

Por el Profesor de Estática Gráfica de la Universidad Central, _____

X Sr. Ingeniero Dn. Abel S. Troya=====

X **Curso de Estática Gráfica**



ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

_____ (Conclusión)

CAPITULO XII

Armaduras de puentes

GENERALIDADES Y DEFINICIONES

126.—Se aplica sin reservas a las armaduras de puentes, todo lo que hemos dicho en el capítulo anterior relativo a las condiciones y características que deben reunir para que un sistema triangulado sea estrictamente indeformable.

A semejanza de las armaduras de techos, las de los puentes, se componen de un cierto número de barras rectas unidas en sus extremos, formando así un sistema de triángulos.

Se considerarán cargados los puntos de concurso de las barras, llamados *nudos*. Las diferentes barras estarán de tal manera conexionadas, que sus piezas soporten todas las presiones internas, a causa de las cargas que les son aplicadas que generalmente son verticales.

La diferencia entre vigas y armaduras estriba principalmente: en que en las primeras, a causa de la flexión producida por las cargas, las fibras de la viga se encorvan, produciéndose compresión en el un lado y tracción en el otro, y el cambio de longitud que resulta en cada fibra es proporcional a la distancia de ésta al eje neutro.

Mientras que en armaduras, las cargas que deben soportar, se las considera como divididas en partes, y que cada una de ellas actúa en los nudos y solamente siguiendo los centros de gravedad de las secciones transversales de las barras; de suerte que siempre trabajen longitudinalmente y no transversalmente, como lo hace una viga, distribuyéndose las

presiones uniformemente en cada una de las secciones transversales de las barras.

El mayor número de las armaduras en uso común, se componen de dos vigas largas, frecuentemente horizontales (*cordones*), que van de un apoyo al otro; unidas entre sí por barras inclinadas y verticales, que se las llama con el nombre genérico de *diagonales*.

Estas armaduras, de cordones paralelos, serán las únicas a que daremos atención en el presente capítulo; pues las de cordones inclinados las omitiremos, en vista de la magnitud del curso que nos hemos impuesto, y deberán consultarse en los tratados de puentes de hierro.

127.—Clasificación de las armaduras.

Se las divide, según las formas que adopten los cordones superior e inferior; de allí resultan dos grandes divisiones: I de cordones paralelos; II de cordones inclinados.

I. De cordones paralelos los tipos más empleados son:

1º. *Celosía tipo Warren*.—Está compuesta de triángulos isósceles fig. 132.

El cordón superior es *comprimido*, el inferior es *extendido* y las diagonales trabajan *alternativamente a compresión y tracción*.

2º. *Celosía tipo Pratt*.—En estas armaduras, se alternan las barras verticales y las diagonales. Pero las diagonales tendrán una sola inclinación a partir del centro de la armadura; de manera que para el observador colocado en la mitad, vea que al prolongarlas vienen a encontrarse bajo sus pies fig. 136.

Se consigue con esta disposición que los *montantes* estén sujetos a *compresión* y las diagonales a *tracción*.

El cordón superior trabaja a la *compresión* y el inferior a la *tracción*.

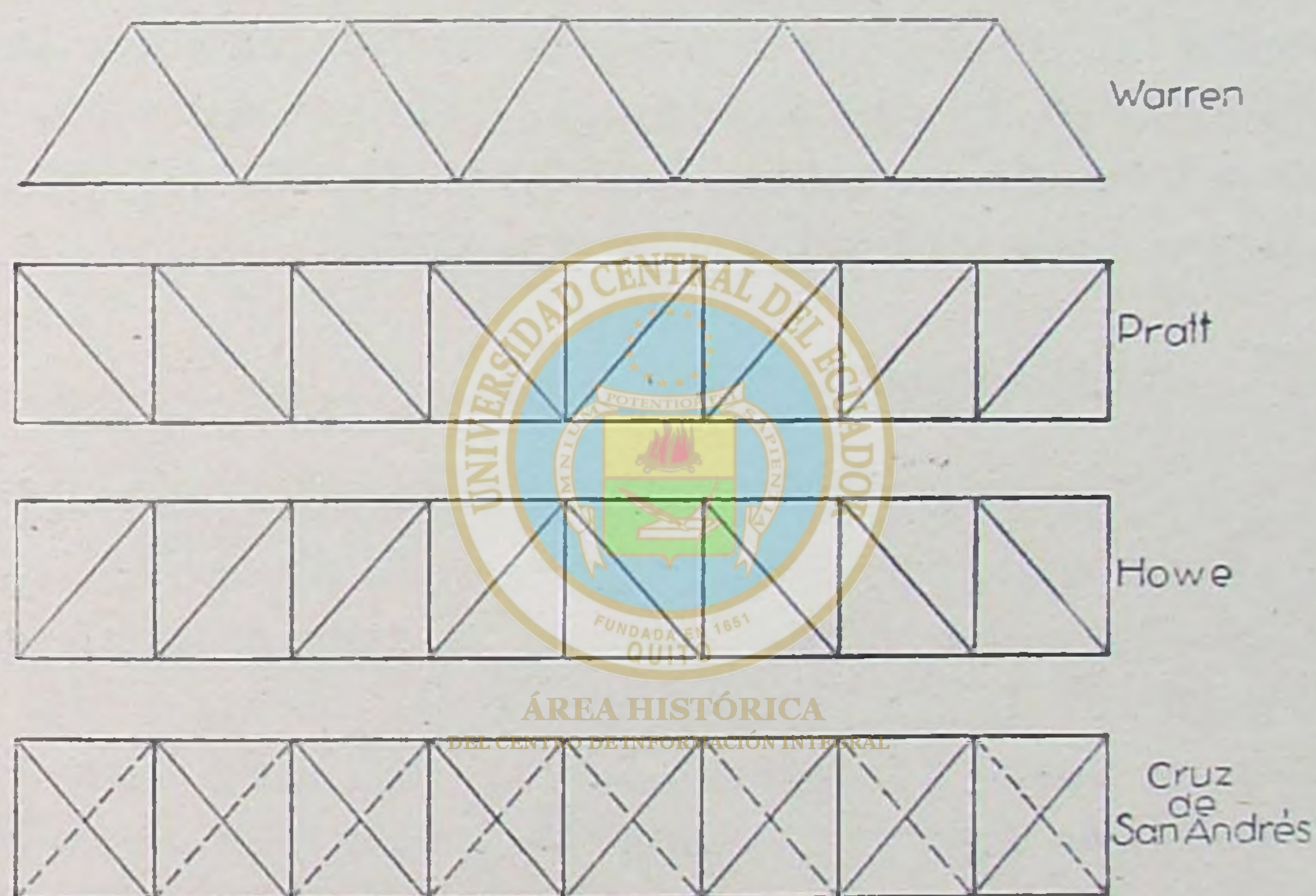
3º. *Celosía tipo Howe*.—En la fig. 137, se nota que es la disposición inversa de la armadura anterior.

Por esto resulta, que las barras verticales trabajan a la *tracción* y las diagonales a la *compresión*.

Esta armadura se la usa hoy sólo en la construcción de puentes con materiales mixtos, hierro y madera.

Los tipos 2º. y 3º. se les llama también con el nombre genérico de armaduras en N.

4º. *Celosía con Cruz de San Andrés.*—Esta armadura es una triangulación doble; se compone de la superposición de dos celosías simples. En efecto, en la fig. 138, se puede descomponer en dos otras: la una está representada con líneas llenas y la otra con líneas de puntos y resultan las armaduras exactamente iguales a las figs. 136 y 137. Las cargas dadas se dividirán en dos partes iguales.



figs. 135 - 136 - 137 - 138

II. De cordones inclinados los tipos más importantes son: los de forma parabólica, llamado por los ingleses «Bowstring»; y los que forman el cordón superior un polígono cualquiera.

Estas diferentes armaduras se usan según la luz e importancia del puente, así:

para puentes de 15 a 20 m. vigas simples de alma llena en I;

para puentes de carretera de 20 a 25 m. y para ferrocarriles de 25 a 30 m., se usan vigas I compuestas.

Para puentes de carretera entre 15 y 30 m., se emplean las armaduras de los cordones paralelos, con el tablero de la vía en la mitad de la altura de la viga.

Para puentes de carretera hasta de 50 m. y de ferrocarriles de 70 m., se usan armaduras de cordones paralelos, con el tablero de la vía apoyado en el cordón superior o en el inferior, según las circunstancias.

Para luces superiores se emplean las armaduras parabólicas o Bowstring.

Si hay libertad de elegir, se dispone, por conveniencia, el tablero apoyado en el cordón superior para asegurar las armaduras entre sí, por medio de barras de contraviento, o llamadas también de arrostramiento, colocadas en plano vertical; lo que permite asegurar en toda la altura de la armadura. Mientras que las de vía de tablero inferior, no es posible hacerlo cuando la altura de la armadura no es suficiente para dar libertad al tráfico; pero a veces es necesario, a fin de dar amplitud al paso de embarcaciones, trenes, vehículos, que cruzan por debajo del puente. Por lo tanto, estas disposiciones varían según las circunstancias del lugar.

128.—Carga permanente.

La carga permanente de un puente comprende: el peso de las armaduras, balasto, calzada, barras de arrostramiento y todas las piezas que se hallan unidas o aseguradas a él. Este peso depende de la luz, ancho, estilo del puente y del material empleado, y varía considerablemente en cada caso. Por lo regular son más ligeros los puentes de carretera que los de ferrocarril.

Para que sea posible el cálculo de las armaduras de un puente, conviene establecer a priori el peso del puente, basándose en datos puramente empíricos, que se han deducido de obras ya ejecutadas.

Damos a continuación la fórmula dada por Schuebler (*) para puentes de carretera:

Para puentes ordinarios, suponiendo una latitud de $b = 7,50$ inclusive parapetos, da p por metro lineal de puente en kilos.

Para firme empedrado; peso de la parte metálica

$$p_1 = 42 l + 900;$$

(*) Véase Jorini. Costruzione di Ponti pág. 132.

el peso total es:

$$p = 42 l + 3.600 \quad (1)$$

Para pavimento de madera; peso de la parte metálica

$$p_1 = 28 l + 600;$$

el peso total es:

$$p = 28 l + 1.300.$$

Si el puente tuviese una latitud mayor o menor de 7,50 m., se puede adoptar para el peso propio un valor p' proporcional a la latitud:

$$p' = \frac{b'}{7,50} \times p \quad (2)$$

Merriman y Jacoby (*) da, el valor total de la carga permanente para puentes de carretera con dos armaduras, la siguiente fórmula empírica:

$$p = 140 + 12 b + 0,2 bl - 0,4 l \quad (3)$$

en la cual, p es el peso en libras por pie lineal, b el ancho del puente en pies (inclusive aceras), y l la luz en pies.

Para puentes de ferrocarriles (*) de una vía, el peso propio p por metro lineal de puente se representa generalmente por la fórmula binomía:

$$p = a l + b \quad (4)$$

en la que l es la luz del puente, a y b son constantes. El valor de a está comprendido entre 30 y 35; el de b depende exclusivamente de la constitución del tablero y representa el peso por metro lineal y varía entre 500 y 800.

(*) Roofs and Bridges, vol. II, pág. 67.

(*) Jorini. Costruzione di Ponti, pág. 133.

Este polígono se cierra, puesto que las fuerzas aplicadas y las reacciones forman un sistema en equilibrio.

Se principia el trazado de Cremona por uno de los nudos de las reacciones, puesto que éstos son los únicos que tienen sólo dos barras: sea entonces el nudo del apoyo izquierdo.

Según lo dicho en el capítulo anterior, esta reacción y los esfuerzos de las dos barras ef y fd deben formar un polígono cerrado; luego de E se traza una paralela a ef y de D una paralela a fd . La intersección F de estas dos líneas determina las magnitudes de los esfuerzos de las dos barras.

Ahora, como la reacción DE actúa de D hacia E, mantendremos este mismo sentido al recorrer el triángulo DEF, para definir la clase de esfuerzos que reciben las barras, entonces será DEFD. Trasladando este sentido al nudo del apoyo izquierdo, se nota que el esfuerzo ef es de compresión, mientras que el esfuerzo de fd actúa en tracción.

Como se ve, en este caso también, se puede saber la clase de esfuerzo que sufre una barra, sólo con seguir el sentido dado por las agujas de un reloj al mencionar las letras de un nudo. Pero es esencial seguir el orden que se indica en la figura, al designar las fuerzas y reacciones.

La construcción del polígono de Cremona se continúa, sin ninguna dificultad, pasando del nudo inferior al superior y así alternativamente hasta llegar a la mitad de la armadura; luego se pasa al apoyo derecho y de aquí se sigue también alternadamente hacia el centro de la armadura hasta que se complete el polígono de Cremona. Siguiendo este orden se consigue mayor exactitud en el dibujo.

El polígono que resulta será simétrico con relación a la línea IE. De manera que cuando la armadura es simétrica con relación a la mitad y las fuerzas lo son también, no hay necesidad de dibujar el polígono de Cremona íntegro, sino sólo para la mitad de la armadura: las barras de la otra mitad tendrán tensiones iguales a sus simétricas.

Como habíamos dicho antes, el cordón superior sufre compresión y el inferior tracción. Las barras diagonales sufren alternativamente compresión y tracción, a excepción de las dos diagonales que se hallan en la mitad de la armadura, pues ambas sufren tracción.

Cálculo de una armadura Pratt por el método de Cremona

130.—Tomemos una armadura para carreteras, sistema Pratt, de las dimensiones siguientes: luz = 56 m. dividida en 8 recuadros, y una altura de 8 m. El ancho de la carretera es de 7,00 m., soportada por igual por las dos armaduras que son las que llevan toda la carga.

Se encuentra que por las fórmulas empíricas del artículo 128, el peso del puente es de $2.100^k/\text{metro lineal}$, y la carga por recuadro de cada armadura es de $1050 \times 7 = 7350^k$.

Se necesita determinar los esfuerzos de las barras que se desarrollan a causa de esta carga permanente, que actúa toda ella en el cordón inferior.

En la figura 140, hemos trazado el dinámico a escala, $AH = 7.350 \times 7 = 51.450^k$.

Se sitúan las letras en el orden que se indica en la figura. El punto I es el punto medio de la línea AH, que da las magnitudes de las reacciones. Por conveniencia, se omite la media carga correspondiente a los nudos de los apoyos, pues no influyen en los esfuerzos de las barras.

El trazado de los polígonos de Cremona, se hace teniendo en cuenta los principios establecidos e iniciando en uno de los nudos de los apoyos. La reacción HI del apoyo izquierdo, se mantiene en equilibrio, con los esfuerzos de las barras ij y jh , y por consiguiente forman el triángulo HIJ, el que nos indica IJ compresión y JH tracción.

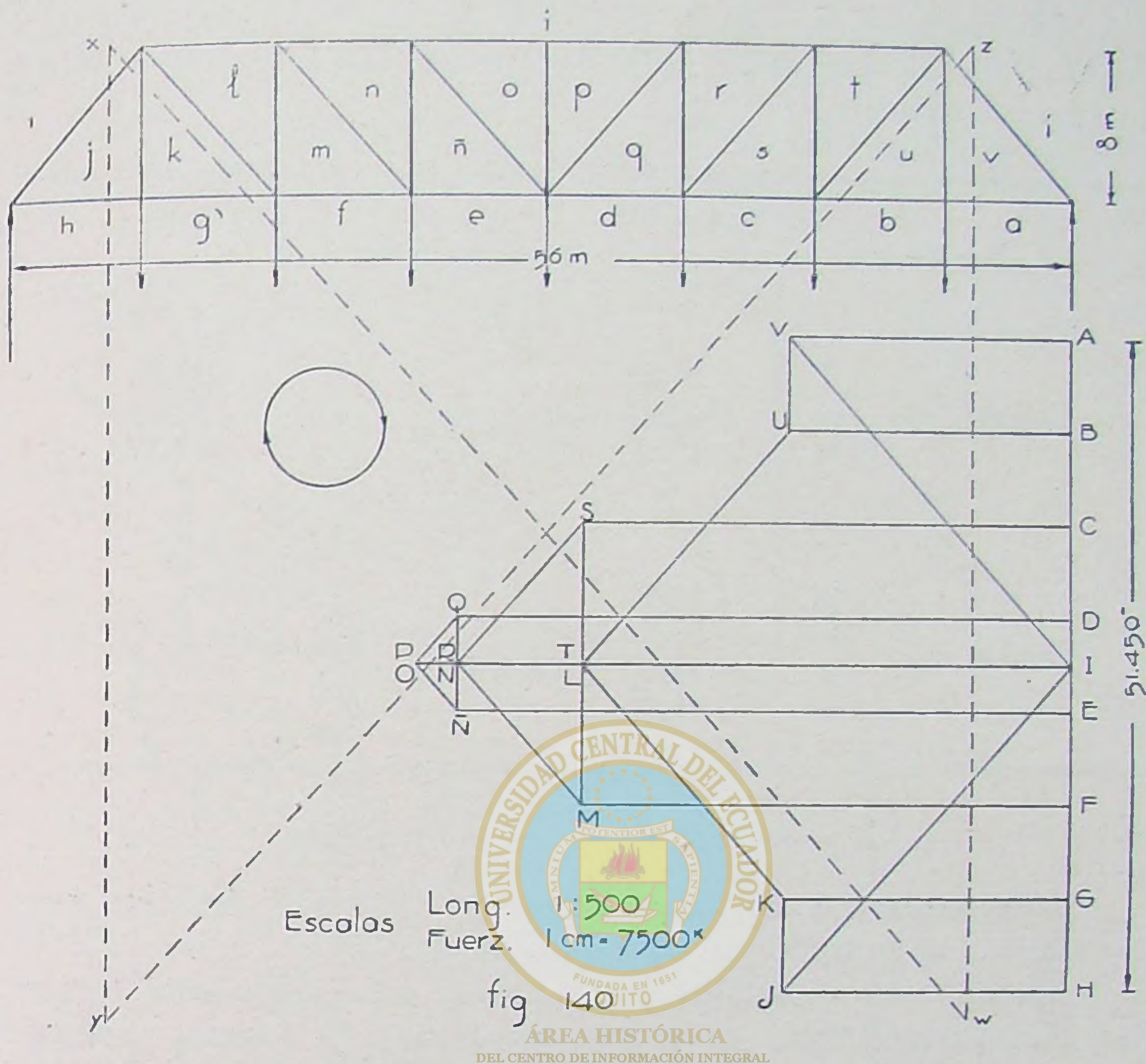
La construcción de los polígonos de Cremona se continúa de la misma manera, pasando alternativamente del nudo superior al nudo inferior siguiente.

Sí el trazado está bien hecho el diagrama debe ser simétrico con relación a la línea PI.

Ahora estudiemos los polígonos de Cremona, de manera de sacar conclusiones interesantes que nos permitan conocer las variaciones de los esfuerzos en las barras:

El rectángulo JKGH nos indica que la tracción en jk es de la misma magnitud de la fuerza gh y los esfuerzos de tracción de las barras kg y jh son iguales.

El rectángulo FMLI nos indica que los esfuerzos de las barras il y mf , son de la misma magnitud, pero la primera es compresión y la segunda tracción, como se ha dicho antes.



Además, $E\tilde{N} = IN$ son como antes de esfuerzos diferentes y de la misma magnitud.

Por lo visto, los esfuerzos de las barras horizontales de dos recuadros adyacentes y que están separados solamente con una barra vertical, son de la misma magnitud.

Por otra parte, los esfuerzos de compresión en el cordón superior, aumentan hacia la mitad de la armadura y lo mismo sucede con los esfuerzos de tracción del cordón inferior.

Todas las diagonales trabajan a la tracción, a excepción de las de los apoyos, las ij y vi .

Todas las barras verticales trabajan a la compresión, con excepción de jk y uv .

En las barras de relleno, los esfuerzos aumentan de la mitad hacia los apoyos, con la excepción de jk , la cual no hace sino transmitir la carga hg al cordón superior.

Midiendo a la escala de 1 cm. = 7,5 toneladas, los esfuerzos de las barras en el polígono de Cremona, nos da el resultado siguiente:

Barras		Esfuerzos Toneladas	Barras		Esfuerzos Toneladas
Cordón sup.	il	+38,50	Diagonales	ij	+34,00
	in	+48,00		kl	-24,20
	io	+51,50		mn	-14,40
Cordón inf.				no	-4,75
	jh	-22,50	Verticales	jk	-7,50
	kg	-22,50		lm	+11,00
	mf	-38,50		nñ	+3,50
	ñe	-48,00		op	0

+ compresión; — tracción

Los esfuerzos de las barras de la mitad derecha son iguales a las homólogas de la izquierda.

Para hacer el dibujo más exacto, es conveniente trazar las líneas auxiliares rw y yz , que tienen la misma inclinación de las diagonales de la armadura a las cuales se dibujan paralelas en el polígono de Cremona; lo mismo debe hacerse en la de tipo Warren.

131.—Las cargas de una armadura accionan en ambos cordones simultáneamente.

Sí en lugar de que la carga se halle concentrada sólo en el cordón inferior, se la divide de manera que un tercio de la carga actúe en el cordón superior y los dos tercios en el inferior y conservando las mismas dimensiones de la armadura, se procede para el cálculo de los esfuerzos de la manera siguiente; fig. 141.

La magnitud de la carga del cordón superior es:

$$\frac{7.350}{3} = 2.450;$$

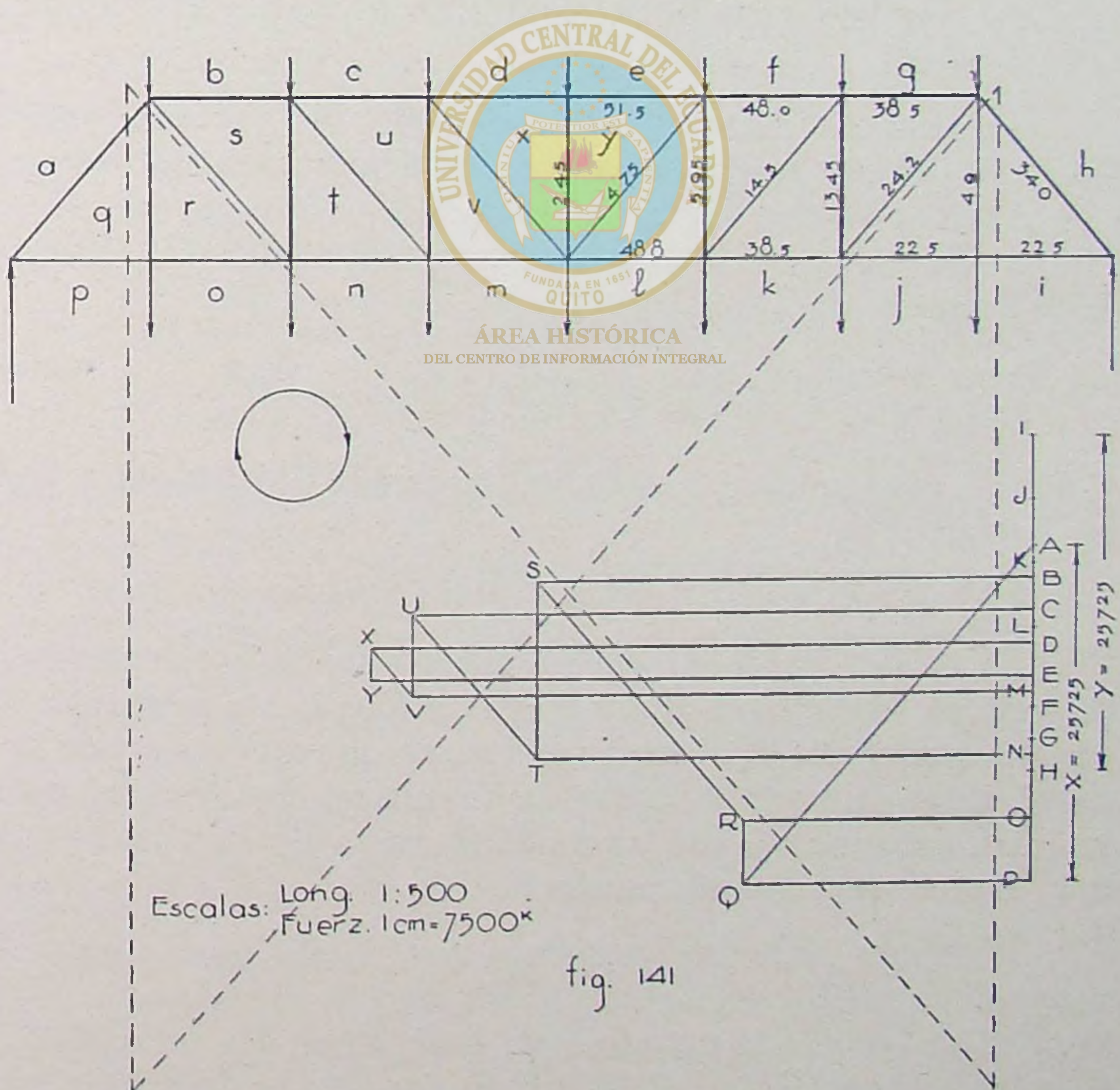
del inferior es:

$$\frac{2 \times 7.350}{3} = 4.900^k$$

Las reacciones de los apoyos tienen el mismo valor que antes o sea la mitad de la carga total:

$$\frac{51.450}{2} = 25.725^k$$

Se traza el dinámico tomando las cargas en orden: principiando por la primera de la derecha y siguiendo el contorno de la armadura, siempre en el sentido de las agujas de un reloj, tal como indica el orden de las letras en la fig. 141; en este recorrido debe incluirse las reacciones. De manera que el dinámico es ABCDEFGHIJKLMNOPA.



Después se sigue el trazado de los polígonos de Cremona, principiando por el nudo del apoyo izquierdo, luego se pasa alternativamente del nudo inferior al superior, hasta la mitad de la armadura, idénticamente a lo que se ha hecho en el ejemplo anterior; la dificultad estriba sólo en el orden que se ponen las cargas en el dinámico.

La otra mitad sufre esfuerzos iguales y no hay necesidad de dibujarlos, así hemos hecho en la fig. 141.

Las letras nos servirá de gran ayuda para saber el punto de donde debe trazarse la paralela a cada barra.

Si se compara las figuras 140 y 141 se observa que son iguales todos los esfuerzos en las barras, con excepción de las barras verticales cuyos esfuerzos de compresión están aumentados del valor de 2.450^k , que es la carga del cordón superior. Por la misma razón la tracción de qr se ha disminuído de esta cantidad.

Un examen detallado del polígono de Cremona en las figs. 140 y 141 nos conduce a los resultados siguientes: la componente vertical AQ es la reacción PA ; la componente vertical de RS es la reacción PA menos AB y OP . El esfuerzo de la barra st es:

$$ST = PA - AB - NO - OP$$

y así de una manera semejante se puede deducir para todas las barras.

De aquí el principio siguiente:

Para las armaduras que tienen cordones horizontales, las componentes verticales de las barras diagonales y verticales son iguales a la reacción menos las cargas que se encuentran a la izquierda de la barra; o lo que es lo mismo, al esfuerzo cortante. La única excepción es la de la barra qr , por las razones que dimos en el artículo anterior.

También podemos enunciar que, la diferencia entre las magnitudes de los esfuerzos de dos barras consecutivas de un cordón, es igual a la componente horizontal del esfuerzo de la diagonal situada entre ellas. Por ejemplo, la diferencia entre MV y NT es la componente horizontal de TU , lo cual tam-

bién es igual a la diferencia entre CU y TN; puesto que hemos dicho que las barras *cu* y *vm* tienen esfuerzos iguales.

Estas relaciones de los esfuerzos de las barras tienen gran importancia para el método de Ritter, cuando tratemos de carga móviles.

132.—Método de Ritter para el cálculo de los esfuerzos de una armadura de puente.

En la figura 142 está representada una armadura Warren, compuesta de 5 recuadros y 4 nudos inferiores, que son los únicos que soportan la carga.

Admitamos, que se conocen todas las fuerzas exteriores y también las reacciones de los apoyos. Este conjunto de fuerzas se encuentran en equilibrio.

Hagamos un seccionamiento cualquiera en la armadura, de suerte que no corte sino a tres barras. El plano *ss* corta a las barras *fj*, *ji* y *di*, quedando la armadura dividida en dos partes.

El sistema de fuerzas que actúa en la porción izquierda de la armadura no se encuentra en equilibrio debido a la rotura de las tres barras; pero para cumplir este requisito de equilibrio, es necesario añadir al sistema, los esfuerzos que sufren las tres barras cortadas, luego:

$$R' + \bar{fj} + \bar{ji} + \bar{di} = 0 \quad (1)$$

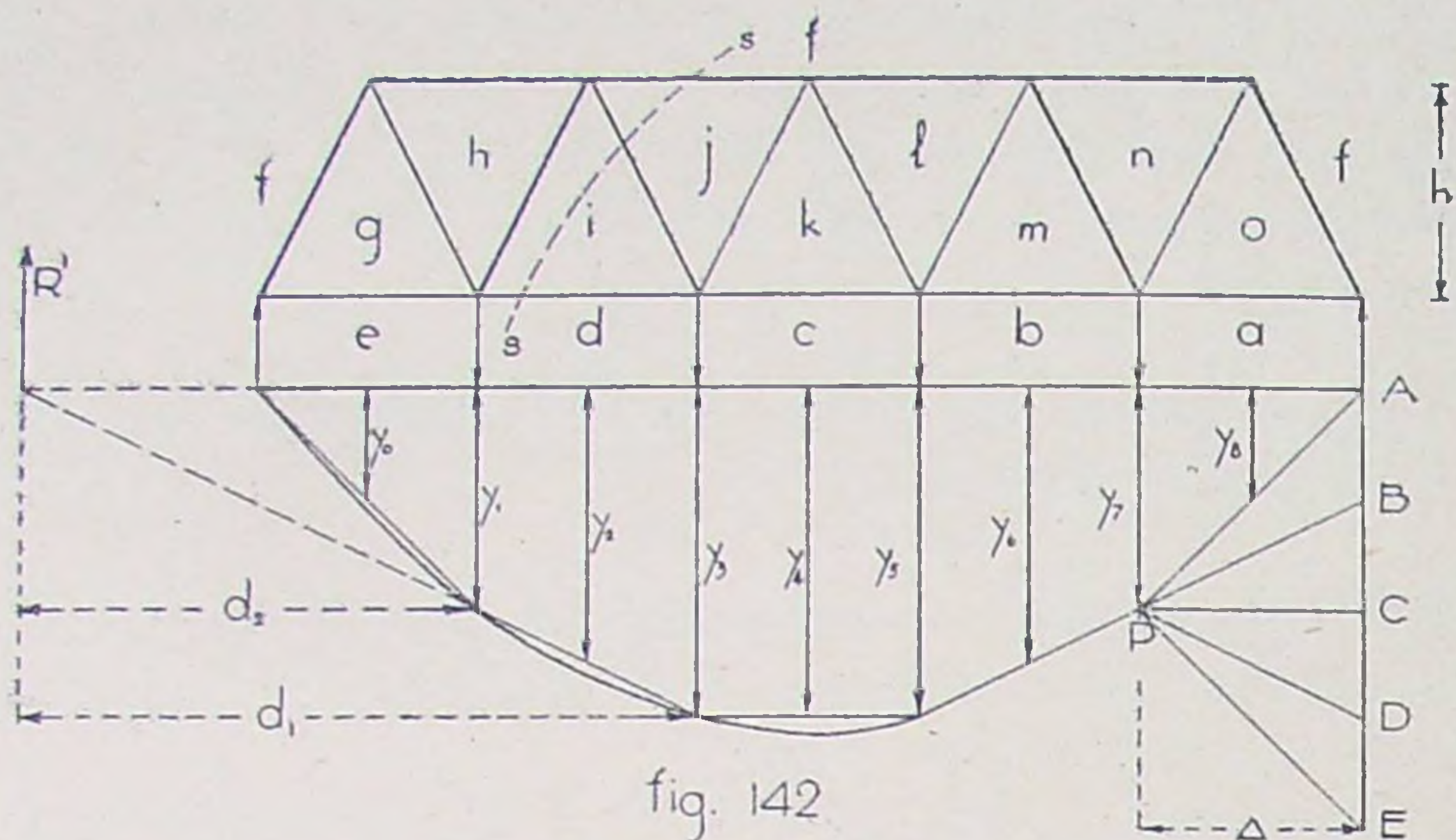
llamando *R'* a la resultante de las fuerzas situadas a la izquierda de la sección.

Aplicando a esta ecuación el teorema de Varignon, y tomando como eje de momentos, el nudo de la armadura al que concurren dos de las barras seccionadas.

Entonces, tomemos el nudo *dijkc* como eje de momentos para el sistema en equilibrio, expresado en la ecuación (1); y se observa inmediatamente que los momentos de las barras *di* y *ji* son iguales a cero y sólo queda como condición de equilibrio:

$$R' \times d_1 - \bar{fj} \times h = 0 \quad (2)$$

llamando *d₁* al brazo de palanca, o sea a la distancia que hay entre *R'* y el punto tomado como eje de momentos; y *h* a la altura de la armadura.



De la ecuación (2) se deduce:

$$\overline{fj} = \frac{R' \times d_1}{h} = \frac{\mathcal{M}_1}{h} \quad (3)$$

Por lo tanto, el esfuerzo de la barra \overline{fj} , es igual al momento de la resultante de las fuerzas a la izquierda de la sección, con relación a un punto tal que concurren desde las barras seccionadas y dividido por la altura de la armadura, (v. art. 117).

De una manera semejante, para encontrar el esfuerzo de una barra del cordón inferior, como la id , se tomarán los momentos con relación al nudo superior $fjih$, a donde concurren dos de las barras seccionadas y se tendrá:

$$\overline{id} = \frac{R' \times d_2}{h} = \frac{\mathcal{M}_2}{h} \quad (4)$$

en la que d_2 es el brazo de palanca de R' .

Para obtener el esfuerzo de una diagonal cualquiera, tendríamos necesidad de prolongar los cordones hasta su punto de concurso, para obtener los momentos nulos de dos barras; pero como son paralelos se unirán en el infinito, y por consiguiente el método de Ritter falla en este caso y no podemos aplicarlo. Es el método de Culmann, que lo explicaremos después, que permite por medio del área representativa de los esfuerzos cortantes, determinar los esfuerzos de las barras diagonales.

Para conocer la clase de esfuerzo, de la barra, ecuación (3), si está comprimida o extendida, se observa que el momento de R' , con relación al nudo tomado como eje de los momentos, es del sentido igual al de las agujas de un reloj, es decir positivo: por consecuencia el momento del esfuerzo de la barra con relación al mismo nudo, debe ser de sentido negativo, puesto que equilibra al primero; lo que quiere decir un sentido que va de derecha a izquierda o sea una compresión de la barra fj .

Por la ecuación (4), el momento del esfuerzo de la barra d_i , tiene que ser de sentido contrario al del caso anterior y tiende a extender a la barra, o sea tracción.

Construyamos el dinámico ABCDE y el funicular relativo al sistema de fuerzas dado. Al trazar la ordenada y_1 , que es paralela a la resultante R' y comprendida entre los dos lados del funicular que le limitan y multiplicado por la distancia polar, será la magnitud del momento de flexión relativo al sistema de fuerzas que se encuentran a la izquierda de la sección; es decir, de las fuerzas ed y de la reacción de la izquierda; o lo que es lo mismo del momento de la resultante R' (art. 61).

Por otro lado, en la ecuación (3) el producto de $R' \times d_1$, es también el momento, luego:

$$\overline{fj} = \frac{R' \times d_1}{h} = \frac{y_3 \times \Delta}{h} \quad (5)$$

Por consiguiente, el esfuerzo que sufre la barra fj , está dado por la ordenada del funicular, trazada por el nudo opuesto a fj , multiplicada por la distancia polar y dividido por la distancia que hay entre la barra considerada y el nudo opuesto. En las armaduras de cordones paralelos, esta última magnitud es la altura de la viga.

Si por conveniencia, hacemos que la distancia polar sea igual a la altura de la viga, la ecuación (5) se reduce a:

$$\overline{fj} = \frac{y_3 \times h}{h} = y_3 \quad (6)$$

De aquí se deduce el siguiente principio:

La magnitud del esfuerzo que sufre una barra horizontal, es igual, al segmento, medido a la escala de las fuerzas, que

está limitado en el diagrama representativo de los momentos de flexión, en la línea paralela a la resultante, trazada por el nudo opuesto a la barra. Siempre que la distancia polar sea igual a la altura de la armadura.

Así para la barra fj el esfuerzo está dado por:

$$\overline{fj} = y_3 \text{ compresión}$$

Para la barra \overline{id} será:

$$\overline{id} = y_2 \text{ tracción}$$

para	$\overline{kc} = y_4$	tracción
»	$\overline{fl} = y_5$	compresión
»	$\overline{mb} = y_6$	tracción
»	$\overline{fn} = y_7$	compresión
»	$\overline{oa} = y_8$	tracción

Si la armadura de la fig. 142 está sometida a la acción de una carga uniformemente repartida de p por metro lineal en el cordón inferior, que es el caso general para carga fija, se puede proceder más simplemente, sin necesidad de recurrir al polígono funicular, para encontrar los momentos de flexión.

Sabemos que, el diagrama representativo de los momentos de flexión para carga uniforme, es una parábola que pasa por la línea de los apoyos y que su máximo ocurre en la mitad de la luz. Este máximo es:

$$\mathcal{M}_m = \frac{pl^2}{8}$$

Una vez trazada la parábola; se supone que las cargas actúan concentradas en los nudos de carga; entonces se trazan las ordenadas y_0, y_1, \dots etc. bajo estos nudos y se unen sus extremidades con rectas. En estas rectas, deben limitarse las ordenadas trazadas de los nudos intermedios, que no son nudos de carga: que en el caso de la figura son todos los nudos del cordón superior.

Los esfuerzos de las barras del cordón superior y del inferior se determinan por la relación:

$$\frac{M}{h}$$

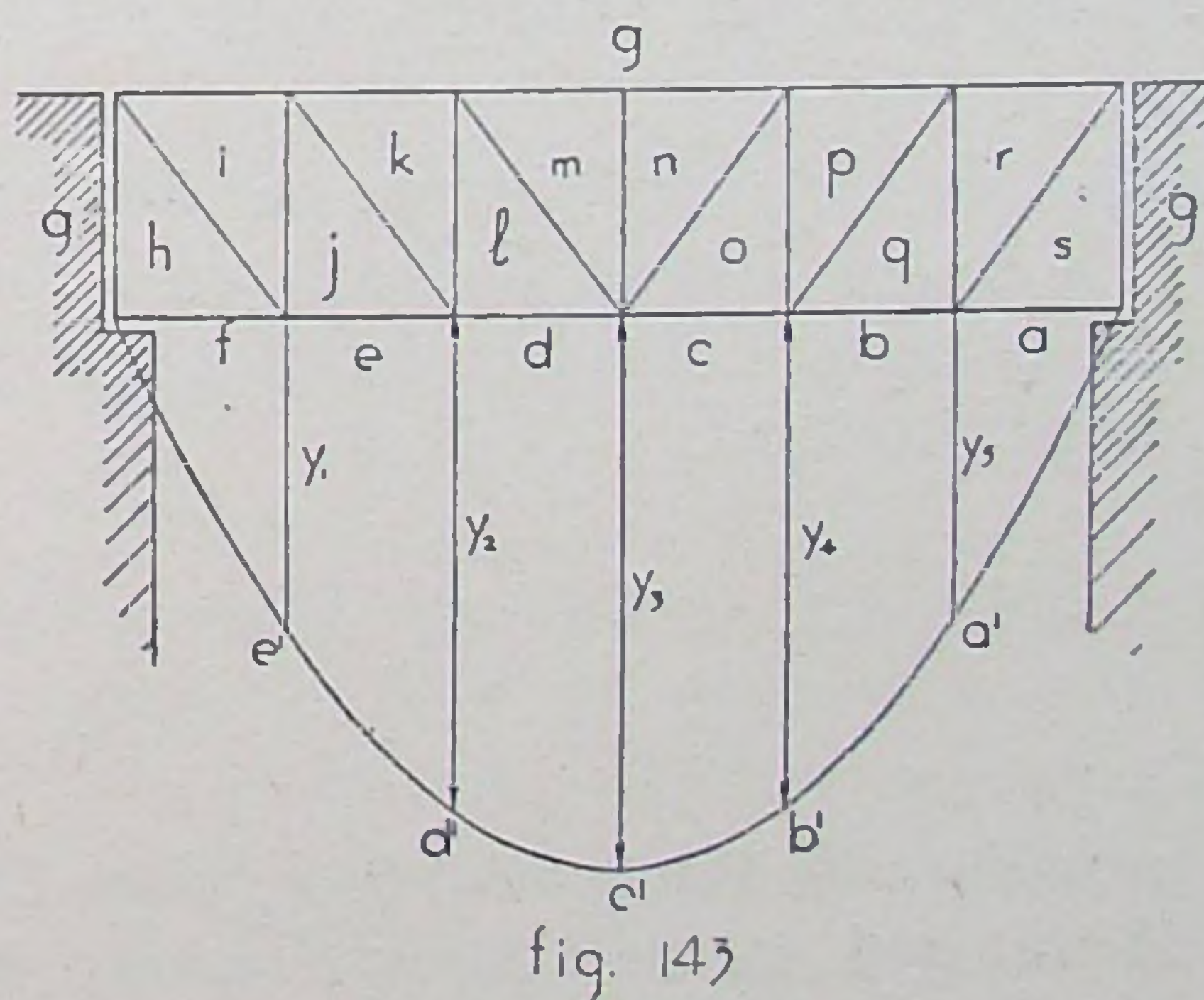
En la que M se medirá a la escala adoptada para el valor máximo $\frac{pl^2}{8}$ y h a la escala de longitudes.

Para cargas fijas, ya hemos dicho que las barras del cordón superior están comprimidas y las del cordón inferior extendidas.

Como el diagrama de los momentos es simétrico con relación a la mitad, no hay necesidad dibujar sino para la mitad de la armadura.

133.—*Diagrama de los momentos de flexión para una armadura Pratt.*

Cuando la armadura es del sistema en N o Pratt, los momentos en los nudos superiores e inferiores, que se encuentran en una misma vertical, son los mismos cualquiera que sea la posición de las vigas transversales. Fig. 142.



Sea la parábola $fe'd'c'b'a'$ el diagrama representativo de los momentos de flexión correspondiente a las cargas dadas.

Esta parábola determina en las ordenadas paralelas a las fuerzas, los segmentos que tienen por valor las magnitudes de los esfuerzos en las barras horizontales:

La ordenada y_1 , representa los esfuerzos comunes que se desarrollan en la barra gi opuesta al nudo fhi , y en la barra je opuesta al nudo gkj ; siempre que la distancia polar sea igual a la altura de la viga. Pero si se ha trazado directamente la parábola, haciendo que la ordenada máxima, que ocurre en la mitad, sea igual a $\frac{pl^2}{8}$, entonces se medirán

las ordenadas y_1, y_2, \dots etc. a la escala de momentos adoptada y se dividirá este valor por la altura de la viga.

La ordenada y_1 representa los esfuerzos de las barras gi y je .

La y_2 representa los esfuerzos de las barras gk y dl .

La ordenada y_3 da el valor del esfuerzo en la barra gm y también el de la barra gn , que son opuestas al nudo dln .

No hay ninguna barra opuesta al nudo superior mgn , porque se interponen las dos diagonales lm y no .

De una manera igual se obtienen los esfuerzos para las barras de la mitad derecha de la armadura.

El segmento que determina el diagrama de momentos en la vertical trazada por los nudos de los apoyos es nulo, luego la intensidad del esfuerzo desarrollado en la barra fh , opuesta al nudo superior, es también nula: no sufre la barra ningún esfuerzo.

La naturaleza de estos esfuerzos, se determina de una manera idéntica a lo que hemos indicado en el artículo anterior, o más sencillamente: el cordón inferior sufre tracción, el cordón superior compresión.

134.— Aplicación del método de Ritter en una armadura tipo Warren.

Sea una armadura de tablero inferior, para carretera, que tiene de luz 30 m. y 4 m. de altura, el ancho de la calzada del camino es de 5 m. Está dividida la armadura en 6 rectángulos de 5 m. cada uno y se hallan sometidos a la acción de una carga uniformemente repartida, de 1 tonelada por metro cuadrado de calzada.

Se necesita determinar los esfuerzos que sufren las barras del cordón superior y del cordón inferior, sirviéndonos del diagrama de momentos.

La carga por metro lineal es:

$$1 \times 5 = 5 \text{ T.}$$

La carga por metro lineal y para cada armadura es:

$$\frac{5}{2} = 2,5 \text{ T.}$$

Para cada nudo la carga vale:

$$2,5 \times 5 = 12,5 \text{ T.}$$

Las reacciones de los apoyos valen, por tanto:

$$X = Y = \frac{12,5 \times 5}{2} = 31,25 \text{ T.}$$

Determinadas las fuerzas exteriores, construyamos el dinámico, haciendo que la distancia polar sea igual a la altura de la viga, o sea 4 m.

El tuncular que se ha dibujado con estas cargas y polo, nos da el área representativa de los momentos de flexión de la viga.

Las escalas de la fig. 144 son:

Longitudes. 1 : 300

Fuerzas 1 cm. = 15 T.

Momentos 1 cm. = 15 T. M.

Como la distancia polar es igual a la altura de la viga, las ordenadas y_1, y_2, \dots etc. se miden, para obtener los esfuerzos en las barras horizontales, directamente a la escala de las fuerzas, en efecto:

$$\text{el esfuerzo de hf} = y_1 = 19,5 \text{ T.}$$

$$\text{» » » gi} = y_2 = 39,0 \text{ »}$$

$$\gg \gg \gg j_e = y_3 = 50,8 \gg$$

$$\gg \gg \gg g_k = y_4 = 62,5 \gg$$

$$\gg \gg \gg l_d = y_5 = 66,4 \gg$$

$$\gg \gg \gg g_m = y_6 = 70,3 \gg \text{valor máximo}$$

Para las barras de la mitad derecha, los esfuerzos son iguales a las homólogas de la izquierda.

Cordón superior compresión.

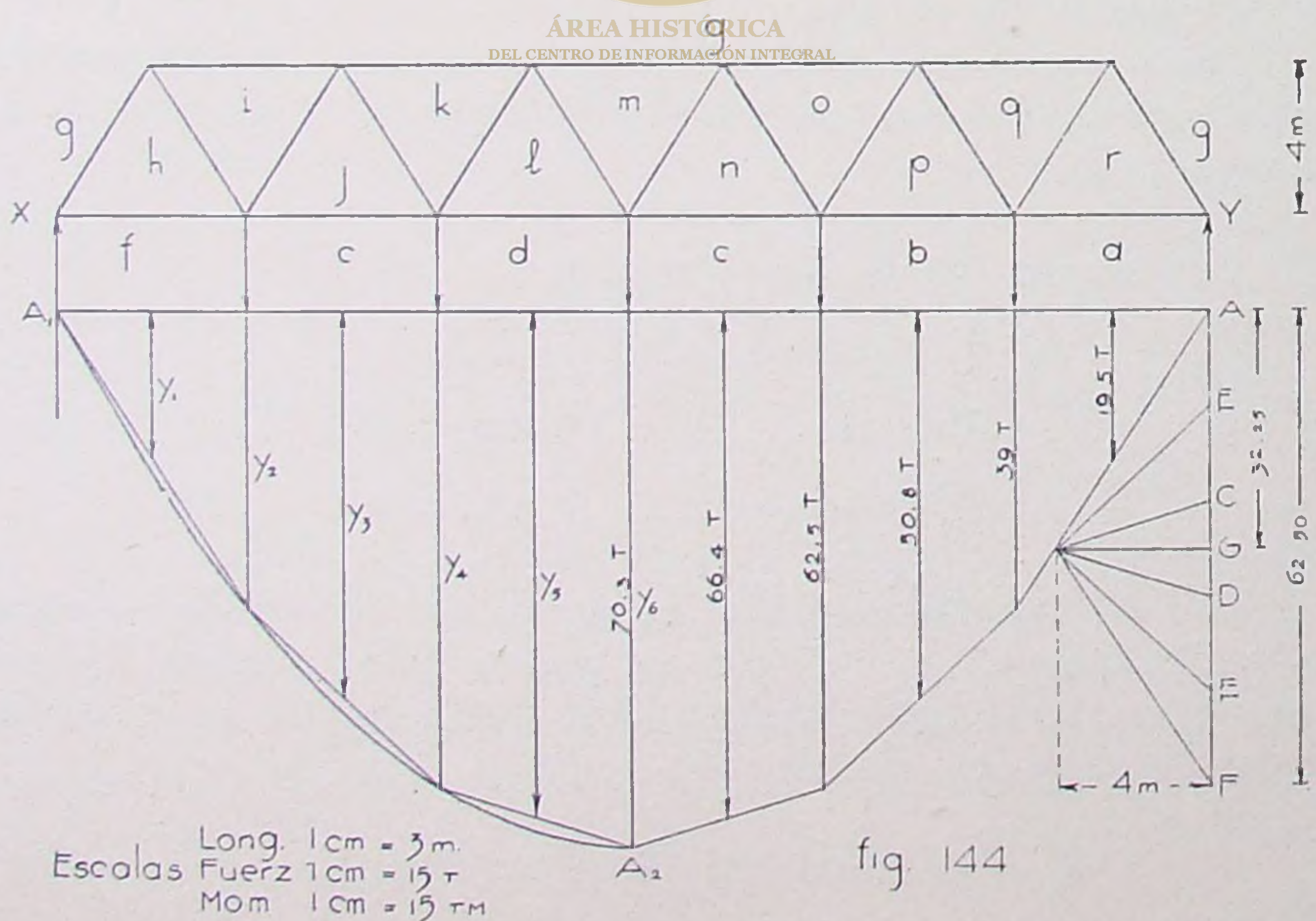
Cordón interior tracción.

Se puede también proceder trazando la parábola tangente en A y A₁, con una flecha máxima que tiene por valor:

$$\mathcal{M}_m = \frac{pl^2}{8} = \frac{2,5 \times 30^2}{8} = 281,25 \text{ T. M.}$$

Si hacemos la escala de momentos 1 cm. = 15 T. M. tendremos la longitud de la ordenada máxima:

$$\frac{281,25}{15} = 18,75 \text{ cm.}$$



Para este valor, nos resulta la parábola demasiado grande y como por otra parte, tenemos que dividir el valor de las ordenadas, medidas a la escala de momentos, por la altura de la viga, que es constante para todos los nudos, haremos esta reducción de una vez:

$$\frac{18,75}{4} = 4,69 \text{ cm.}$$

y así tendremos que las ordenadas de la parábola, medidas a la escala de 1 cm. = 15 T. M., nos da directamente el valor del esfuerzo que sufre cada barra.

Por la mitad de la línea $A_1 A$, se baja la vertical con una longitud de 4,69 cm. y queda determinado el punto A_2 , que es el vértice de la parábola. Por el método dado en el artículo 62, se traza la parábola $A_1 A_2$ y se observa que los puntos de la curva que se necesita, están en las verticales bajadas de los nudos de carga y se obtienen las ordenadas $y_2, y_4 \dots$ etc. Los extremos de estas ordenadas se unen con líneas rectas, hasta donde deben trazarse las ordenadas $y_1, y_3 \dots$ etc., que corresponden a los nudos del cordón superior.

La escala de fuerzas y de momentos es la misma.

OBSERVACIONES.—1º. Los esfuerzos máximos en los cordones se obtienen cargando toda la longitud de la viga; mientras que para las barras de relleno (diagonales y verticales) no sucede siempre así. Esta observación es de sumo interés cuando se trata de cargas variables.

2º. Ya hemos dicho en el artículo 132 que, por medio de este método, no nos es posible determinar los esfuerzos de las barras de relleno, es el método de Culmann que nos facilitará esta investigación, que la damos en seguida.

135.—*Método de Culmann para el cálculo de los esfuerzos en las diagonales de una armadura Warren.*

Sea la misma armadura Warren dada en el ejemplo anterior, fig. 144.

Si hacemos un seccionamiento, ss, en la armadura de manera de cortar las tres barras, gk , kj y je ; mantendremos el equilibrio, aplicando en los puntos de seccionamiento, fuerzas equivalentes a los esfuerzos que sufren estas barras, que

forman con la resultante R' de las fuerzas de la izquierda de la sección, un sistema en equilibrio.

La magnitud de R' es igual a la diferencia aritmética de sus dos componentes:

$$R' = X - \overline{fe}$$

Como esta resultante R' , equilibra a las tres fuerzas que tienen como líneas de acción las paralelas a las tres barras seccionadas; es por lo tanto, suficiente descomponer R' según las direcciones de las tres barras gk , jk y je , para conocer sus esfuerzos.

En el artículo 124, caso 2º., damos el procedimiento para descomponer una fuerza R' en un sistema equilibrante de tres fuerzas, cuyas líneas de acción son conocidas, siendo dos de ellas paralelas y la tercera tiene una posición cualquiera.

Así mismo, si se hace un corte a la armadura en $s_1 s_1$, la resultante R_2 de las fuerzas de la izquierda de la sección, tiene que equilibrar a los esfuerzos de las tres barras seccionadas, gm , ml y ld .

La magnitud de R_2 es:

$$R_2 = X - fe - ed$$

Y así para cualquier otra sección, la resultante que hace equilibrio a las tres barras cortadas por una sección cualquiera, es igual a la reacción menos las cargas a la izquierda de la sección. Estas resultantes R , son los *esfuerzos cortantes* para una viga simple de la misma luz y con las mismas cargas.

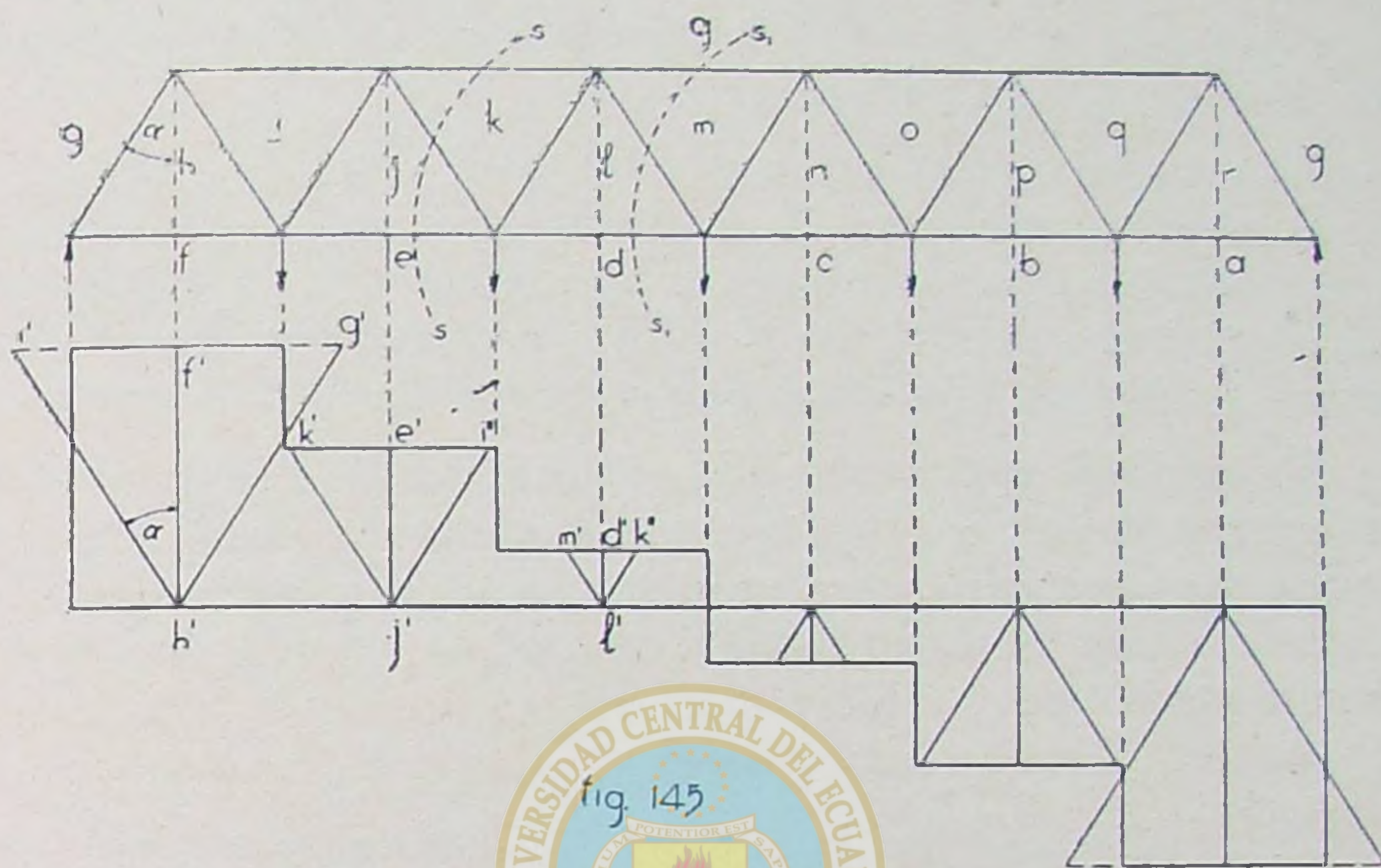
A igual conclusión llegamos en el artículo 131, cuando analizábamos una armadura Pratt por el método de Cremona.

Por lo expuesto, para determinar estos valores de las resultantes parciales, será más simple construir el área representativa de los esfuerzos cortantes, (art. 61) como si fuera para una viga de alma llena y con las mismas cargas que actúan en los nudos de la armadura.

Luego de encontrado el valor del esfuerzo cortante, lo descompondremos según las líneas de las tres barras seccionadas.

En el caso presente, fig. 145, se supone que las vigas transversales transmiten las cargas sólo a los nudos del cordón inferior; las verticales se trazan por la mitad de cada barra

de este cordón o sea por el punto intermedio de los nudos cargados; o lo que es lo mismo la proyección del nudo superior.



Estas verticales son: $h'f'$, $j'e'$, $l'd'$ etc., que medidas a la escala de las fuerzas nos dan el valor de las resultantes parciales R. Esta fuerza, hay que descomponer en otras tres, según las líneas de acción de las barras cortadas; es decir en una horizontal, pues las barras de los cordones son horizontales, y una paralela a la diagonal.

Luego por los extremos h' , j' , l' se trazan paralelas a las diagonales hasta su encuentro con las horizontales que parten de los puntos correspondientes f' , e' , d'

Se tiene así:


$h'g'$	paralela a	hg
$h'i'$	»	» hi
$j'i''$	»	» ji
$j'k'$	»	» jk
$l'k''$	»	» lk
$l'm'$	»	» lm

De igual manera para las demás. Los esfuerzos de las diagonales se indican con las mismas letras de las respectivas barras.

A la misma escala de fuerzas se miden estas componentes, y nos dan el valor de los esfuerzos en las diagonales, sea que trabajen a compresión o tracción.

Las componentes horizontales, tales como $f'i'$, $k'e'$... etc. definen la resultante de los esfuerzos de las dos barras horizontales seccionadas, que no hay necesidad de conocerlas individualmente, puesto que el área representativa de los momentos de flexión nos definen con mayor claridad y sencillez.

La fig. 145 está hecha a la misma escala y con las mismas cargas de la fig. 144; se puede entonces medir los segmentos representativos de los esfuerzos de las diagonales, a la escala de 1 cm. = 15 toneladas, lo que da los resultados numéricos siguientes:



diagonal	gh	=	36,8	T.	compresión
»	hi	=	36,8	T.	tracción
»	ij	=	22,0	T.	compresión
»	jk	=	22,0	T.	tracción
»	kl	=	7,35	T.	compresión
»	lm	=	7,35	T.	tracción
»	mn	=	7,35	T.	tracción

Las diagonales son alternativamente comprimidas y extendidas, con excepción de las dos que concurren al nudo de la mitad de la armadura que sufren ambas tracción.

Para casos más complejos se puede adoptar la regla de Aragón. (Resistance de Materiaux p. 436) que dice:

Diagonales que se inclinan a la derecha	}	Compresión. — Esfuerzo cortante positivo.
		Tracción. — Esfuerzo cortante negativo.

Diagonales que se incli- } Compresión. — Esfuerzo cortante
 nan a la izquierda } negativo.
 } Tracción. — Esfuerzo cortante po-
 } sitivo.

OBSERVACIÓN.—Si en la fig. 145, tomamos en consideración el triángulo $i'f'h'$, y si denominamos con α el ángulo que una diagonal hace con la vertical, se deduce que el esfuerzo:

$$i'h' = f'h' \sec. \alpha = C \sec. \alpha \quad (7)$$

De aquí el siguiente principio: *los esfuerzos en cualquier diagonal es igual al esfuerzo cortante, en el recuadro a que pertenece la barra, multiplicado por la secante del ángulo que la barra hace con la vertical.*

136.—APLICACIÓN.—Una armadura tipo Pratt tiene 24 m. de luz, 4 m. de altura entre los ejes de los cordones; ésta dividida en 6 recuadros de 4 m. cada uno. El peso permanente es de 1 tonelada por metro lineal; además debe soportar una carga debida al tráfico de 2 toneladas por metro lineal, para cada una de las armaduras. Accionan en el cordón superior ambas cargas.

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Primero determinemos las fuerzas exteriores:
La carga sobre cada nudo vale:

$$\text{carga permanente } 1 \times 4 = 4 \text{ T.}$$

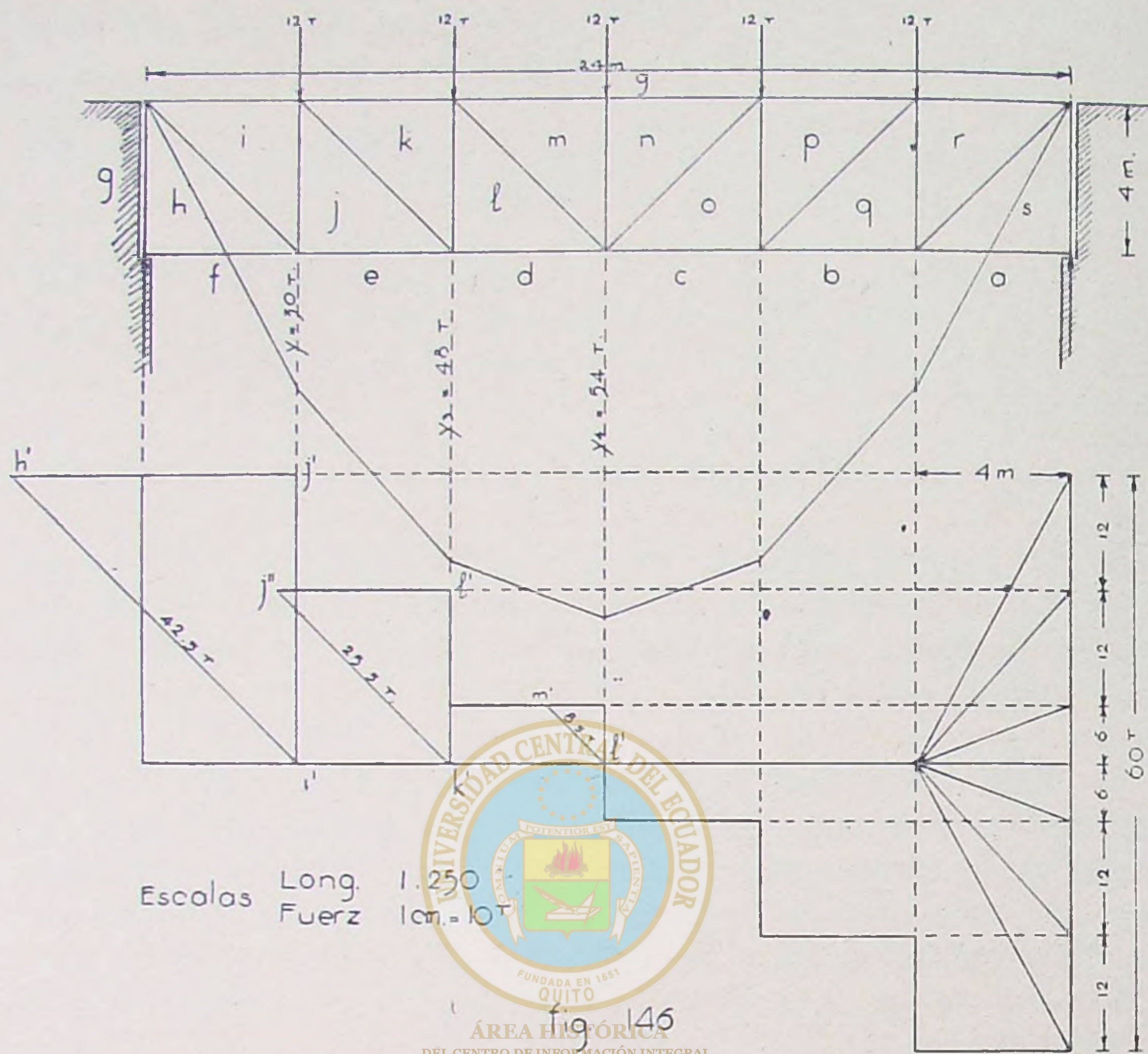
$$\text{carga móvil } 2 \times 4 = 8 \text{ T.}$$

$$\text{Total para cada nudo } 12 \text{ T.}$$

Las reacciones serán iguales entre sí y valen la mitad de la carga total:

$$X = Y = \frac{5 \times 12}{2} = 30 \text{ T.}$$

CÁLCULO DE LOS CORDONES. Las fuerzas exteriores ya conocidas en intensidad y posición, se puede construir el di-



námico de estas fuerzas, tomando una distancia polar igual a altura de la viga, 4 m., y en seguida se traza el funicular que constituye el área representativa de los momentos de flexión. Este funicular fig. 146 se ha trazado tomando como lado de cierre el cordón superior, y corresponde a las dos cargas p y p' como uniformemente repartidas en toda la longitud; puesto que se sabe, que los momentos máximos se encuentra cuando la carga móvil cubre toda la luz.

Las escalas adoptadas son:

Longitudes 1 cm. = 2,5 m.

Fuerzas 1 cm. = 10 T.

La superficie de momentos determina en las verticales trazadas de los diversos nudos, medidas a la escala de fuerzas, los valores numéricos siguientes:

La ordenada $y_1 = 0$, la intensidad en la barra fh opuesta al nudo superior del apoyo no sufre ningún esfuerzo.

$y_2 = 30$ T. es la intensidad común de los esfuerzos de las barras gi opuesto al nudo inferior, y de la barra je opuesto al nudo superior.

$y_3 = 48$ T. es el esfuerzo de intensidad común de la barra kg opuesto al nudo inferior y ld opuesto al nudo superior.

$y_4 = 54$ T. es la ordenada máxima y nos da el esfuerzo en las barras gm y gn , ambas opuestas al nudo medio inferior.

Las demás barras tienen valores iguales a sus homólogas.

Respecto a la naturaleza de los esfuerzos, ya hemos dicho, que el cordón superior sufre compresión y el inferior tracción.

Cuando consta la armadura de pocos nudos, como en el caso presente, es más rápido aplicar la fórmula (2) de la pág. 75, que dice: para una carga uniformemente repartida el momento para un punto x es:

$$M = \frac{p}{2} (lx - x^2)$$

Para el valor de p se pondrá la suma por metro de la carga permanente y móvil.

Para el máximo, que ocurre en la mitad es:

$$M = \frac{pl^2}{8}$$

reemplazando con valores numéricos resulta:

$$M = \frac{(2 + 1) 24^2}{8} = 216 \text{ T. M.}$$

y como el valor del esfuerzo, es el momento dividido por la altura de la viga; se tiene:

$$y_4 = \frac{216}{4} = 54 \text{ T.}$$

valor igual al encontrado en la fig. 146.

CÁLCULO DE LAS DIAGONALES. Sólo para el caso presente, consideraremos la carga móvil o variable como que cubre toda luz de la armadura y deduciremos los esfuerzos de las diagonales para la suma de las dos cargas uniformes.

Estrictamente, no se realiza el esfuerzo cortante máximo para cada diagonal, con esta hipótesis de carga variable; sino que hay que considerar para cada diagonal, la porción de viga que conviene sobrecargar, y sólo para el caso de carga permanente será verdadera esta suposición. Luego habría que hacer dos cálculos:

1º. Con el diagrama del esfuerzo cortante para la carga fija;

2º. Con el diagrama del esfuerzo cortante para carga variable, que es una parábola (arts. 94 y 95).

Pues, el esfuerzo cortante debe ser máximo en el punto de la diagonal, para tener el esfuerzo máximo en la barra.

Con estos antecedentes, el esfuerzo cortante para la suma de las dos cargas, está representado por la ya conocida línea en escalera.

De la extremidad del vector $j'i''$, se dibuja una paralela a la diagonal hi y por el otro extremo una paralela común a las barras horizontales, estas paralelas determinan el punto h' . La magnitud $h'i''$ medida a la escala de las fuerzas, da el esfuerzo de la diagonal hi y de rs , que son simétricas.

Los resultados numéricos son:

$$hi = rs = 42,5 \text{ T. tracción}$$

$$jk = pq = 25,5 \text{ T. »}$$

$$lm = no = 8,3 \text{ T. »}$$

Para las barras verticales o montantes, sabemos que todas están sometidas a compresión y que la magnitud del esfuerzo que sufren, es igual a la resultante de las fuerzas de la izquierda (o de la derecha) de esta barra y que por consecuencia, es dado por el esfuerzo cortante tomado en la vertical que baja del nudo de la barra.

Por consiguiente:

$$ij = rq = 30 \text{ T. compresión}$$

$$kl = op = 18 \text{ T. »}$$

$$mn = 12 \text{ T. »}$$

Hay que anotar, que el montante mn , que está en la mitad de la armadura, sufre un esfuerzo igual a la carga que él lleva. Si esta barra no llevara carga, su esfuerzo sería nulo; y la barra gh sufre un esfuerzo igual a la reacción del apoyo.

137.—*Resumen de las operaciones que hay que efectuar para el cálculo de los esfuerzos en las barras de una armadura.*

Se procede sucesivamente a:

1º.—Determinar las magnitudes y posiciones de las fuerzas exteriores;

2º.—Dibujar el area representativa de los momentos de flexión, cuyo distancia polar en el dinámico es igual a la altura de la viga; y también el area representativa de los esfuerzos cortantes.

3º.—La magnitud del esfuerzo en las barras horizontales, se encuentra midiendo la ordenada y , que es el vector representativo del momento de flexión en la vertical de cada nudo.

4º.—La magnitud del esfuerzo en una diagonal, se determina, en la componente paralela a esta barra, del segmento representativo del esfuerzo cortante, medido en el intervalo de los nudos a los cuales concurre la diagonal.

5º.—La magnitud del esfuerzo en una barra vertical o montante se da en el valor del esfuerzo cortante, en la vertical de cada nudo.

138.—*Análisis de los tres métodos que determinan los esfuerzos en las barras de una armadura.*

En la exposición que precede, hemos hecho aplicación de los métodos de Cremona, Ritter y Culmann, ahora vamos a indicar cuando se debe emplear cada uno de ellos con toda propiedad según los casos de la práctica.

1º.—Se emplea el trazado de Cremona, con frecuencia, para encontrar los esfuerzos de las barras que resultan a causa de la carga fija. Dibujado el polígono de Cremona nos da en una sola operación los esfuerzos de todas las barras.

Para cargas móviles, en cambio no se le emplea, pues conduciría a numerosos diagramas, correspondientes a cada posición de la carga.

Este método, tiene el inconveniente, de que cuando la armadura tiene un número considerable de barras, los errores

del dibujo se acumulan y dan resultados alejados de la verdad; pero haciéndolo con prolijidad se consigue suficiente exactitud para las necesidades de la práctica.

2º.—El método de Ritter, permite encontrar, después de trazado el funicular, los esfuerzos de las barras de los cordones cuando se consideran cargas variables o permanentes.

3º.—El método de Culmann, se emplea sobre todo para determinar los esfuerzos en las barras diagonales y montantes, por medio del diagrama de los esfuerzos cortantes.

Esta operación conduce en primer término, a buscar la posición de la fuerza exterior, que hay que dividirla según las líneas de acción de las tres barras cortadas.



ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

CAPITULO XIII

Cálculo de las armaduras con carga móvil.—Método de las líneas de influencia

139.—*Esfuerzos máximos en las barras diagonales y montantes.—Líneas de influencia para los esfuerzos cortantes.*

Las operaciones gráficas de los artículos precedentes nos permiten, con suficiencia, encontrar los esfuerzos desarrollados en las barras cuando se considera sólo la carga permanente.

Por la ecuación (7) art. 135, sabemos que el esfuerzo en una diagonal es igual, al esfuerzo cortante en aquel punto y multiplicado por la secante del ángulo que la barra hace con la vertical. Luego para encontrar el esfuerzo máximo en una diagonal, a causa de una carga móvil, será necesario hallar el esfuerzo cortante máximo en el recuadro al cual pertenece la barra. Este esfuerzo cortante se lo puede encontrar gráficamente, por medio de una línea de influencia que es semejante a la que habíamos encontrado, en una viga simplemente apoyada (arts. 100, 101 y 102). Hay una pequeña variación que hacer y consiste en el hecho que la carga móvil sobre una armadura está aplicada o relacionada a los nudos de los cordones. Es claro, que esta aplicación de las cargas, afecta solamente al recuadro que esté en consideración; mientras que en los demás recuadros las cargas, sean repartidas o concentradas, tendrán otra disposición.

El esfuerzo cortante es constante entre dos nudos de carga.

Las magnitudes de los esfuerzos en las barras motivados por la carga móvil, se deberán sumar a los producidos por la carga permanente, para obtener los esfuerzos máximos totales.

1º.—*Líneas de influencia para los esfuerzos cortantes con una sola carga móvil.*

Sea una armadura Pratt que tiene 6 recuadros. Se trata de encontrar las líneas de influencia para el esfuerzo cortante en un recuadro cualquiera; por ejemplo el ABCD. El móvil que recorre la armadura es igual a la unidad, $F = 1$, fig. 147.

Supongamos que el móvil avanza de Y a X. Cuando éste se encuentra entre los puntos Y y D, el esfuerzo cortante en el recuadro ABCD es igual a la magnitud de la reacción izquierda (art. 100) que es la única fuerza de este lado.

Hagamos: $C =$ al esfuerzo cortante en un punto cual-

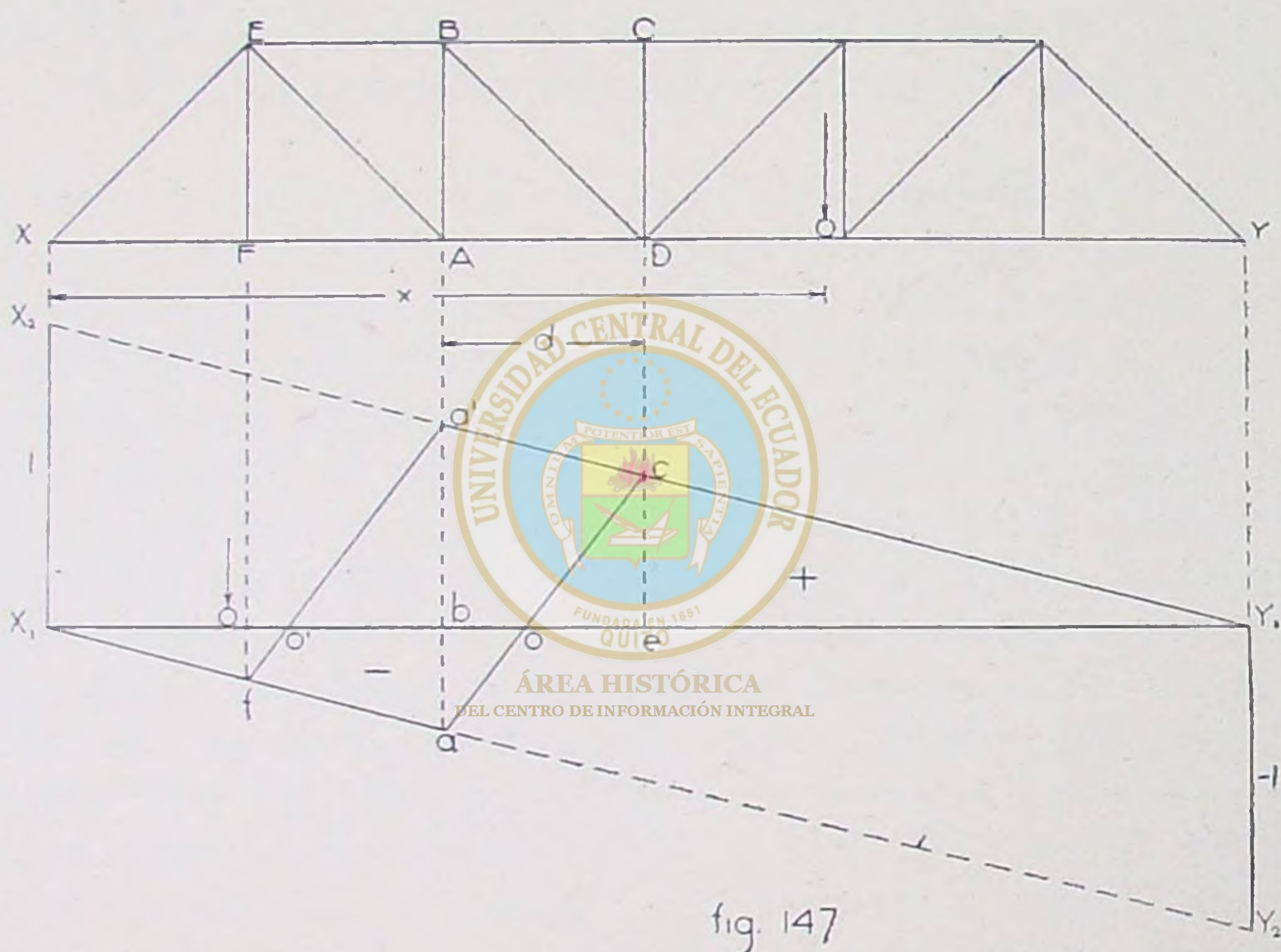


fig. 147

quiera; $l =$ luz de la armadura; $x =$ la distancia del móvil en un momento dado, al apoyo izquierdo.

Se tiene:

$$X = C = \frac{l - x}{l} \cdot 1 \quad (1)$$

ecuación que representa una línea recta. Esta línea la relacionaremos al eje de abscisas X_1, Y_1 , siendo el origen de coordenadas el punto Y_1 ; como x es la variable, la reemplacemos por los valores límites que puede adoptar el móvil.

Si $x = l$, (1) se hace:

$$C = \frac{l-l}{l} = 0$$

luego en el apoyo derecho el esfuerzo cortante es nulo.

Si $x = 0$, (1) se hace:

$$C = \frac{l-0}{l} = 1$$

Estos valores, llevemos como ordenadas a partir del eje X_1Y_1 y nos resulta la línea X_2Y_1 ; pues $X_1X_2 = 1$. Esta magnitud unidad se coloca a una escala conveniente.

Cuando el móvil se encuentra entre los puntos X y A, el esfuerzo cortante, para el recuadro considerado, es igual a la reacción derecha. Este valor es:

$$Y = C = \frac{l-x}{l} \quad (2)$$

Si en la ecuación (2) hacemos $x = l$, resulta:

$$C = -\frac{l}{l} = -1$$

si $x = 0$:

$$C = -\frac{0}{l} = 0$$

Estos valores llevemos como ordenadas a partir de la línea X_1Y_1 , pero en sentido contrario a la anterior, pues son cantidades negativas. Resulta la línea X_1Y_2 .

Pero los valores de los esfuerzos cortantes deducidos de la ecuación (1) sólo son válidos para la región de Y a D, y por lo tanto se la utilizará para la línea de influencia, la porción de recta Y_1c .

Mientras que la ecuación (2) sólo la dedujimos para la región de X a A, y entonces sólo la utilizaremos de la línea de influencia X_1Y_2 , la porción de recta X_1a .

Queda por determinar la porción de línea de influencia relativa al paso del móvil en el recuadro ABCD.

La carga se trasmite a los nudos por el intermedio de las vigas transversales y tendremos entonces, que el móvil colocado dentro del recuadro ABCD, desarrolla en los nudos, reacciones inversamente proporcionales a sus distancias al móvil. Esto es exactamente igual a lo que habíamos dicho al tratar de cargas indirectas (art. 103). Se sabe que para este caso, la línea de influencia es una recta entre los dos nudos sucesivos. Según esto, se puede construir inmediatamente la línea de influencia correspondiente a los esfuerzos cortantes, sin más que trazar la línea inclinada ac , determinada por la proyección de los dos nudos de carga consecutivos.

Luego el área de influencia de los esfuerzos cortantes para el recuadro ABCD es $X_1ao'cY_1$.

Por regla general, para trazar las líneas de influencia de los esfuerzos cortantes, para un recuadro formado por dos nudos de carga adyacentes:

- a).—Se traza las ordenadas $X_1X_2 = 1$ y $Y_1Y_2 = -1$.
- b).—Se une X_2 con Y_1 , y X_1 con Y_2 .
- c).—Sobre estas rectas se proyectan los dos nudos de carga adyacentes; los puntos a y c así determinados se los unen.

Para el recuadro EBAF el área de influencia para el esfuerzo cortante es: $X_1fo'a'Y_1$.

Los puntos o y o' se denominan *puntos neutros* o *de separación de cargas*. Y expresan que el móvil al recorrer de Y_1 a o , produce un esfuerzo cortante positivo, y de o a X_1 un esfuerzo cortante negativo. Y también, que si el móvil gravita en el punto de la vertical de o , cuya ordenada es nula, no produce en el recuadro ABCD esfuerzo cortante alguno.

Observando el área de influencia se deduce: que para producir el esfuerzo cortante máximo, para un recuadro cualquiera, cuando un sólo móvil rueda del un apoyo al otro de una armadura, se le sitúa en el nudo de carga de la derecha de dicho recuadro y se tendrá la ordenada positiva máxima; es decir el esfuerzo cortante máximo positivo. Si se sitúa en el nudo de carga izquierdo, produce el esfuerzo cortante máximo negativo.

La distancia $eo = u$ se deduce de la figura 147. Por triángulos semejantes da:

$$\frac{eo}{ob} = \frac{ce}{ab} = \frac{Y_1 e}{X_1 b}$$

de donde resulta:

$$\frac{oe}{oe + bo} = \frac{Y_1 e}{X_1 b + Y_1 e}$$

sustituyendo valores:

$$\frac{u}{d} = \frac{l_2}{l - d}$$

de donde:

$$u = \frac{d \times l_2}{l - d} \quad (3)$$

en las que d es la longitud de un recuadro y son todos iguales entre sí; l_1 es la distancia del nudo derecho de carga del recuadro considerado al apoyo izquierdo; l_2 de este mismo nudo al apoyo derecho, fig. 148.

2º.—*Líneas de influencias para los esfuerzos cortantes con varias cargas concentradas.*

En el artículo 101, hemos explicado la manera de utilizar estas líneas de influencia para los esfuerzos cortantes, en una viga con apoyos simples. Para armaduras se aplicará exactamente todo lo mismo, cuando se trate de hacer investigaciones con varias cargas concentradas o formando un convoy.

Esta serie de cargas se situarán en la zona positiva, del área de influencia de manera que ΣFy sea un máximo positivo. De igual manera el convoy colocado en la zona negativa del área, nos dará $-\Sigma Fy$ un máximo negativo.

De donde se deduce que la carga que va a la cabeza del convoy, debe situarse en el nudo que forma el recuadro en consideración; es decir en los puntos donde las ordenadas de las líneas de influencia son máximas.

3º.—*Líneas de influencia para los esfuerzos cortantes con carga uniformemente repartida y de longitud variable.*

Todo lo que hemos dicho en el artículo 102, relativo a carga uniforme, se aplica sin reserva alguna, a armaduras.

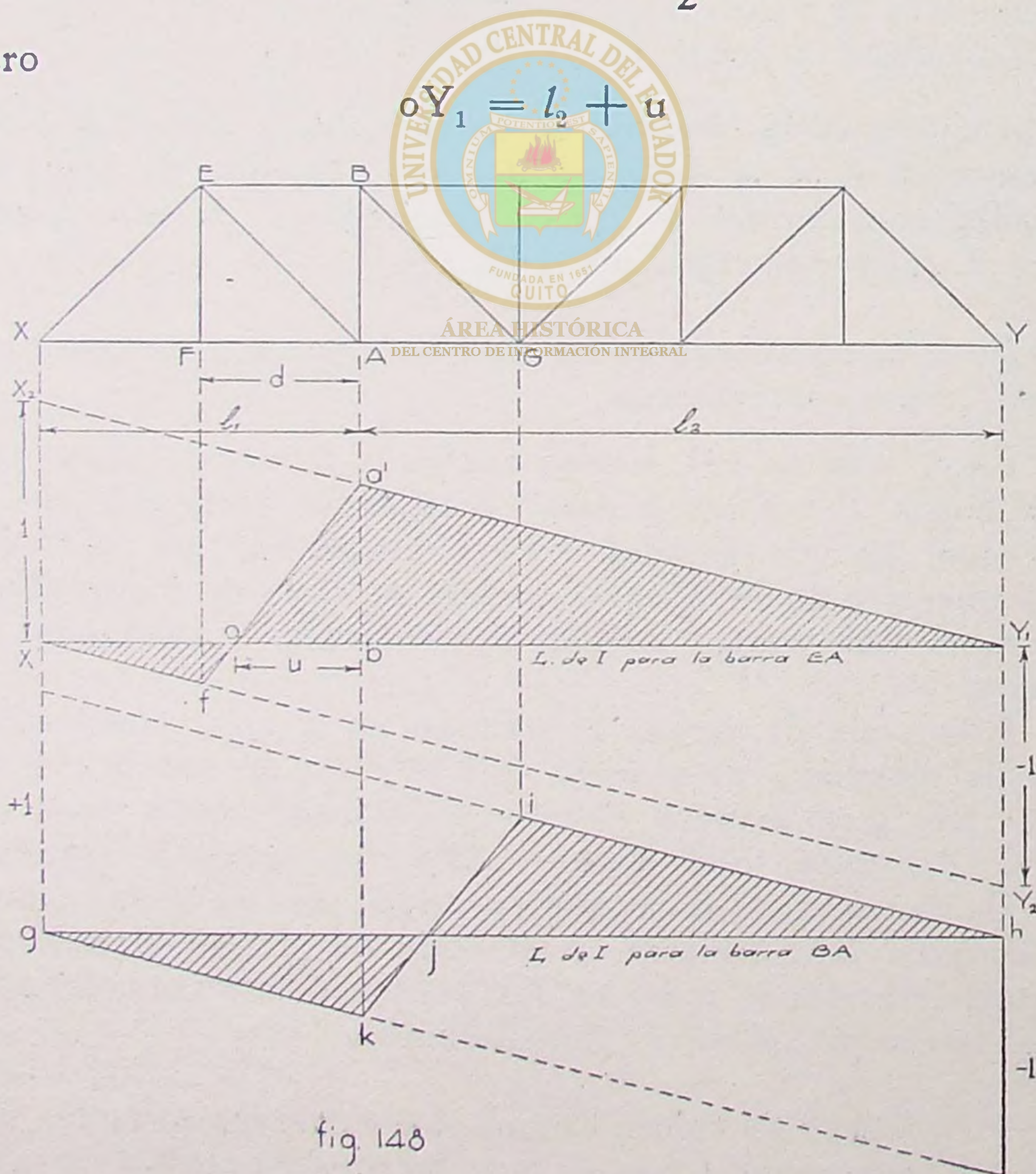
Sin embargo insistiremos en lo que significa el punto neutro o , fig. 148: para obtener el esfuerzo cortante máximo positivo en el recuadro ABEF colocaremos la carga uniforme de o a X_1 . Así se tiene los esfuerzos cortantes máximos para el recuadro ABEF, sufriendo la diagonal EA tracción en el primer caso y compresión en el segundo.

Sí llamamos p la intensidad de la carga uniforme por unidad de longitud, el esfuerzo cortante máximo positivo para el recuadro ABEF será:

$$C_m = p \times \text{área } oa' Y_1$$

$$\text{área } oa' Y_1 = \frac{oY_1 \times a'b}{2}$$

pero



reemplazando el valor de u dado en la ecuación (3) se tiene:

$$oY_1 = l_2 + \frac{d \cdot l_2}{l-d} = \frac{l \cdot l_2}{l-d}$$

y como

$$ba' = \frac{l_2}{l}$$

entonces el área

$$oa' Y_1 = \frac{l \cdot l_2}{l-d} \times \frac{l_2}{2l} = \frac{l_2^2}{2(l-d)} \quad (4)$$

luego el esfuerzo cortante máximo para el recuadro ABEF es:

$$C_m = p \cdot \frac{l_2^2}{2(l-d)} \quad (5)$$

Si se hace l_2 la variable, la ecuación (5) representa una parábola.

Para el recuadro del apoyo izquierdo será entonces:

$$C_m = p \cdot \frac{(l-d)^2}{2(l-d)} = p \cdot \frac{l-d}{2} \quad (6)$$

Para el recuadro del apoyo derecho es; $l_2 = 0$ y se tiene:

$$C = 0.$$

Resulta muy sencilla la representación de los valores límites, cuando todos los recuadros tienen una misma longitud.

En efecto, la ecuación (5) permite una interpretación gráfica: fig. 149.

Se calcula primero el valor de la carga móvil continua para toda la luz l y para cada recuadro d ; entonces la reacción del apoyo X será la ecuación (6)

$$X = p \cdot \frac{l-d}{2}$$

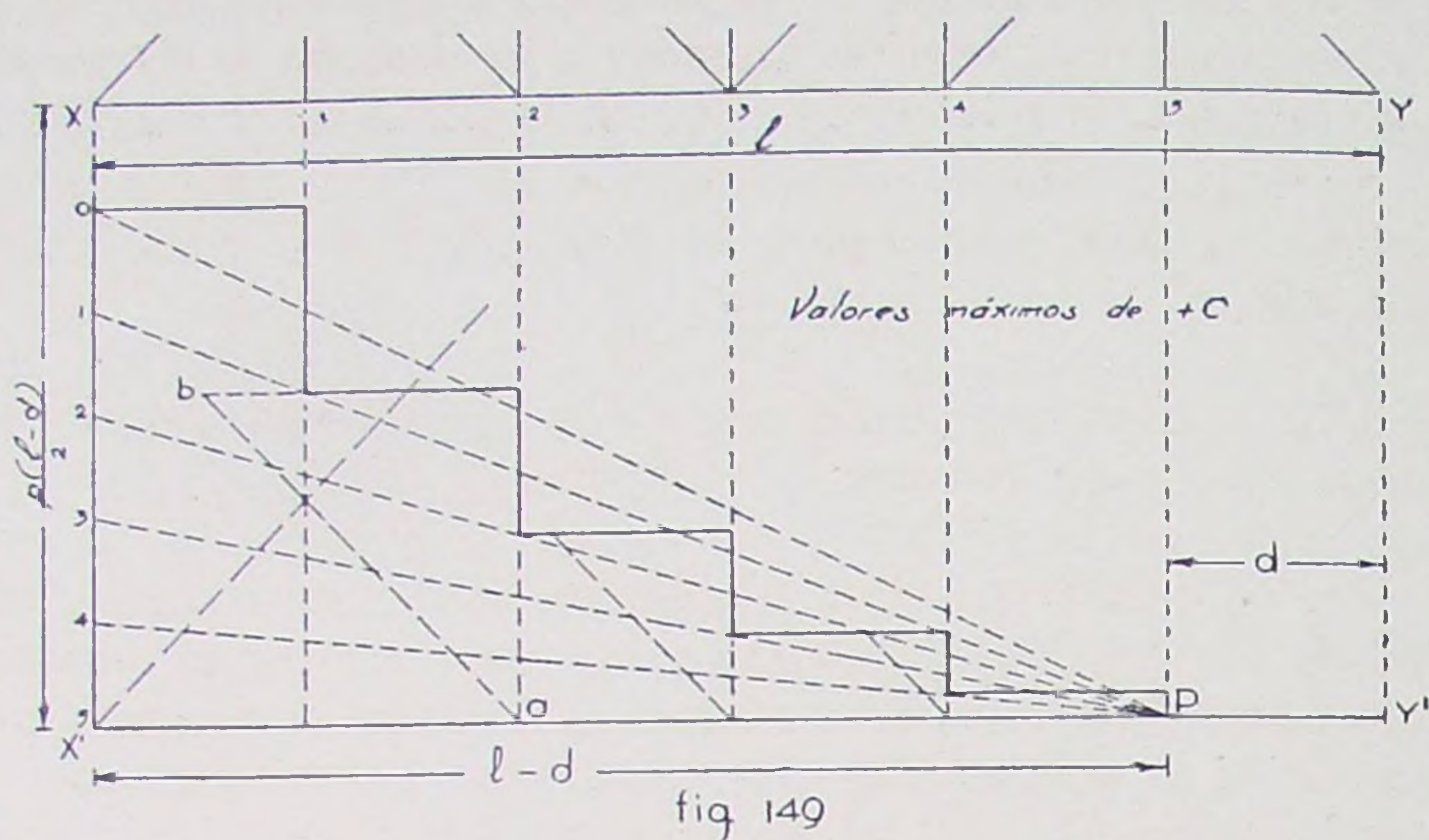


fig 149

la que se traslada a escala en la vertical de este apoyo. Cuando los recuadros son iguales, las cargas en cada nudo son iguales y se divide la línea oX_1 en el número de nudos que soportan la calzada del camino; luego se trazan radios polares del polo P , de distancia polar $l - d$.

Las intersecciones de las verticales de los nudos 1, 2, 3, 4 y 5 con los radios polares 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente, son los puntos de las horizontales para el trazado en gradería para el diagrama de los esfuerzos cortantes. La envolvente de la línea en gradería será una parábola idéntica a la que resultara trazando para una viga simple, cuya luz fuera $l - d$ y sometida a la misma carga variable, (art. 95).

La ordenada medida a la escala de las fuerzas, en la línea media de cada recuadro nos dará el esfuerzo cortante máximo positivo, cuando una carga uniforme y variable recorre del apoyo derecho al izquierdo.

La parábola para los momentos negativos estará dispuesta simétricamente, poniendo el mayor de los esfuerzos cortantes en el apoyo derecho.

Determinados para los diferentes casos el esfuerzo cortante máximo, se aplicará lo dicho en el artículo 135, trazando paralelas a las diagonales respectivas y limitadas por las paralelas de la línea en gradería del esfuerzo cortante. Así para la diagonal que concurre al nudo 2, el esfuerzo de esta barra será ab .

Para los montantes, se sabe que los esfuerzos son iguales a los esfuerzos cortantes tomados a la derecha de la barra; estos valores se los determina inmediatamente en el diagrama.

Además también representamos en la fig. 148 la línea de influencia $jkíh$ que es para el montante BA o para la diagonal BG.

140.— *Esfuerzos máximos en los cordones. Líneas de influencia para los momentos de flexión.*

Por el método de Ritter, sabemos que el esfuerzo en una barra de los cordones superior e inferior, es igual al momento de flexión en el nudo opuesto a la barra y dividido por la altura de la armadura. Es claro, que para determinar el esfuerzo máximo que sufren estas barras cuando soportan cargas móviles, se deberá primero encontrar el momento de flexión máximo.

Líneas de influencia para los momentos de flexión con sólo una carga móvil. Vamos a demostrar que el diagrama de influencia de los momentos, para un nudo de carga cualquiera

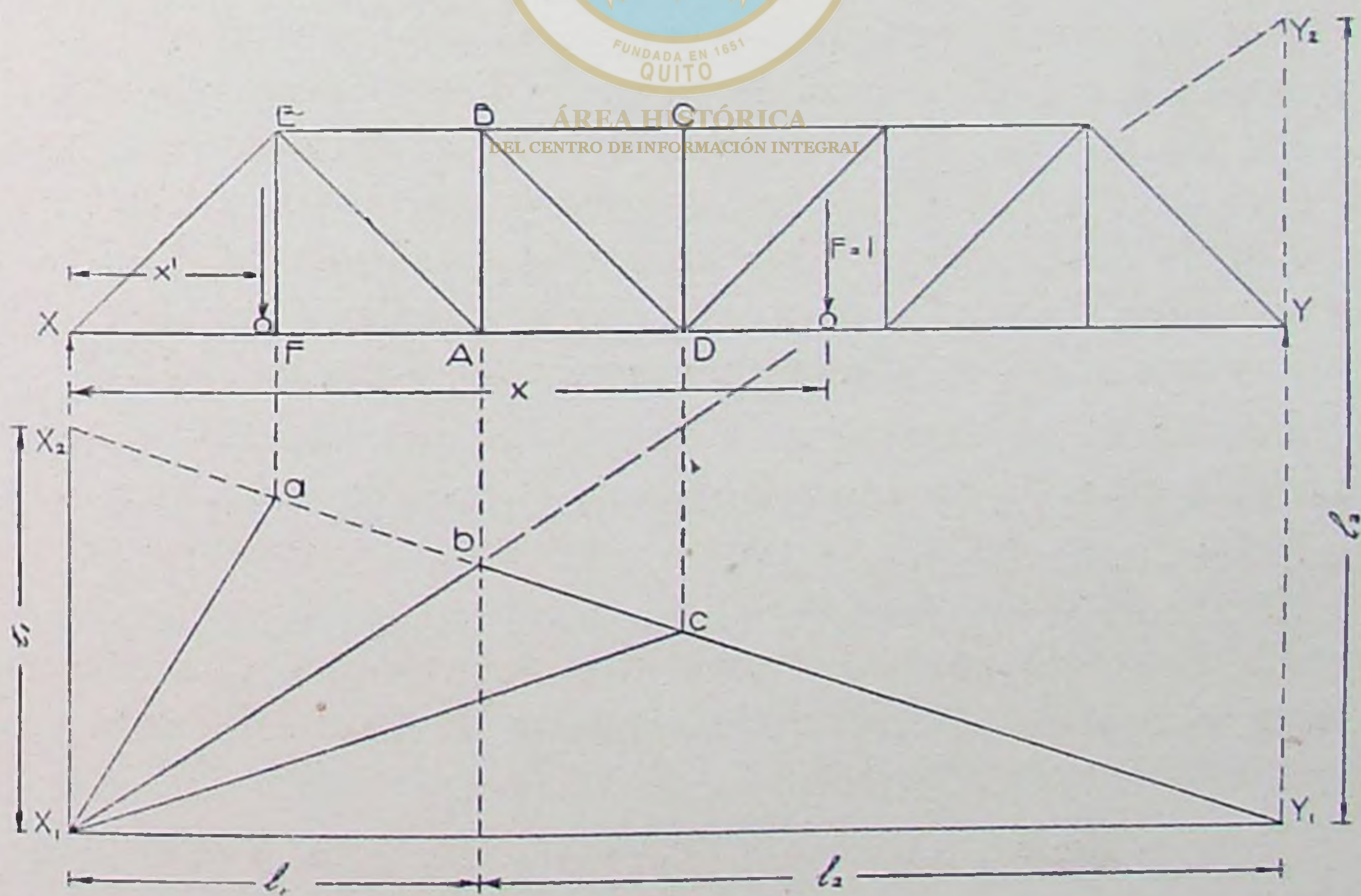


fig. 150

de una armadura, es idéntico al diagrama de una viga simple, para el mismo punto, art. 104.

Según el método de Ritter: el esfuerzo de una barra horizontal está representado por el momento de las fuerzas tomadas a la izquierda de la sección, con relación al nudo opuesto a la barra y dividido por la altura de la viga (ecuación 3, art. 132), o sea:

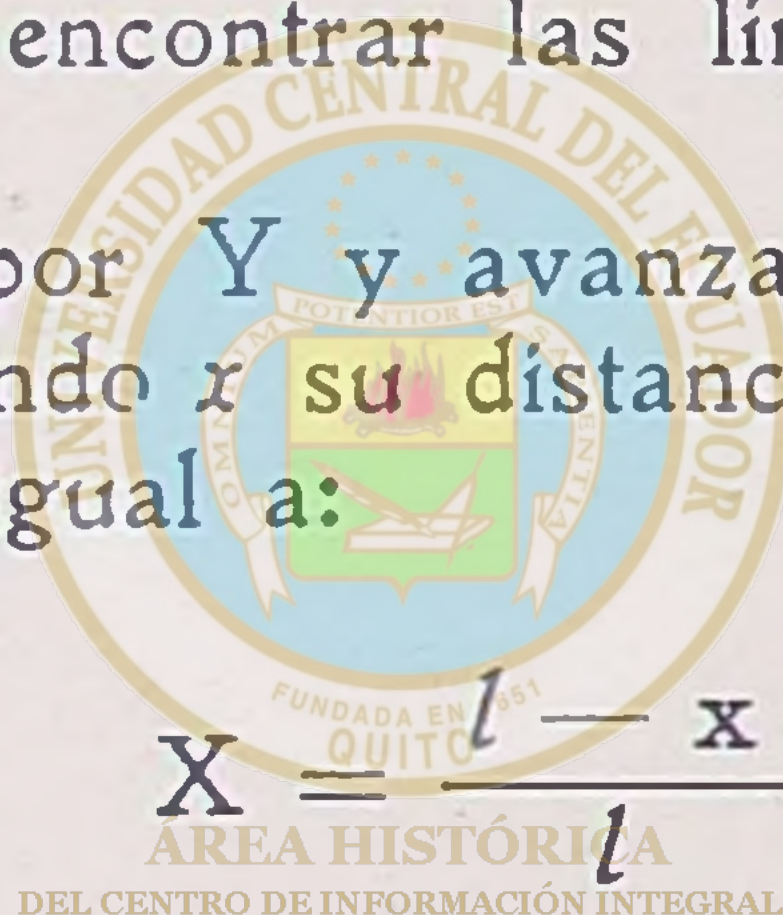
$$\frac{M}{h}$$

Si dibujamos el diagrama de momentos correspondiente a un nudo carga y relativo a una carga móvil igual a la unidad, habremos encontrado la línea de influencia de momentos correspondiente a este nudo.

Hay que tener presente, que estas líneas de influencia nos dan el momento en el nudo de carga considerado, para cada posición del móvil, cuando rueda del un apoyo al otro.

Propongámonos encontrar las líneas de influencia para el nudo de carga A.

El móvil entra por Y y avanza hacia X: cuando está entre Y y D, y llamando x su distancia al apoyo X, se tiene que esta reacción es igual a:



y el momento con relación a A es:

$$M = \frac{(l - x)}{l} l_1 \quad (7)$$

ecuación idéntica a la que habíamos encontrado para una viga simple (ecuación 14, art. 104).

Si hacemos variar x , la ecuación (7) representa una recta.

Para $x = 0$; $M = l_1$

para $x = l$; $M = 0$.

Esta recta es entonces la $Y_1 X_2$, tomando la distancia $X_1 X_2 = l_1$; pero es utilizable sólo la porción $Y_1 b$.

Sí el móvil se encuentra en un punto cualquiera, a una distancia x' del apoyo X, a la izquierda de A, la reacción es:

$$X = \frac{l - x'}{l}$$

y el momento de las fuerzas de la izquierda con relación a A es:

$$\mathcal{M} = \frac{l - x'}{l} l_1 - 1 (l_1 - x') = \frac{x' (l - l_1)}{l} = \frac{x' l_2}{l} \quad (8)$$

ecuación que también representa una recta.

Sí hacemos variar x' se encuentra:

$$\text{para } x' = 0 \quad \mathcal{M} = 0$$

$$\text{para } x' = l \quad \mathcal{M} = l_2$$

poniendo $Y_1 Y_2 = l_2$ y uniendo el punto Y_2 a X_1 , tendremos la recta de la ecuación (8); pero es válida para la sección $X_1 b$.

Se tiene así representada la línea de influencia para el nudo A por el triángulo $X_1 b Y_1$.

Si en las ecuaciones (7) y (8) hacemos $x = l_1$ y $x' = l_1$; es decir cuando el móvil está situado en A, se tiene dos expresiones idénticas: lo que quiere decir que la intersección de las dos líneas $X_2 Y_1$ y $X_1 Y_2$ está en la vertical bajada de A.

Esta observación, nos conduce a trazar el triángulo de influencia más sencillamente: se hace $X_1 X_2 = l_1$ y se une X_2 con Y_2 , la intersección de la vertical bajada por A con esta última línea determina el vértice del triángulo. Así el triángulo de influencia para el nudo F es $X_1 a Y_1$; y para el nudo D es $X_1 c Y_1$.

Las ordenadas respectivas, en el triángulo de influencia, se medirán a la escala de longitudes, que multiplicadas por la carga, nos darán los momentos. Estos momentos, se dividirán por la altura de la viga y tendremos el esfuerzo de la barra opuesta al nudo considerado.

141.—*Líneas de influencia para una armadura Warren.*

En la fig. 151 representamos, esquemáticamente, una armadura tipo Warren, que soporta la calzada del camino en

el cordón superior; de suerte que todos los nudos de la carga están en él.

Para determinar el esfuerzo de la barra ab , la línea de influencia de momentos para el nudo C , es el área $aecb$, limitada por la línea ec como si fuera carga indirecta (art. 106). Esta línea, se determina proyectando los dos nudos de carga A y B , que le abarcan al nudo C que es descargado, hasta que encuentren a las dos líneas trazadas por el método ordinario: haciendo $aa' = XC$.

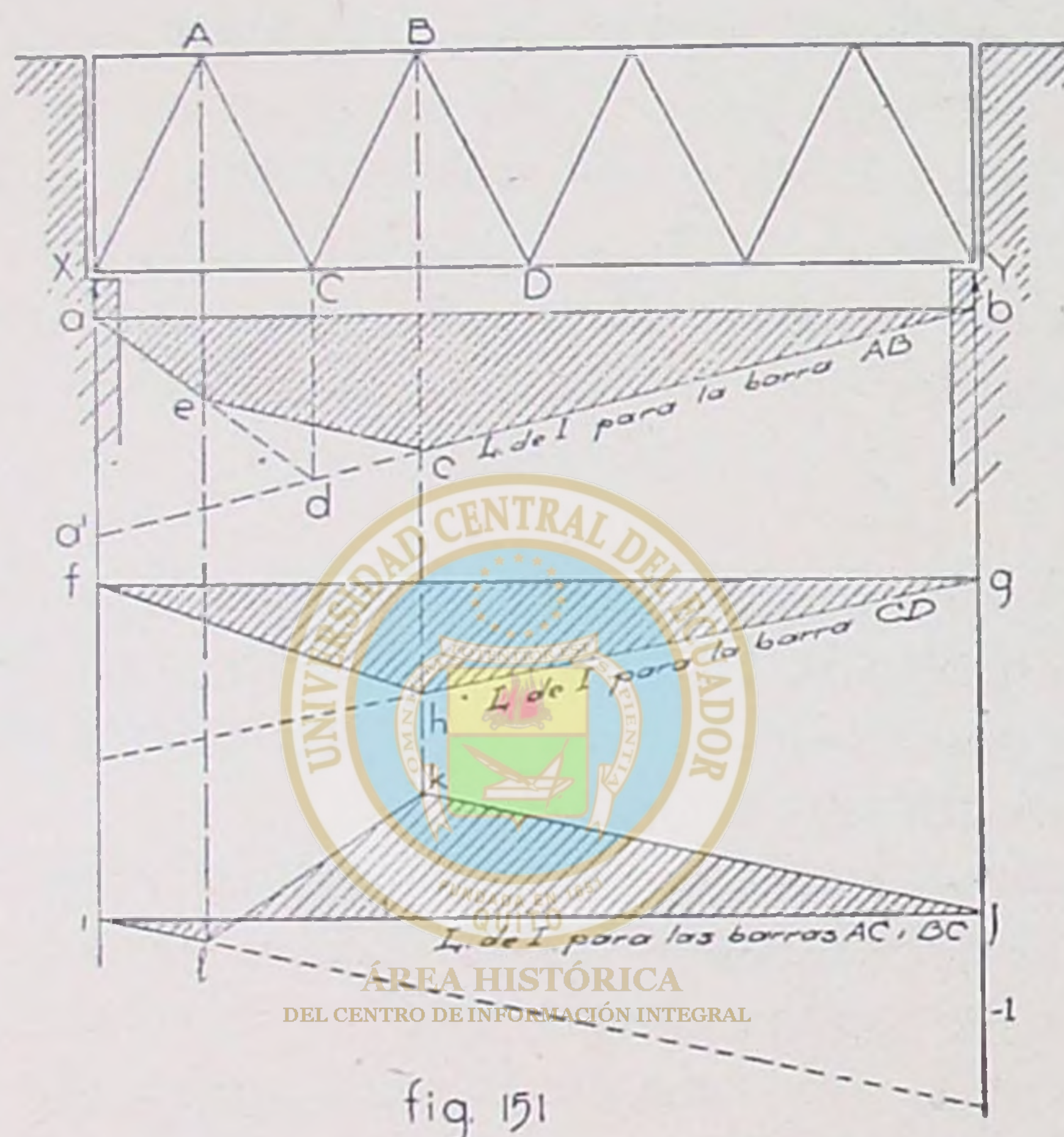


fig. 151

La línea de influencia para la barra CD del cordón inferior, es el área fhg . Para este cordón, el área del triángulo, trazado por los métodos ordinarios, será siempre el área de influencia; sin que haya necesidad de quitar nada de su superficie.

Representamos también el diagrama de influencia para el esfuerzo cortante, el que nos permitirá deducir los esfuerzos de las diagonales. Así, para la diagonal AC , el área de influencia es $iekj$.

Las magnitudes de los esfuerzos de las dos diagonales, AC y CB , en valor absoluto, son iguales, porque tienen el mismo esfuerzo cortante; pero en cambio, el signo es diferente, así que para la una será compresión, mientras que para la otra será tracción.

142.—*Lineas de influencia de los momentos de flexión para varias cargas concentradas formando convoy y también para carga uniforme, de longitud variable.*

Los métodos de cálculos, no difieren en nada de los empleados para vigas simples sobre dos apoyos; únicamente es necesario tener en cuenta de la repartición de las cargas por medio de las vigas transversales. Por consiguiente, para la utilización de las *áreas de influencia*, no tenemos nada que añadir a lo explicado en los artículos 105 y siguientes. Para un nudo dado de una viga triangulada, la búsqueda del momento de flexión es fácil cuando el área de influencia se ha dibujado; especialmente se tendrá en cuenta, para este trazado, el nudo que es de carga y el que no lo es; pues para este último se hará la limitación del área de influencia como se indica en la fig. 151.

143.—Por lo visto, aparece que las barras de una armadura de puente, sufren el máximo esfuerzo, cuando la carga móvil cubre toda luz. Esto es cierto en lo que se relaciona a los cordones superior e inferior. Mientras que las barras diagonales y verticales sufren un esfuerzo mayor, cuando la carga móvil cubre la porción más larga de la armadura; de manera que si las secciones transversales de estas barras son suficientes para una carga uniforme en todo el puente, pueden resultar débiles para una carga parcial. Es por esto, que las áreas de influencia son de gran ayuda, cuando se trata de investigar los esfuerzos que se desarrollan en las barras diagonales y montantes.

144.—*APLICACIÓN.—Sea un puente de carretera que tiene dos armaduras simétricas, tipo Pratt con un ancho del camino de 6,50 m. de manera que la calzada sea de 4,50 m y 1 m. de aceras para cada lado. La luz es 40 m., dividida en 8 recuadros de 5. m. y es de tablero inferior.*

Estas armaduras deben soportar:

1º. *La carga permanente debido al peso de las mismas armaduras y al de la calzada del camino;*

2º. *Una carga móvil uniformemente repartida sobre las aceras de 0,4 toneladas por metro cuadrado; y*

3º. Una carga móvil uniformemente repartida, sobre la calzada de 0,6 toneladas por metro cuadrado.

La carga móvil será de longitud variable y podrá cubrir toda la luz del puente.

Se necesita determinar los esfuerzos que se desarrollan en cada una de las barras, tanto horizontales como inclinadas.

En la fig. 152 se da esquemáticamente una de las armaduras.

1º. CARGA PERMANENTE.—Para conocer a priori la carga permanente, hay que recurrir a una fórmula empírica, que nos de una idea respecto del peso real de obra. Tomemos la fórmula de Schuebler, (art. 128), que da el peso total para un metro de longitud de puente:

$$p = 0,042 \times l + 3,6 \text{ T/m lineal}$$

reemplazando valores:

$$p = 0,042 \times 40 + 3,6 = 5,28 \text{ T/m lineal}$$

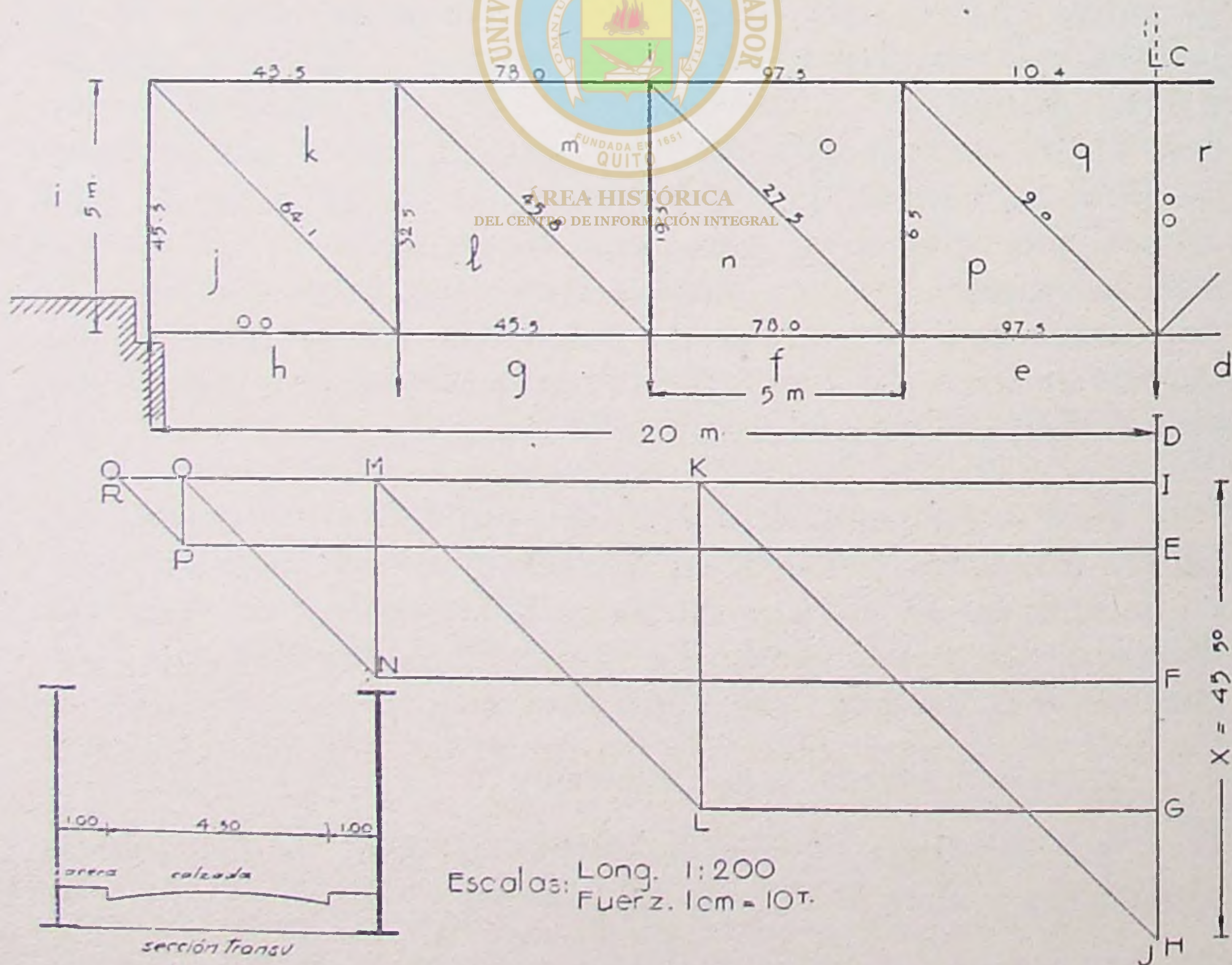


Fig. 151-a

El peso total de todo el puente será:

$$5,28 \times 40 = 211,20 \text{ toneladas;}$$

lo que soporta cada armadura será:

$$\frac{211,20}{2} = 105 \text{ T.}$$

para cada nudo de carga es:

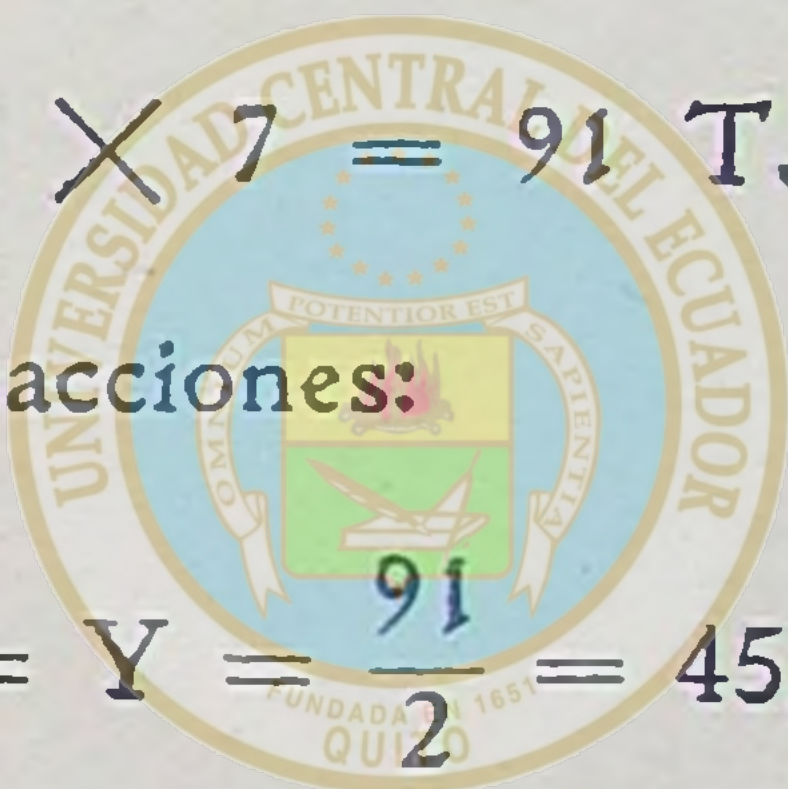
$$\frac{105}{8} = 13 \text{ T.}$$

La carga total que interviene en los cálculos es por consiguiente:

$$13 \times 7 = 91 \text{ T.}$$

Magnitud de las reacciones:

$$X = Y = \frac{91}{2} = 45,5 \text{ T.}$$



ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Con estos valores, tracemos el dinámico DEFGHI, que son las cargas que accionan en la mitad izquierda de la armadura. Por su simetría, no hay necesidad de dibujar el polígono de Cremona, para toda la armadura, es suficiente para la mitad.

El trazado es sencillo y fácil de seguir.

En las respectivas barras damos el valor del esfuerzo que sufre a causa de la carga permanente.

La barra *hj*, no soporta nada, lo mismo que la barra vertical *qr*. Se puede suprimir esta barra sin que el sistema deje de ser indeformable; es útil para facilitar la construcción del puente. Las barras *ij* y su simétrica soportan solas la reacción del apoyo.

Ya sabemos: el cordón superior compresión, el inferior tracción; las diagonales tracción y las verticales compresión.

Como es más propia esta armadura, para llevar el tablero en el cordón superior, se tendrá en cuenta, para este caso, que las barras sufren los mismos esfuerzos, a excepción de

los montantes que aumentan de una magnitud igual a la carga que lleva en el nudo a que pertenecen, así por ejemplo: el montante *kl* sufre, según la fig. 151-a, 32,5 toneladas; mientras que si fuera de tablero superior sería $32,5 + 13 = 45,5$ T. El montante de la mitad *qr*, en el primer caso es cero, y en el segundo es 13 T.

2º. CARGAS MÓVILES.—Se sabe ya que los momentos de flexión máximos para cada punto, se obtienen haciendo actuar la carga completa en todo el puente.

Tomemos una sobrecarga de la calzada de 0,6 T. por metro cuadrado; por metro lineal será:

$$0,6 \times 4,50 = 2,7 \text{ T.}$$

La sobrecarga de las aceras, por metro lineal es de:

$$0,4 \times 2 = 0,8 \text{ T.}$$

En total, tenemos por metro lineal:

$$2,7 + 0,8 = 3,5 \text{ T.}$$

Para cada armadura y por metro lineal es:

$$\frac{3,5}{2} = 1,75 \text{ T/m}$$

luego para cada nudo es:

$$1,75 \times 5 = 8,75 \text{ T}$$

a) *Momentos de flexión. Cálculo de los cordones.*

Tracemos la parábola para la carga uniformemente repartida de 1,75 T. por metro lineal. Entonces la ordenada máxima en la mitad de la luz vale:

$$\mathcal{M}_m = \frac{pl_2}{8} = \frac{1,75 \times 40^2}{8} = 350 \text{ T. M.}$$

En la figura 152, hacemos a una escala conveniente (1 cm. = 100 T. M.), $BD = 350$ T. M. y por medio del

procedimiento dado en el artículo 62, se traza la parábola, determinando especialmente los puntos en las verticales bajadas de los nudos.

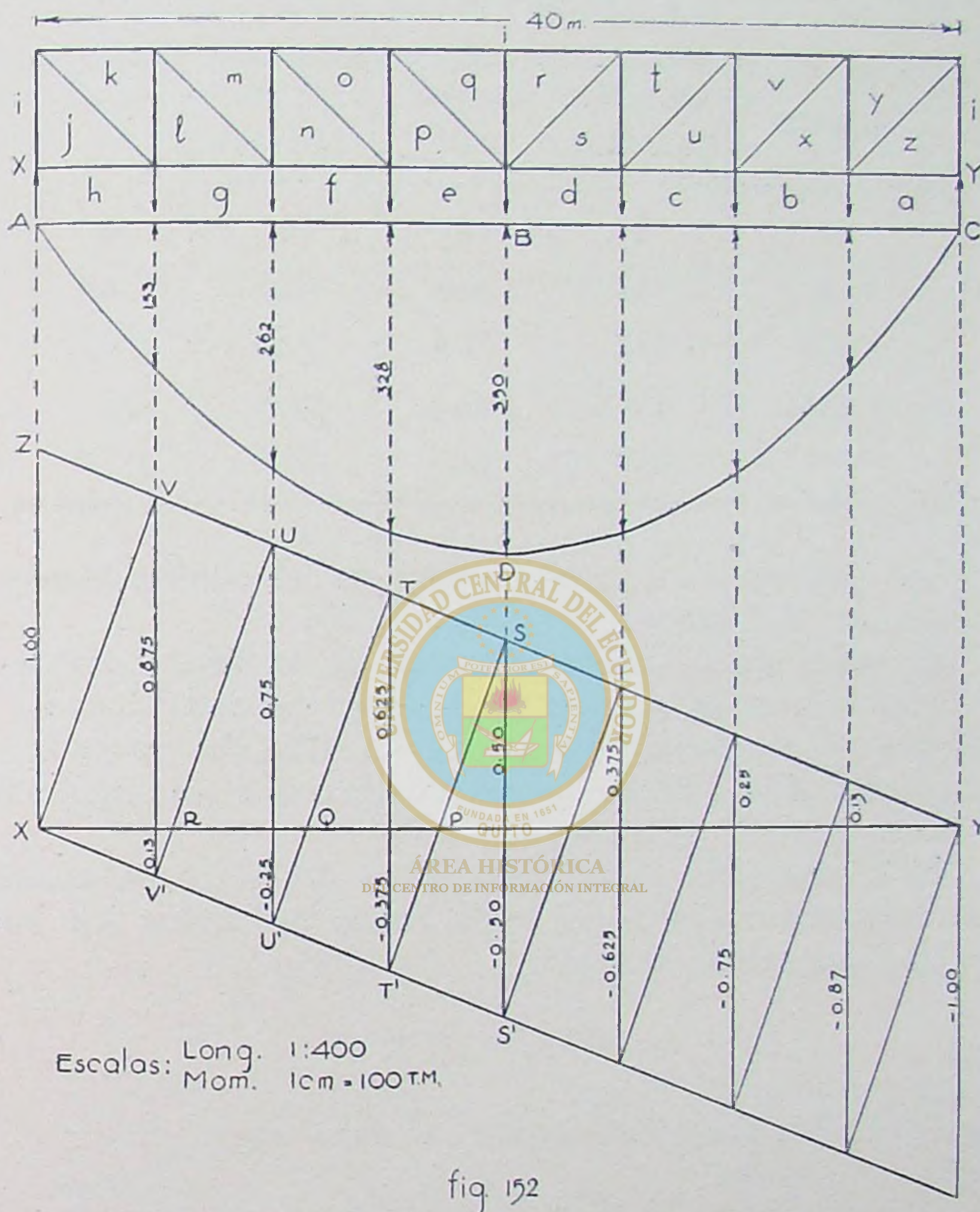


fig. 152

Esta parábola es la ADC. El polígono representativo de los momentos se sabe que está inscrito en esta parábola. Mediremos en las verticales de cada nudo la ordenada correspondiente que nos da el momento. Estos valores numéricos se encuentran en cada ordenada de la fig. 152.

Para cada barra de los cordones, el esfuerzo se encuentra dividiendo el momento en el nudo opuesto, por la altura de la armadura.

Estos valores para cada barra se da en el cuadro siguiente:

I.—CÁLCULO DE LOS CORDONES EN TONELADAS

BARRAS	MOMTS. MAX. CARGA MOVIL	ESF. MAX. M/h	ESF. MAX. CARGA PERM.	TOTAL F
jh	0	0	0	0
ik-lg	153	30,6	45,5	76,1
im-nf	262	52,4	78,0	130,4
io-pe	328	65,6	97,5	163,1
iq	350	70,0	104,0	174,0

Las barras sufren compresión en el cordón superior y tracción en el inferior.

El valor de la última columna de la tabla, nos servirá para determinar la sección transversal de cada barra. Los reglamentos aconsejan: que este valor total del esfuerzo, debe aumentarse de un décimo, para contrarestar los esfuerzos dinámicos.

Si llamamos F al valor numérico de la última tabla; A, la sección transversal neta de la barra, deducidos los huecos para los remaches, se tiene:

$$F' = 1,10 \times F$$

luego para el trabajo del material se debe tener:

$$R = \frac{1,10 F}{A} \leq 1.300 \text{ kg./cm}^2.$$

b) *Esfuerzos cortantes. Cálculo de los esfuerzos de las diagonales.*

Para los esfuerzos cortantes debido a cargas móviles, es mucho más sencillo trazar las líneas de influencia; teniendo en cuenta, que las vigas transversales, sólo transmiten las cargas a los nudos.

El diagrama inferior de la fig. 152, nos representa las líneas de influencia para todos los casos posibles en que la carga uniforme y de longitud variable, produce el esfuerzo cortante máximo; en efecto:

Para el primer recuadro de la izquierda, el área que representa el esfuerzo cortante máximo es XVY , tiene un solo signo, puesto que toda el área se encuentra sobre XY .

Para el segundo recuadro el área de influencia es $XV' RUY$; esta área tiene dos zonas, la superior positiva, la inferior negativa.

Con estas observaciones los valores numéricos son:

Primer recuadro:

$$\text{esf. cort. posit., área } XVY . p = \frac{40 \times 0,875}{2} 1,75 = 30,62 \text{ T.}$$

$$\text{» » negat.} \dots\dots\dots = 0.$$

Segundo recuadro:

$$\text{esf. cort. posit., área } RUY . p = \frac{34,3 \times 0,75}{2} 1,75 = 22,50 \text{ T.}$$

$$\text{» » negt., » } XV'R . p = \frac{5,7 \times 0,13}{2} 1,75 = -0,65 \text{ T.}$$

Tercer recuadro:

$$\text{esf. cort. posit., área } QTY . p = \frac{28,6 \times 0,625}{2} 1,75 = 15,64 \text{ T.}$$

$$\text{» » negt., » } XU'Q . p = \frac{11,4 \times 0,25}{2} 1,75 = -2,49 \text{ T.}$$

Cuarto recuadro:

$$\text{esf. cort. posit., área } PSY . p = \frac{23 \times 0,50}{2} 1,75 = 10,06 \text{ T.}$$

$$\text{» » negt., » } XT'P . p = \frac{17 \times 0,375}{2} 1,75 = -5,58 \text{ T.}$$

Siguiendo para la otra mitad de la armadura los valores se repiten. No hay necesidad de continuar, porque las barras simétricas sufren esfuerzo máximo iguales.

Los esfuerzos cortantes negativos, para los cálculos de las secciones de las barras se tomarán en cuenta, no estos valores que acabamos de encontrar, sino la diferencia entre los valores negativos dados arriba y los valores positivos de los esfuerzos cortantes debido a la carga permanente.

Si todos los esfuerzos cortantes positivos a causa de la carga fija, son mayores, respectivamente, a los esfuerzos cortantes negativos debidos a la carga móvil, se deduce que todas las diagonales no cambian el signo del esfuerzo cuando actúa esta última carga. Si hay algún valor negativo, debido a la carga móvil, mayor que el positivo debido a la carga permanente, entonces la diagonal de este recuadro cambia de signo y por lo tanto hay que poner una *contra-diagonal* que soporte un esfuerzo igual a esta diferencia.

II. CÁLCULO DE LAS DIAGONALES EN TONELADAS

BARRAS	C. MAX. CARGA MOVIL	ESFUERZOS		TOTAL
		CARGA MOVIL 1,41 x F	CARGA PERM.	
jk	30,62	43,17	64,1	107,27
lm	22,50	31,72	45,8	77,52
no	15,64	22,05	27,5	49,55
pq	10,06	14,18	9,0	23,18

III. CÁLCULO DE LAS VERTICALES EN TONELADAS

BARRAS	ESFUERZOS		TOTAL
	CARGA MOVIL	CARGA PERM.	
ij	30,62	45,5	76,12
kl	22,50	32,5	55,00
mn	15,64	19,5	35,14
op	10,06	6,5	16,56
	5,00	5,0	5,50

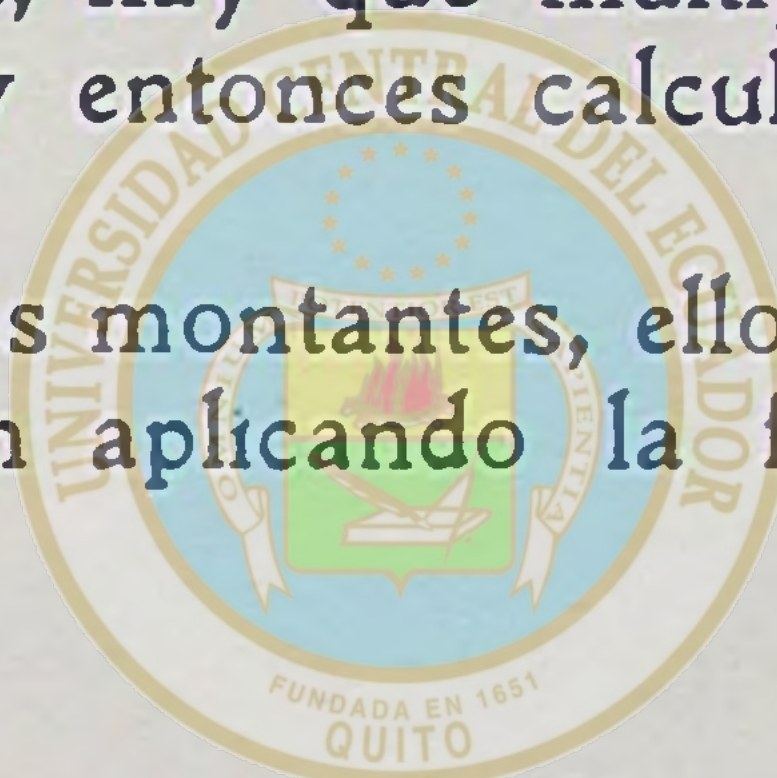
En la tabla II, 2ª. columna, se da el valor de los esfuerzos cortantes máximos. Para encontrar el esfuerzo de una diagonal hay que multiplicar este valor por la secante del ángulo que esta barra hace con la horizontal. Como el ángulo es de 45° y $\sec. 45^\circ = 1,41$, multiplicaremos por este coeficiente todos los valores dados por la tabla. Estos valores están en la tercera columna, que sumada a la cuarta, que son los esfuerzos debidos a la carga permanente, nos da los esfuerzos totales máximos que pueden sufrir las diagonales.

Es conveniente añadir a este último valor, un 10 % para contrarrestar los esfuerzos secundarios que pueden desarrollarse.

En la tabla III están los valores de los esfuerzos cortantes encontrados arriba y sabemos que los esfuerzos de los montantes son iguales a valores. También hemos sumado con el esfuerzo que sufren a causa de la carga permanente, para encontrar el esfuerzo total.

Estos valores totales, hay que multiplicar por un coeficiente dinámico de 1,10 y entonces calcular la sección transversal.

En lo que atañe a los montantes, ellos sufren compresión y se calculará su sección aplicando la fórmula de Rankine para columnas.



ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Dibujado por mi alumno Antonio Rossi.

Fotografado por Antonio Guerrero.