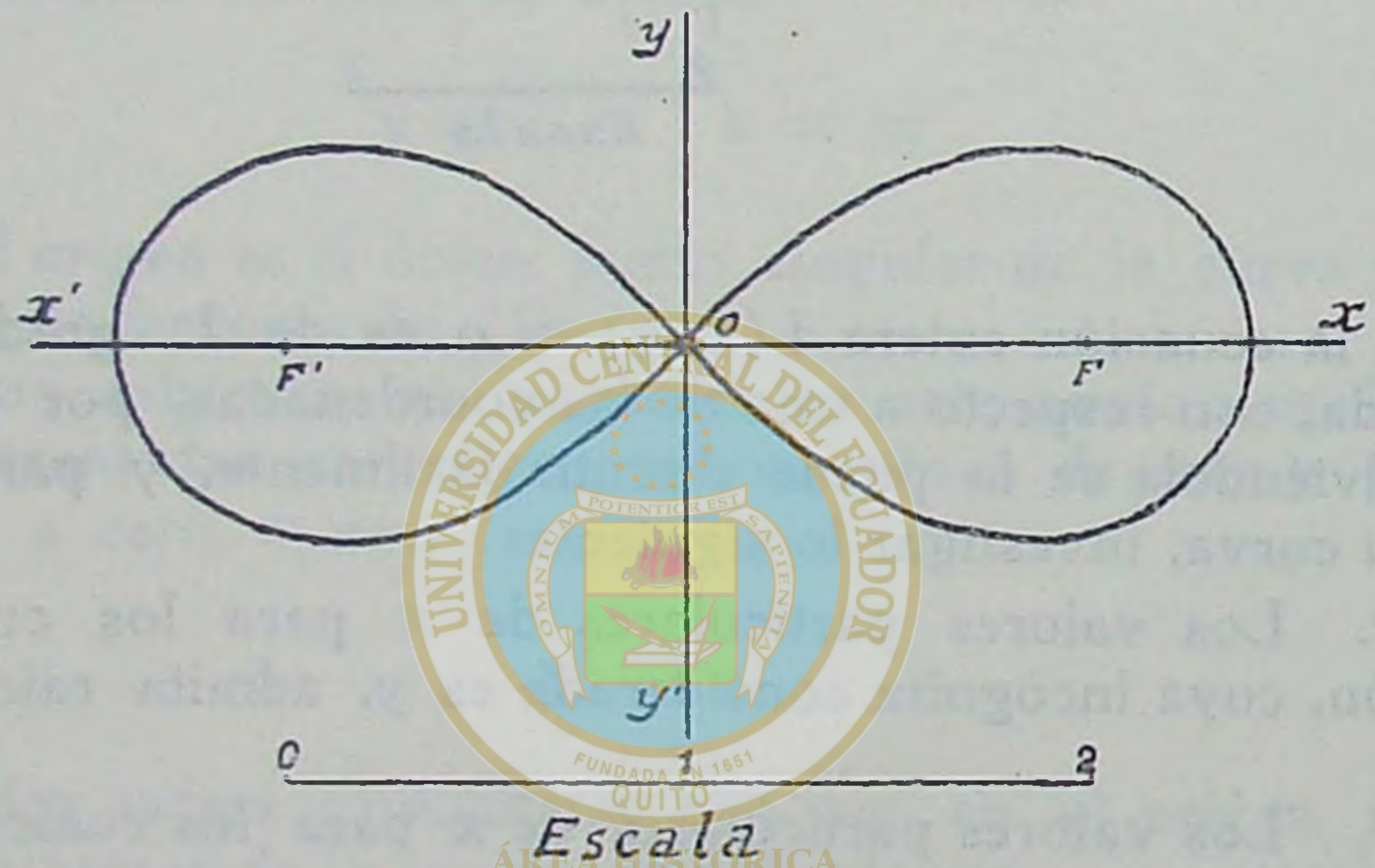


Fig. 9

o sea:

$$[y^2 + (x - 1)^2]\,[y^2 + (x + 1)^2] = 1,$$

y ordenando con relación a y:

$$(1) \qquad y^4 + 2y^2\,(x^2 + 1) + x^4 - 2x^2 = 0.$$

Notamos que esta ecuación contiene solamente potencias pares de x y de *y;* luego, su curva es simétrica con respecto a cada uno de los ejes coordenados y al origen. Resolviéndola con relación a y tendremos:

$$y = \pm\sqrt{-x^2 - 1 \pm \sqrt{(x^2+1)^2 + x^2(2-x^2)}}$$

$$= \pm\sqrt{-x^2 - 1 \pm \sqrt{4x^2+1}}.$$

Sigamos el procedimiento anterior.

1º. Las raíces múltiples de esta ecuación serían si se pudieran realizar las ecuaciones:

$$4x^2 + 1 = 0, \quad -x^2 - 1 - \sqrt{4x^2+1} = 0,$$

lo cual nunca puede efectuarse; o si:

$$-x^2 - 1 + \sqrt{4x^2+1} = 0,$$

que equivale a la condición:

$$4x^2 + 1 = (x^2+1)^2,$$

o sea:

$$x^4 - 2x^2 = x^2(x^2-2) = 0,$$

cuyas raíces son: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$.

2º. Como el coeficiente de y^4 en la ecuación (1) es la unidad, no existen raíces infinitas en y.

3º. Calculemos y' derivando de la ecuación (1):

$$y' = -\frac{f'_x\ (x, y)}{f'_y\ (x, y)} = -\frac{4x(y^2+x^2-1)}{4y(y^2+x^2+1)} = -$$

$$= -\frac{x(x^2+y^2-1)}{y(x^2+y^2+1)}.$$

Con el valor $x = 0$ que anula al numerador de y', la ecuación (1) no admite otra solución que $y = 0$, la cual es la única que anula también al denominador; vemos que el orígen es un punto singular de la curva. y' se hace ∞ para $y = 0$, que en la ecuación (1) corresponde a las soluciones

$$x = \pm\sqrt{2}.$$

Se anula y' junto con la expresión $x^2 + y^2 - 1$, como factor; luego, en los puntos de intersección de la curva (1) con la circunferencia.

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 1 = o,$$

de radio $\overline{oF} = 1$, la tangente es paralela a o x. Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) determinaremos dichos puntos; esta resolución nos dá:

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \; y = \pm \frac{1}{2}.$$

Los valores de x que corresponden a y = o, los hemos determinado ya.

Tomando en cuenta la simetría de la curva, es suficiente considerar solo los valores positivos que hemos encontrado de x; estos son:

$$o, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}, + \infty,$$

y vamos a buscar las determinaciones de *y* cuando x varía dentro de cada intervalo.

Si en la ecuación (1) hacemos:
$y^2 = z$, $y^4 = z^2$, tendremos una ecuación de 2º grado en z, y con cuyas raíces reales z_1 y z_2 habrá las siguientes igualdades:

$$z_1 + z_2 = - 2 (x^2 + 1) < o,$$

$$z_1 z_2 = x^2 (x^2 - 2).$$

El producto $z_1 z_2$ será negativo si $x < \sqrt{2}$, entonces en la suma $z_1 + z_2$, una de las raíces será positiva y la otra, de mayor valor absoluto, negativa; luego, en el intervalo de la variación de x $(o, \sqrt{2})$ solamente la raíz positiva de z determinará valores reales de y:

$$y = \pm \sqrt{z}.$$

El producto $z_1 z_2$ será positivo si $x > \sqrt{2}$, entonces z_1 y z_2 son de valor negativo y no determinan ningún valor real de y.

Luego, la curva se encuentra encerrada entre las dos paralelas a o y, $x = \pm \sqrt{2}$, y entre las dos paralelas a o x,

$$y = \pm \frac{1}{2}.$$

Nos falta solo que determinar las tangentes en el punto singular encontrado, las que están representadas por el grupo homogéneo de menor grado de la ecuación (1), igualado a cero:

$$2y^2 - 2x^2 = o, \text{ o sea: } y = \pm x,$$

primera y segunda bisectriz.

El orígen, centro de simetría, es pues un punto doble, a tangentes distintas, y un punto de inflexión común para ambas ramas.

La superficie engendrada por la revolución de esta curva alrededor del eje $x' x$, será en el espacio, el lugar de los puntos M para los cuales se tenga:

$$\overline{MF} \times \overline{MF'} = 1.$$

En la ecuación (1) encontramos que el grupo homogéneo de términos de mayor grado igualado a cero,

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = o,$$

haz de las direcciones asintóticas de la curva, representa cuatro rectas imaginarias.

Procedimiento para construír una curva cuya ecuación de grado m, f (x, y) = o,

es de difícil resolución con respecto a cualquiera de las coordenadas.

Primer método. Ante todo se buscará las direcciones asintóticas de la curva. Si cortamos a esta por medio de una recta variable y paralela a una dirección asintótica encontrada, se podrá determinar todos los puntos que se quiera de la curva, por sus intersecciones con dicha recta.

Sea la recta secante:

$$y = c\,x + d\,, \qquad (1)$$

en la que c es el coeficiente angular de una asíntota a la curva, y d un parámetro arbitrario. Las x de intersección están dadas por la ecuación:

$$f\,(x,\ c\,x + d) = 0\,, \qquad (2)$$

cuyo grado es siempre inferior al de la curva, puesto que para determinar las asíntotas hemos hecho, en su ecuación, que el grupo de términos de mayor grado m sea igual a cero, o sea:

$$f_m\,(x,\ y) = 0\,,$$

y c está dado por

$$f_m\,(1,\ c) = 0\,,$$

mientras que el grupo de grado m de la ecuación (2) sería:

$$f_m\,(x,\ c\,x) = x^m\,f_m\,(1,\ c)\,,$$

y entonces el coeficiente de x^m se nulita; con lo que el grado de la ecuación (2) es inferior a m. La discutiremos, si su grado se presta para ello, siguiendo el procedimiento que nos sirvió para la construcción de la curva anterior, o sea: buscar los valores particulares de d para los cuales la ecuación (2), cuya incógnita es x, admite raíces múltiples, infinitas o nulas.

Con estos valores de d formaremos intervalos de la variación de este parámetro, de $-\infty$ a $+\infty$, intervalos a los que corresponderán diversos arcos de la curva limitados por una o dos paralelas a la dirección asintótica, pues, las raíces múltiples de la ecuación (2) corresponden, bien a los puntos múltiples de la curva, que admiten dos o más tangentes distintas o confundidas, o bien a los puntos en los cuales la secante (1) se hace tangente a la curva. Las raíces alcanzan un valor infinito cuando la secante es una asíntota, y se nulitan cuando la curva atraviesa al eje o y; las primeras corresponden al valor de d con el cual se nulita el coeficiente de la mayor potencia de x en la ecuación (2), y las segundas, al valor de d que nulita el término independiente de x en la misma ecuación.

Segundo método. Si el grado de la ecuación (2) en el primer método no facilita su discusión, emplearemos este segundo método, análogo al anterior, pues, consiste en buscar las intersecciones de la curva con una recta variable que gira en el plano alrededor de un punto singular múltiple.

Por consiguiente, si el primer método no ha sido aplicable, se procederá a la determinación de los puntos singulares de la curva, y se escogerá, para el efecto, aquel en el cual la curva admita mayor número k de tangentes distintas o confundidas. Enseguida, se trasladará el orígen de coordenadas al punto escogido.

Sea la ecuación de la curva, relacionada al orígen escogido,

$$f(x, y) = o;$$

la secante variable tendrá por ecuación:

$$y = \gamma x, \qquad (1)$$

en la que γ es el parámetro arbitrario que nos sirve para determinar los puntos que se quiera de la curva, dados por sus intersecciones con dicha secante.

Las x de intersección están dadas por la ecuación:

$$f(x, \gamma x) = o,$$

o sea por:

$$x^k \varphi (x, \gamma) = o \qquad (2)$$

El grado de $\varphi (x, \gamma)$ en x será m — k si m es el grado de la curva y k el orden de multiplicidad del punto singular escogido ($m > k$); pues, una recta cualquiera corta a una curva de grado m a lo más en m puntos, reales o imaginarios, distintos o confundidos; y como la ecuación (2) tiene ya, en el primer factor x^k, k raíces de x que se nulitan, resulta que para el siguiente factor $\varphi (x, \gamma)$ quedarán a lo más m — k raíces, reales o imaginarias, distintas o múltiples; luego, el grado de $\varphi (x, \gamma)$ será $m - k$. Esta es la razón por la cual se aconseja escoger el punto en que k sea mayor, con lo cual se facilita la discusión de la ecuación (2), limitándose a hacerlo sólo con

$$\varphi (x, \gamma) = o, \qquad (3)$$

y siguiendo el mismo procedimiento del primer método, o sea, buscar los valores particulares de γ para los cuales la ecuación (3), cuya incógnita es x, admite raíces múltiples, infinitas o nulas.

De esta manera lograremos separar los diversos arcos de la curva dentro de ángulos conocidos que tienen su vértice en el origen.

Lo dicho vamos a aclarar con el siguiente ejemplo:

Construir la curva: (Fig. 10)

$$x^4 - x^2y + y^3 = o. \qquad (a)$$

Como vemos que el primer método no es aplicable, busquemos los puntos singulares que tenga la curva, conforme ya se sabe hacerlo, igualando a cero cada una de las derivadas parciales de la ecuación (a).

$$x (4x^2 - 2y) = o, \qquad (b)$$

$$3y^2 - x^2 = o \qquad (c)$$

El único sistema de solución común a las tres ecuaciones (a), (b) y (c) es: $x = o$, $y = o$, luego el origen es punto singular de la curva, en el cual admite las tangentes dadas por el grupo homogéneo de menor grado igualado a cero, o sea:

$$y^3 - yx^2 \equiv y (y^2 - x^2) = o,$$

haz que se descompone en las tres siguientes rectas:

$$y = o, \qquad y = x \text{ (1a. bisectriz)},$$

$$y = - x \text{ (2a. bisectriz)}.$$

La curva presenta en el origen un punto triple a tangentes distintas. Al cortarla por medio de la recta variable:

$$y = \gamma x,$$

tenemos la siguiente ecuación en x:

$$x^4 - \gamma x^3 + \gamma^3 x^3 \equiv x^3 (x - \gamma + \gamma^3) = o, \qquad (d)$$

que confirma lo dicho en la teoría respecto a m — k.

Discutamos la ecuación (d).

Igualando a cero su primer factor, es una solución que corresponde al origen. Las demás soluciones están dadas por:

$$\varphi (x, \gamma) = x - \gamma + \gamma^3 = o,$$

o sea:

$$x = \gamma (1 - \gamma^2), \qquad (e)$$

ecuación que, por ser de primer grado, no admite raíces múltiples; a cada valor de γ corresponde un solo valor para x y uno solo para *y*. Las raíces nulas corresponden a valores de γ iguales a los coeficientes angulares de las tangentes en el origen. En las raíces infinitas observamos que si γ tiende hacia el infinito por valores negativos, el punto de intersección correspondiente será $x = \infty$, $y = -\infty$; y si lo hace por valores positivos, tendremos $x = -\infty$, $y = -\infty$. Tomando en cuenta esto, y que las direcciones asintóticas de la curva son paralelas a oy, se deduce que ésta presenta dos ramas parabólicas en dicha dirección, siendo además las únicas ramas infinitas de la curva (ramas $\overset{\frown}{A'O}$ y $\overset{\frown}{AO}$), puesto que a cada valor finito que demos para γ, corresponde un solo valor finito para x y uno solo para *y*.

Busquemos en la ecuación (e) el máximo o mínimo de x.

$$x'_{\gamma} = 1 - 3\gamma^2 = o,$$

$$x''_{\gamma} = - 6 \gamma.$$

El máximo se tiene para

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

entonces

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \qquad y = \gamma x = \frac{2}{9}.$$

El mínimo se tiene para

$$\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

entonces

$$x = -\frac{2\sqrt{3}}{9}, \quad y = \gamma x = \frac{2}{9}.$$

Como la ecuación de la curva contiene sólo potencias pares de x, es simétrica con relación al eje oy, y para construirla estudiaremos solamente los valores positivos de x, que corresponden a la variación de γ dentro de los intervalos (o, 1) y ($-\infty$, 1), los cuales hemos deducido de la ecuación (e).

Para mayor precisión en la construcción de la curva, calculemos también el máximo o mínimo de *y*.

$$y = \gamma x = \gamma^2 - \gamma^4,$$

$$y'_{\gamma} = 2\gamma(1 - 2\gamma^2),$$

$$y''_{\gamma} = 2 - 12\gamma^2.$$

El máximo se tiene para

$$\gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

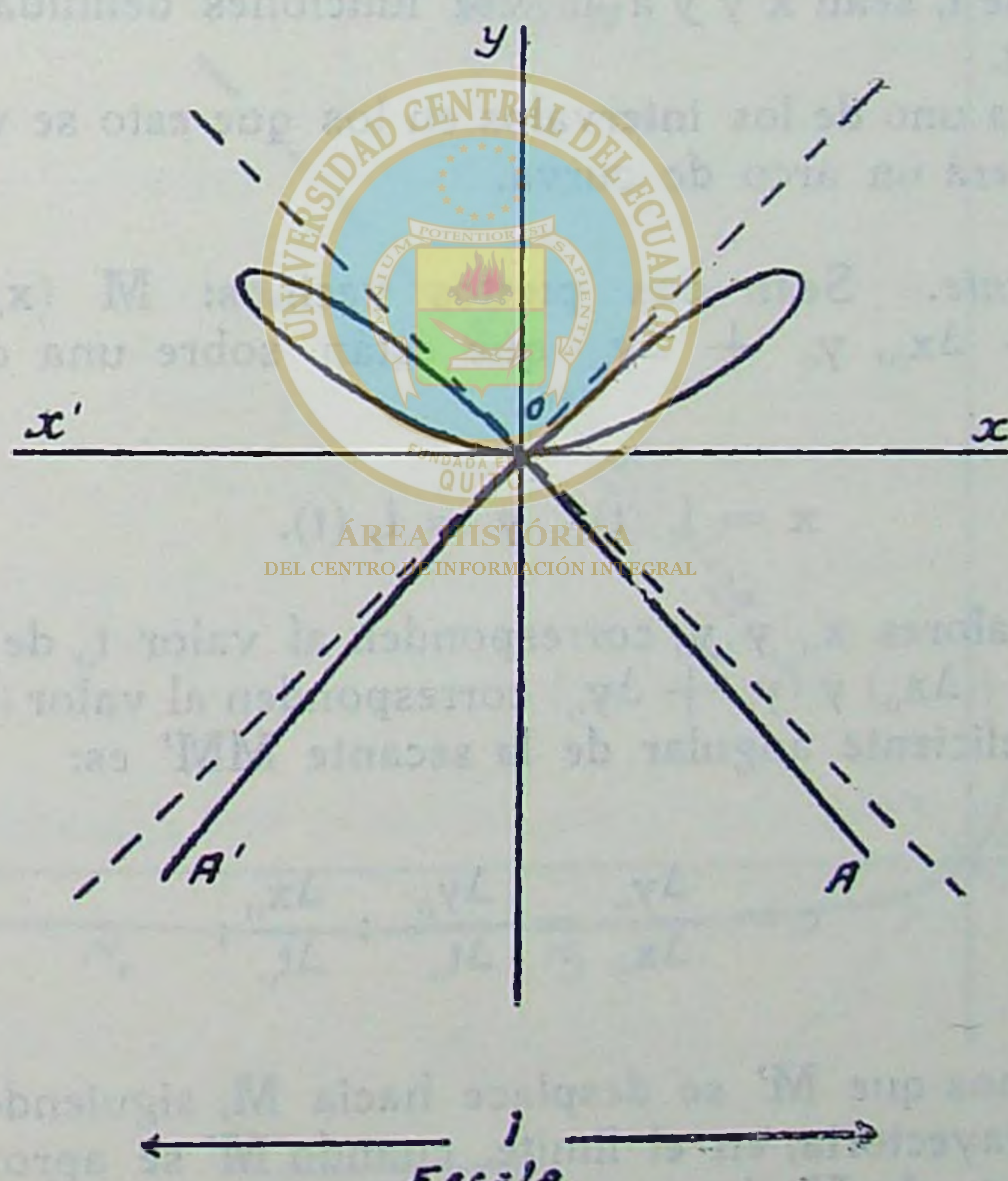
entonces

$$y = \frac{1}{4}, \qquad x = \frac{y}{\gamma} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

El mínimo se tiene para $\gamma = o$, entonces $y = o$, $x = o$.

Todas estas determinaciones nos sirven también para deducir el sentido de la concavidad de la curva, y facilitar más su construcción; así, en los puntos correspondientes al máximo o mínimo de x, la tangente es paralela al eje oy, y la curva tie-

Fig. 10



ne respectivamente su concavidad hacia ox' o hacia ox; y en los puntos que corresponden al máximo o mínimo de y, la tangente es paralela al eje ox, y la concavidad es respectivamente hacia oy' o hacia oy.

III. Curva definida por las ecuaciones

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t).$$

En estas ecuaciones, t es el parámetro variable que en Cinemática corresponde al tiempo. Eliminándolo, podríamos obtener ecuaciones de la forma: $y = f(x)$ o $f(x, y) = o$; pero esta eliminación no es necesaria, puesto que la construcción de la curva $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, es en sí muy fácil.

Cada una de estas funciones de un mismo parámetro t las estudiaremos como lo hicimos con la función $y = f(x)$; pero debe tenerse en cuenta que para que haya un arco de curva que a la vez represente la variación de estas dos funciones, se requiere que dentro del intervalo correspondiente (t_1, t_2) de la variación de t, sean x y y a la vez funciones definidas y continuas de t.

A cada uno de los intervalos en los que esto se verifique, corresponderá un arco de curva.

Tangente. Sean dos puntos vecinos: M (x_0, y_0) y M' $(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0)$ que están sobre una curva de ecuación:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t).$$

Los valores x_0 y y_0 corresponden al valor t_0 de t, y los valores $(x_0 + \Delta x_0)$ y $(y_0 + \Delta y_0)$ corresponden al valor $(t_0 + \Delta t_0)$

El coeficiente angular de la secante MM' es:

$$c = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{\Delta y_0}{\Delta t_0} : \frac{\Delta x_0}{\Delta t_0};$$

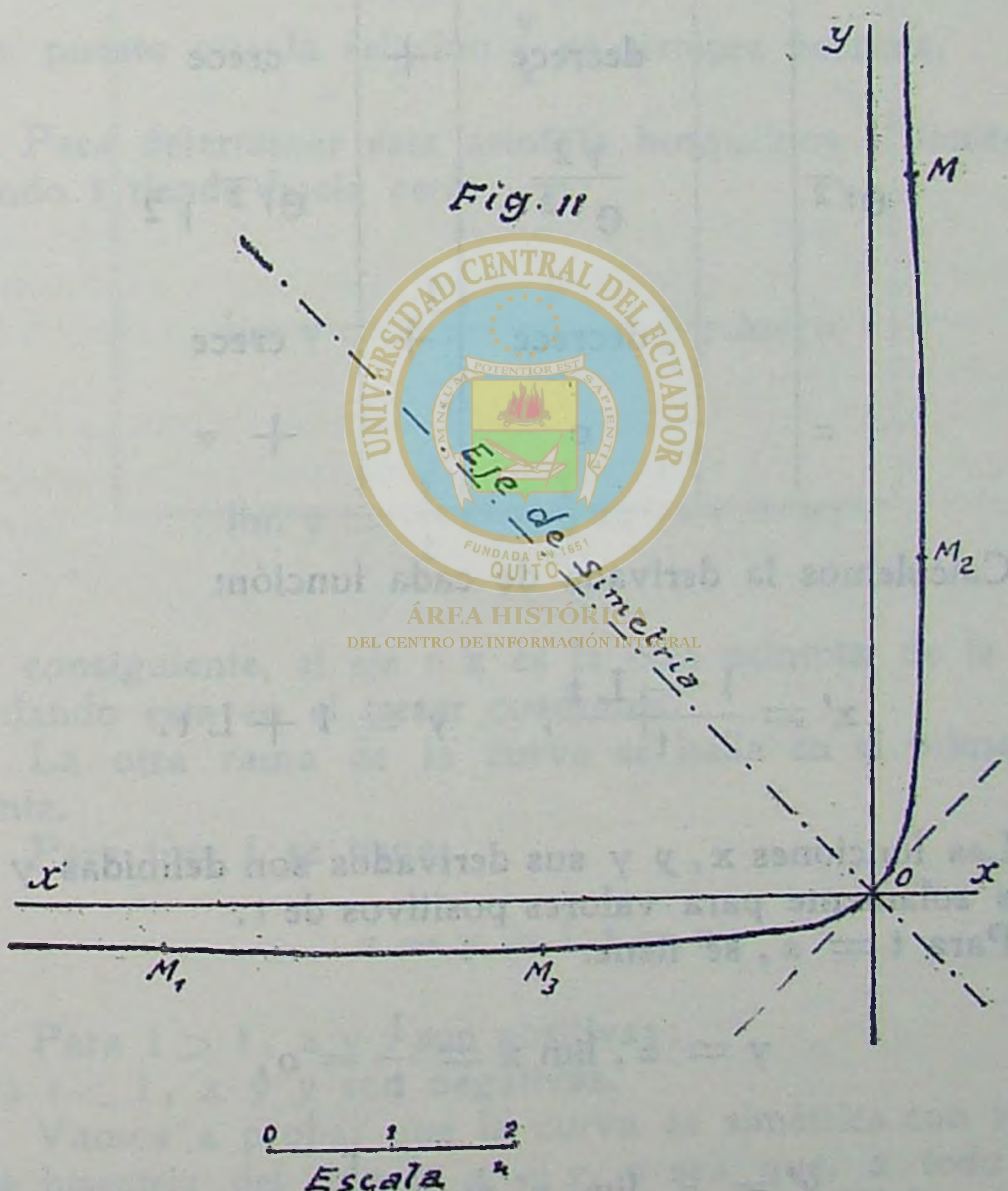
y si hacemos que M' se desplace hacia M, siguiendo la curva como trayectoria, en el límite, cuando M' se aproxima indefinidamente de M, la secante MM' es la tangente en M, cuyo coeficiente angular es el valor límite de c, o sea:

$$\text{lím. } c = \frac{dy_0}{dt_0} : \frac{dx_0}{dt_0} = \frac{(f'_2 t_0)}{f'_1(t_0)} = m.$$

Al construír la curva, discutiremos el valor de este coeficiente angular m y determinaremos el máximo o mínimo de x y de y, buscando los valores de t para los cuales se anule sólo el numerador o sólo el denominador de la expresión de m.

Para mayor concisión, en el ejemplo siguiente de construcción de esta clase de curvas, aplicaremos lo sentado antes en coordenadas rectangulares, indicando al mismo tiempo el procedimiento que debe seguirse.

Construír la curva (fig. 11):



$$x = \frac{Lt}{t}, \quad y = t\,L\,t. \quad \text{(J. Bocquet)}$$

t	x'	x	y'	y
1		o		o
	$+$	crece	$+$	crece
e	o	$\frac{1}{e}$		e
	$-$	decrece	$+$	crece
$e^{\sqrt{2}}$		$\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$		$e^{\sqrt{2}}\sqrt{2}$
	$-$	decrece	$+$	crece
$+\infty$		o		$+\infty$

Calculemos la derivada de cada función:

$$x' = \frac{1 - L\,t}{t^2}, \qquad y' = 1 + L\,t.$$

Las funciones x, y y sus derivados son definidas y continuas solamente para valores positivos de t.

Para $t = \infty$, se tiene:

$$y = \infty, \text{ lím } x = \frac{1}{t} = o,$$

$$y' = \infty, \text{ lím. } x' = -\frac{1}{2t^2} = o;$$

luego, el eje $o\,y$ es asíntota de la curva. Las demás asíntotas encontraremos buscando el límite de $\frac{y}{x}$ cuando x tiende al infinito, o sea, si nos fijamos en el valor de x, cuando t tiende hacia cero; entonces, $x = -\infty$,

$$\lim \frac{y}{x} = t^2 = o,$$

lo que significa que hay también una dirección asintótica paralela a o x, y que las ramas de la curva no pueden encontrarse o no existen sino en el primer cuadrante y en el tercero, puesto que la relación $\frac{y}{x}$ es siempre positiva.

Para determinar esta asíntota busquemos el límite de y cuando t tiende hacia cero:

$$\lim y = \frac{Lt}{\frac{1}{t}} = -\frac{\infty}{\infty}; \text{ luego,}$$

$$\lim y = \frac{1}{t} : \frac{-1}{t^2} = -t = o;$$

por consiguiente, el eje o x es la otra asíntota de la curva, quedando esta en el tercer cuadrante.

La otra rama de la curva se halla en el primer cuadrante.

Para $t = 1$ se tiene:

$$x = y = L\,t = o.$$

Para $t > 1$, x y y son positivas;
para $t < 1$, x y y son negativas.

Vamos a probar que la curva es simétrica con relación a la bisectriz del ángulo x' o y, o sea que, a todo punto M (x, y) de la curva corresponde su simétrico M' (— y, — x).

En efecto, un punto cualquiera M tiene por coordenadas:

$$x = \frac{Lt}{t}, \; y = t\,Lt,$$

siendo t un número positivo cualquiera. A todo valor de t corresponde su inverso $\frac{1}{t}$ con el cual se tiene:

$$x_1 = \frac{L\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}} = -\, t\, L\, t = -\, y\,,$$

$$y_1 = \frac{1}{t} L \left(\frac{1}{t}\right) = -\, \frac{L\,t}{t} = -\, x\,,$$

donde vemos que las coordenadas x_1, y_1 son las del punto simétrico de M con respecto a dicha bisectriz. Tomando en cuenta esto, estudiaremos la curva solamente con los valores de t mayores que la unidad.

Vimos ya que los puntos de inflexión de una curva correspondían a aquéllos en los cuales el coeficiente angular de la tangente pasaba por un máximo o un mínimo; luego, en el caso actual busquemos los valores de t en los que el coeficiente angular m sea un máximo o un mínimo:

$$m = \frac{y'}{x'} = \frac{t^2\,(1 + L\,t)}{1 - L\,t}\,,$$

su derivada con relación a t es:

$$m' = \frac{2\,t\,(2 - L^2\,t)}{(1 - L\,t)^2}\,,$$

la cual se anula cambiando de signo si $L^2\,t = 2$, o sea si

$$L t = \pm \sqrt{2}\,, \qquad t = e^{\pm\sqrt{2}}$$

Para $t = e^{\sqrt{2}}$, m pasa por un máximo, y el punto de inflexión correspondiente M tiene por coordenadas:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}, \qquad y = e^{\sqrt{2}} \sqrt{2}.$$

El otro punto de inflexión M_1 corresponde a

$$t = e^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}}$$

y es simétrico del anterior con respecto a la 2ª. bisectriz. Sus coordenadas son:

$$x_1 = -e^{\sqrt{2}} \sqrt{2}, \quad y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}.$$

Para $Lt = 1$, o sea para $t = e$, m toma un valor infinito, y el punto correspondiente es $M_2 \left(\frac{1}{e}, \quad e \right)$.

En este punto, la curva presenta su concavidad hacia ox', porque entonces el valor de x pasa por un máximo.

Para $t = \frac{1}{e}$ se tiene $m = 0$; entonces el valor de y pasa por un mínimo cuyo punto es $M_3 \left(-e, -\frac{1}{e} \right)$, simétrico de M_2.

En el punto M_3, la curva presenta su concavidad hacia oy.

Para construir la curva, tomamos en cuenta su simetría y formamos el cuadro que la acompaña con los siguientes valores encontrados de t, a partir de 1:

$$1, \quad e, \quad e^{\sqrt{2}} \quad + \infty .$$

Al estudiar el sentido de la concavidad de una curva $y = f(x)$, dedujimos que la tenía hacia oy o hacia oy' si y_x'' era de signo positivo o negativo respectivamente, es decir, si y_x' era función creciente o decreciente.

Para determinar en el caso actual la concavidad de la rama del primer cuadrante, examinemos comparativamente los signos de m' y de x':

$$m' \text{ es positivo si } t < e^{\sqrt{2}},$$

$$m' \text{ es negativo si } t > e^{\sqrt{2}},$$

$$x' \text{ es positivo si } t < e,$$

$$x' \text{ es negativo si } t > e.$$

Dentro de los siguientes intervalos de t:

$$(1, e) \text{ y } \left(e^{\sqrt{2}}, \infty\right),$$

m' y x' tienen el mismo signo; luego, m y x varían en el mismo sentido, con lo cual y'_x es una función creciente y la concavidad que presenta la curva es hacia oy.

Dentro del intervalo de $t\left(e, e^{\sqrt{2}}\right)$ sucede lo contrario.

Haciendo e = 2, 71828, el cálculo logarítmico nos ha dado:

$$e^{\sqrt{2}} = 4{,}1132, \qquad \frac{1}{e} = 0.36789,$$

$$e^{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 5{,}8168, \qquad \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} = 0{,}34383.$$

IV. Construcción de curvas en coordenadas polares

Con el mismo razonamiento que empleamos al principiar este estudio, veremos que si en la ecuación:

$$r = f(\omega), \qquad (1)$$

el radio vector r es función definida y continua del ángulo polar ω cuando éste varía dentro de cierto intervalo, existe en el plano un arco de curva representativa de la variación de la función en dicho intervalo.

El conjunto de todos estos arcos formará la curva de la ecuación (1), y los puntos de esta curva serán los únicos del plano cuyas coordenadas polares verifiquen dicha ecuación.

Por no alargarnos, al ejemplo siguiente acompañamos, en lo posible, la teoría y el procedimiento que debe seguirse en la construcción de esta clase de curvas.

Construir la curva (fig. 12):

ω	r
o	-1
	$-$
$\frac{\pi}{4}$	o
	$+$
$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$ / $-\infty$
	$-$
π	-1

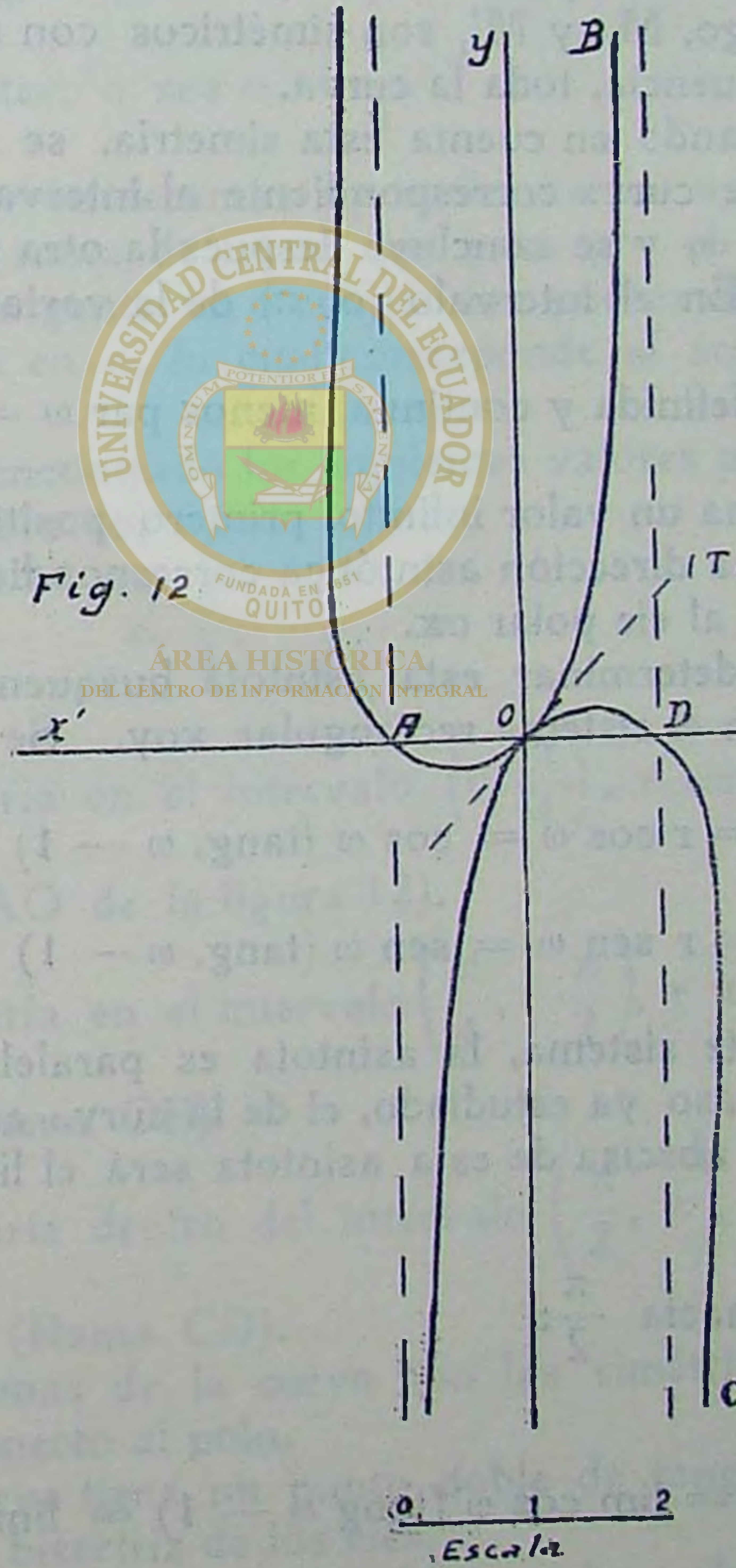


Fig. 12

$$r = \text{tangente}\ \omega - 1 = f(\omega).$$

1º. En esta ecuación vemos que si a cualquier valor ω_1, comprendido en el intervalo $(o, 2\pi)$, se lo añade un múltiplo cualquiera de 2π, o sea $2k\pi$, entonces el valor correspondiente de r no cambia; luego, para determinar todos los puntos de esta curva será suficiente hacer variar a ω en el intervalo $(o, 2\pi)$.

Además, al valor ω_1 de ω corresponde el punto M_1 cuyo radio vector es: $r_1 = \text{tang.}\ \omega_1 - 1$; y al valor $(\omega_1 + \pi)$ de ω corresponde otro punto M'_1 cuyo radio vector es igual al anterior; luego, M_1 y M'_1 son simétricos con relación al polo, y en consecuencia, toda la curva.

Tomando en cuenta esta simetría, se construye primero la parte de curva correspondiente al intervalo (o, π) de la variación de ω, y se concluye después la otra parte.

2º. En el intervalo (o, π) de la variación de ω, la función r es definida y continua, menos par $\omega = \frac{\pi}{2}$, valor con el cual r toma un valor infinito, primero positivo y después negativo. La dirección asintótica correspondiente es, pues, perpendicular al eje polar ox.

Para determinar esta asíntota busquemos la ecuación de la curva en el sistema rectangular xoy. Se tiene:

$$x = r \cos \omega = \cos \omega\ (\text{tang.}\ \omega - 1) = f_1\ (\omega),$$

$$y = r\ \text{sen}\ \omega = \text{sen}\ \omega\ (\text{tang.}\ \omega - 1) = f_2\ (\omega).$$

En este sistema, la asíntota es paralela a oy, y se presenta un caso ya estudiado, el de la curva anterior; por consiguiente, la abscisa de esta asíntota será el límite de x cuando ω tiende hacia $\frac{\pi}{2}$:

$$\text{lím}\ x = \text{lím} \cos \omega\ (\text{tang}\ \omega - 1) = \text{lím}\ \frac{\text{tang}\ \omega - 1}{\dfrac{1}{\cos \omega}}$$

luego,

$$\lim x = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 \omega}}{\dfrac{\operatorname{sen} \omega}{\cos^2 \omega}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} = 1.$$

3°. En el mismo intervalo (o, π), r se anula para $\omega = \frac{\pi}{4}$; luego, la curva pasa por el polo: en este caso, la tangente en o tiene por ángulo polar el mismo ángulo con el cual se anula el radio vector, o sea $\omega = \frac{\pi}{4}$.

En efecto, si consideramos un radio vector variable que sea secante a una rama de curva que pase por el polo, esta secante se hará tangente en o cuando los puntos de intersección se confundan en o, lo cual corresponde al ángulo polar dicho.

4°. Hemos encontrado los siguientes valores particulares de ω, en el intervalo (o, π):

$$o, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi.$$

Cuando ω varía en el intervalo $\left(o, \frac{\pi}{4}\right)$, r toma valores negativos (rama AO de la figura 12).

Cuando ω varía en el intervalo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, r toma valores positivos. (Rama OB).

Cuando ω varía dentro del intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, r toma valores negativos. (Rama CD).

Las otras ramas de la curva son las simétricas de las anteriores con respecto al polo.

En o, la curva tiene un punto doble de tangentes confundidas, primera bisectriz de los ejes.

Nos hemos servido de una tabla con los valores de las tangentes de los ángulos.