Por el Ing. Alfredo Reyes A.

ESTUDIO ESTATICO DE LOS SISTEMAS DEFORMABLES

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1651
QUITO
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Cuando se estudia la estática de los cuerpos sólidos, se los considera a éstos como formados por una agrupación de puntos materiales y hay lugar, entonces, a clasificar a estas agrupaciones llamadas *sistemas* en dos categorías:

a).—Si se supone que las distancias mutuas entre los diversos puntos materiales del sistema permanecen invariables bajo la acción de las fuerzas exteriores que sobre ellos actúan, el cuerpo sólido se llama *invariable o indeformable* y su estudio se completa admitiendo después pequeñas deformaciones, llamadas deformaciones elásticas:

b).—Cuando la distancia entre los puntos materiales son variables por la naturaleza misma del cuerpo sólido que constituyen y a causa de las fuerzas exteriores, el sistema se llama *deformable*.

A esta segunda categoría pertenecen los cables, cadenas, alambres, cuerdas, etc.; a estos sistemas, cuando están sometidos a la acción de las fuerzas exteriores sin que produzcan movimiento, se les aplica también las ecuaciones generales del equilibrio estático; pero, para completar su estudio, es preciso determinar la forma o figura que adopta el cuerpo deformable, cuando queda en equilibrio.

En el presente estudio quiero indicar algunas nociones sobre estos sistemas deformables y sus aplicaciones más interesantes.

Sistemas deformables.—Desde luego, fácil es comprender que, por la naturaleza misma de los sistemas deformables, no pueden en ninguna forma trabajar a compresión; en cambio, son esencialmente aptos para resistir a los esfuerzos de extensión.

Sabido es que para que dos fuerzas estén en equilibrio, dichas fuerzas deben ser iguales y directamente opuestas. Por consiguiente, si se fija por un extremo un cable o una cuerda flexible y se le aplica por el otro extremo una fuerza de tracción de P kg., la cuerda se pone tensa; cualquier sección a lo largo de toda la longitud comprendida entre el extremo fijo y el punto de aplicación de la fuerza, está resistiendo a la fuerza de tracción P y en el extremo fijo aparece una fuerza de reacción que, de acuerdo con uno de los principios fundamentales de la Mecánica y, para que el sistema quede en equilibrio, debe ser igual a P y directamente opuesta. Es decir que la reacción sería de—Pkg.

Ahora bien, supongamos que en esta cuerda tensa bajo la acción de P, por medio de un anillo y otra cuerda, hacemos actuar una segunda fuerza F, cuya dirección puede ser cualquiera. El anillo que trasmite la fuerza F, resbala a lo largo de la cuerda AB hasta un punto C (fig. 1), en el cual se forma un ángulo ACB y el sistema queda en equilibrio.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1651
QUITO
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

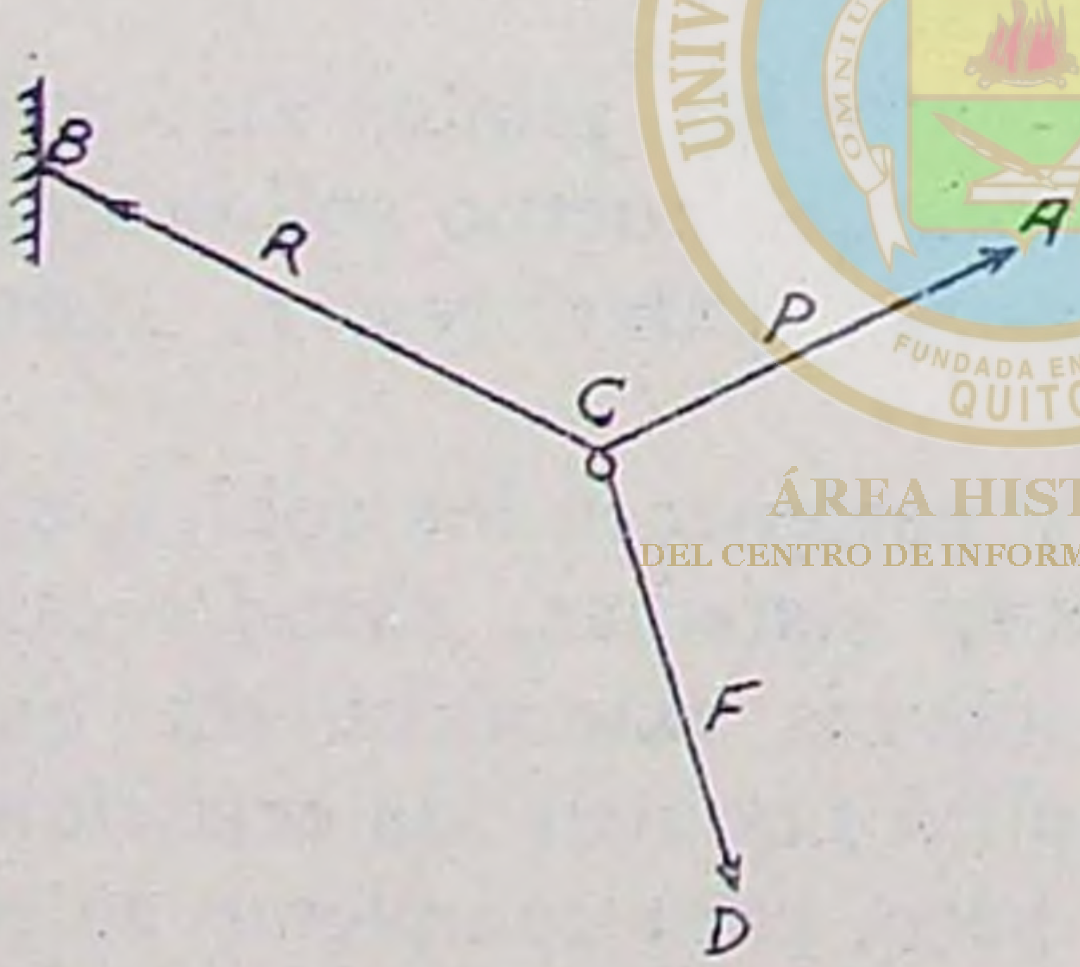


Fig. 1

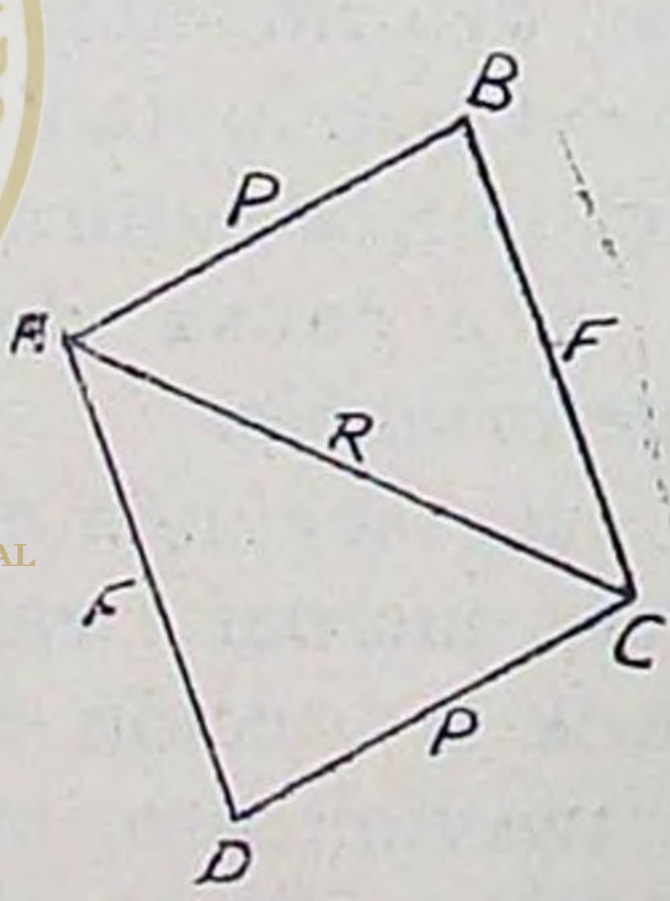


Fig. 2

Dicho equilibrio se hace entre la fuerzas P, F y R concurrentes en el punto C. Para que estas tres fuerzas concurrentes estén en equilibrio, se necesitan dos condiciones:

1ª. Que las tres fuerzas estén en un solo plano; y

2ª. Que cualquiera de ellas sea igual y directamente opuesta a la resultante geométrica de las otras dos.

Por tanto, P, F y R están en un solo plano y para encontrar el valor de la tensión R, que es también la reacción del punto fijo B, basta hacer la suma gráfica $\overline{F} + \overline{P} = \overline{R}$ formando cualquiera de los triángulos ABC o ADC (fig. 2).

En la misma forma se pueden considerar varias fuerzas P_1, P_2, P_3...P_n, actuando en diversos puntos del cordón AF (fig. 3) y cuando todo el sistema está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores, el cordón presenta la forma poligonal ABC DEF y a esta figura se la llama polígono funicular (polígono de los cordones).

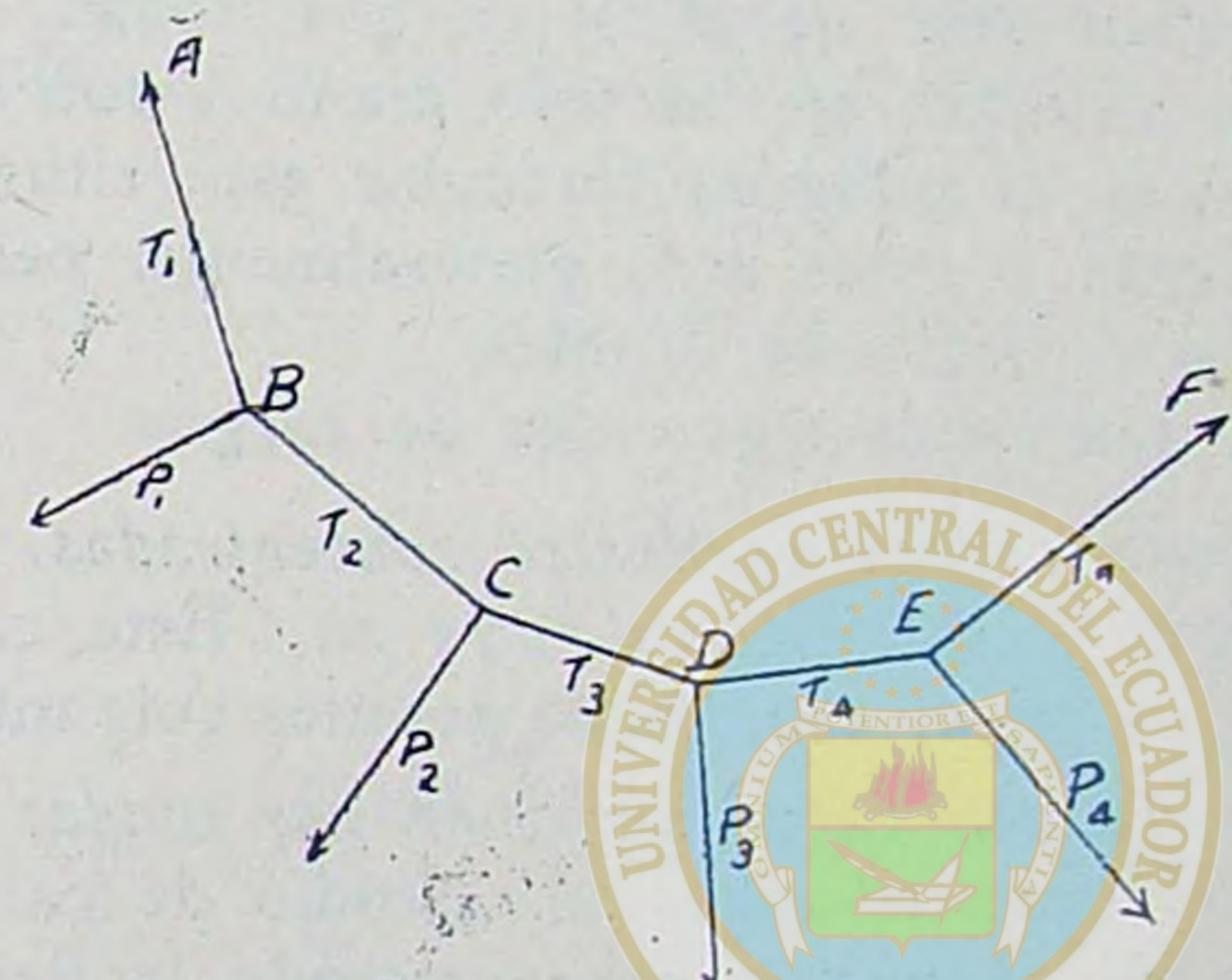


Fig. 3

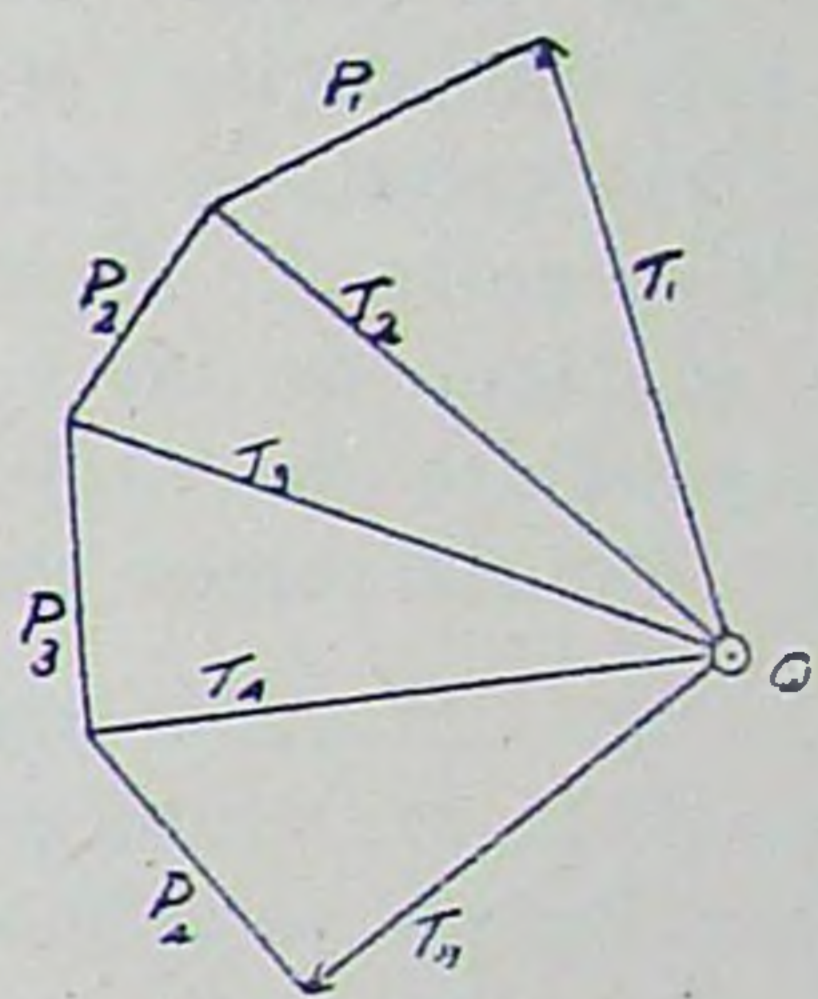


Fig. 4

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1651
QUITO
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Los puntos B, C, D, E, se llaman nudos y en cada uno de ellos, lo mismo que en la fig. 1, tres fuerzas están en equilibrio. Así, por ejemplo, en B se equilibran las tensiones P_1 T_1 y T_2; en C, P_2, T_2 y T_3, etc.

Si se hace uno junto a otro los diversos triángulos de fuerzas correspondientes a los nudos sucesivos (fig. 4), se obtiene en conjunto un polígono de fuerzas idéntico al dinámico que se considera en los estudios de la Estática Gráfica.

Inversamente, si a base del dinámico construído con las fuerzas P_1, P_2, P_3, P_n y el polo O, se dibuja un polígono funicular sobre las direcciones de estas mismas fuerzas, se obtiene la forma como quedaría un cable en equilibrio bajo la acción de dichas fuerzas (fig. 3).

De lo dicho se desprende que las construcciones de los polígonos funiculares, se aplican a los sistemas deformables, con la única diferencia de que, en grafostática el polígono funicular es una mera construcción geométrica, mientras que en el estudio de los sistemas sólidos flexibles de que venimos tratando, el polígono funicular está formado por cordones materiales y da la verdadera forma del cable (supuesto éste perfectamente flexible) cuando está en equilibrio.

Partiendo de las sencillas consideraciones que preceden y sin necesidad de recurrir a análisis matemáticos complicados, se pueden encontrar las ecuaciones de equilibrio para cables suspendidos, ya sea bajo la influencia de cargas concentradas o por la sola acción de su propio peso.

En el estudio de los sistemas deformables los casos de mayor aplicación práctica son aquellos en que todas las fuerzas exteriores están situadas en un solo plano y son paralelas entre sí. Entonces el polígono funicular está situado en el plano de las fuerzas y éstas son, generalmente, pesos suspendidos del cable por medio de tirantes.

Consideremos los tres casos siguientes de cargas:

1º. *El cable soporta cargas verticales concentradas, todas de la misma magnitud y equidistantes entre sí.* Este caso tiene inmediata aplicación en el estudio de puentes colgantes.

2º. *El cable soporta una carga uniforme por unidad de distancia horizontal,* caso que se aplica al estudio de cables sometidos a la acción de su propio peso, cuando la flecha es pequeña con relación a la luz; las fórmulas que se deducen de este caso se aplican también al estudio de puentes colgantes.

3º. *Carga uniforme por unidad de longitud del cable,* caso que tiene aplicación para cables suspendidos cuando la flecha es grande con relación a la luz.

PRIMER CASO.—*Fuerzas verticales, equidistantes y de la misma magnitud.*

En este caso, si los puntos de suspensión están al mismo nivel, el cable será simétrico con relación a un eje vertical que pasa por la mitad de la luz. Basta considerar la mitad del cable.

Por facilidad, dispongamos las cargas de tal manera que éstas sean en número par; en esta forma no habrá ninguna fuerza en la mitad del cable y la parte más baja de éste será horizontal.

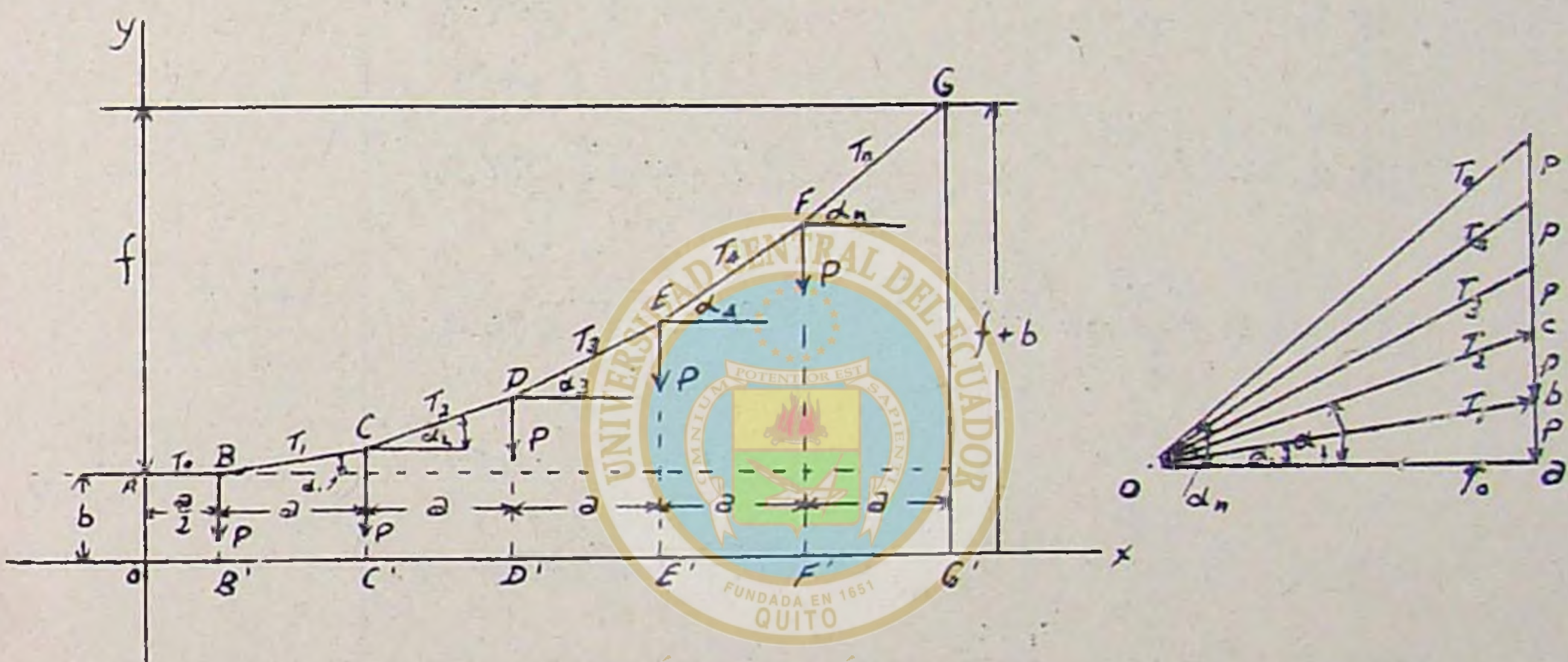
Sea x o y un sistema de coordenadas rectangulares; oy es el eje vertical de simetría y la mitad de la derecha del cable es ABCDEFG.

En los nudos B, C, F... están aplicadas, por medio de tirantes, cargas iguales a P.

Sea *a* la distancia entre los tirantes y $\frac{a}{2}$ y *b* las coordenadas del primer nudo B.

Llamemos, α_1, α_2, α_3, ...a los ángulos que forman los cordones BC, CD, ...con la horizontal; T_0 a la tensión del cable en el cordón horizontal AB; T_1, T_2...... T_n a las tensiones de los cordones BC, CD, etc.

De acuerdo con las figuras 5a y 5b, estudiemos el equilibrio en los diferentes nudos.



ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Figs. 5a y 5b

En el nudo B, concurren las fuerzas P, T_0 y T_1, y para que estén en equilibrio deben formar un triángulo, si se las suma vectorialmente como se indica en oab (fig. 5b). Por ser T_0 horizontal y P vertical, el ángulo oab es recto y se puede escribir:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{P}{T_0} \quad \text{y también} \quad T_0 = T_1 \cdot \cos \alpha_1$$

En el nudo C, las fuerzas en equilibrio son P, T_1 y T_2; pero como T_1 es la suma vectorial de P y T_0, es decir

$$\overline{T}_1 = P + \overline{T}_0$$

También podemos decir que equilibrio se hace entre 2P, T_0 y T_2, formando el triángulo oac (fig. 5b) y por tanto, resulta:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2P}{T_0} \quad \text{y} \quad T_0 = T_2 \cos \alpha_2$$

Estudiando el equilibrio en igual forma para todos los nudos, se obtienen ecuaciones análogas a las ya encontradas y que, en resumen, nos dan los dos siguientes sistemas:

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha_1 = \dfrac{P}{T_0} \\[2ex] \operatorname{tg} \alpha_2 = \dfrac{2P}{T_0} \\[2ex] \operatorname{tg} \alpha_3 = \dfrac{3P}{T_0} \\[2ex] \dots\dots\dots\dots \\[2ex] \operatorname{tg} \alpha_n = \dfrac{nP}{T_0} \end{array}\right| \; (1) \qquad \left|\begin{array}{l} T_0 = T_1 \cos \alpha_1 \\[2ex] T_0 = T_2 \cos \alpha_2 \\[2ex] T_0 = T_3 \cos \alpha_3 \\[2ex] \dots\dots\dots\dots \\[2ex] T_0 = T_n \cos \alpha_n \end{array}\right| \; (2)$$

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Como ya indicamos, las coordenadas del nudo B son

$$x_1 = \frac{a}{2}, \quad y_1 = b$$

Las de los demás nudos, de acuerdo con la figura 4a, serán:

$$\text{Coordenadas de C} \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{a}{2} + a \\[2ex] y_2 = b + a \operatorname{tg} \alpha_1 \end{array} \right.$$

$$\text{Coordenadas de D} \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \dfrac{a}{2} + 2\,a \\[2ex] y_3 = y_2 + a \operatorname{tg} \alpha_2 = b + a \operatorname{tg} \alpha_1 + a \operatorname{tg} \alpha_2 \end{array} \right.$$

y en general, las coordenadas de un nudo cualquiera que ocupe un lugar *n* serán:

$$x_n = \frac{a}{2} + (n-1)\,a$$

$$y_n = y_{n-1} + a\,\mathrm{tg}\,\alpha_{n-1} = b + a\mathrm{tg}\alpha_1 + a\mathrm{tg}\alpha_2 + \ldots\ldots + a\mathrm{tg}\alpha_{n-1}$$

n es el número de nudos entre el eje oy y el considerado inclusive.

Sustituyendo en la última ecuación los valores de $\mathrm{tg}\alpha_1$, $\mathrm{tg}\alpha_2 \ldots\ldots$ de las ecuaciones (1), se obtiene:

$$y = b + \frac{aP}{T_0}\left[1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + (n-1)\right]$$

pero $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + (n-1) = \dfrac{n\,(n-1)}{2}$

luego

$$y = b + \frac{a\,P\,n\,(n-1)}{2\,T_0}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1651
QUITO
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

De modo que las coordenadas para el nudo n serán:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} + (n-1)\,a \\ y &= b + \frac{a\,P\,n\,(n-1)}{2\,T_0} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Si se suprime el parámetro *n* entre las ecuaciones (3) para lo cual basta despejarlo en la una y sustituirlo en la otra, se encuentra finalmente la ecuación

$$\left.\begin{aligned} y &= b + \frac{a\,P}{2T_0}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right) \\ \text{ó} \quad y &= b + \frac{P}{2aT_0}\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

que es de la forma $y = C + Kx^2$, ecuación que corresponde a una parábala de eje vertical y que nos prueba, por lo mismo, que un cable suspendido que soporta varias cargas iguales e equidistantes forma un polígono del cual todos los vértices o nudos pertenecen a una curva parabólica de eje vertical.

La ecuación (4) nos permite calcular las coordenadas de todos los nudos; pero, para ello, es necesario dar a x los valores correspondientes, aumentando esta variable desde el valor $\frac{a}{2}$, que corresponde al primer nudo, en cantidades constantes e iguales a la equidistancia *a*, para los nudos sucesivos. De esta manera se determinan las longitudes de las ordenadas BB^1, CC^1......etc., y así, por ejemplo, en el caso de que se quiera proyectar un puente colgante, se puede escoger el eje OX como el tablero del puente y las ordenadas calculadas como se acaba de indicar serán las longitudes de los tirantes de los cuales va suspendido el tablero.

Pero la ecuación (4) está dada en función de la tensión T_0 que corresponde a la parte más baja del cable. Este valor se encuentra conociendo la flecha f (fig. 5 a), dato que generalmente se impone de acuerdo con ciertas normas en cada proyecto.

Por consiguiente, si en la ecuación (3) hacemos $Y = f + b$, podemos despejar T_0:

$$f + b = b + \frac{a P n (n - 1)}{2 T_0}$$

$$y \qquad T_0 = \frac{a P n (n - 1)}{2 f} \qquad (5)$$

Esta será la tensión mínima, las de los demás cordones se encontrarán componiendo T_0 con las cargas P. Así, de acuerdo con la figura (5b) tendremos:

$$T_1 = \sqrt{T_0^2 + P^2}$$

$$T_2 = \sqrt{T_0^2 + (2P)^2}$$

y la tensión máxima

$$T_m = \sqrt{T_0^2 + n^2 P^2}$$

Las inclinaciones de los diversos cordones con la horizontal, se encuentran facilmente por medio de las ecuaciones (1). Entre todos los cordones, hay especial interes en encontrar la inclinación del último, es decir, del que se apoya en el punto de suspensión, con el objeto de dar la misma inclinación al cable por el otro lado de la suspensión, hacia el anclaje, por motivos que indicaremos más adelante en un ejemplo.

La longitud de cada cordón se encuentra en función de los ángulos α_1, α_2......etc. así: (fig. 5 a):

$$\text{Longitud de AB} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Longitud de BC} = \frac{a}{\cos \alpha_1}$$

$$\text{Longitud de CD} = \frac{a}{\cos \alpha_2} \quad \text{etc.}$$

y por tanto, la longitud total del cable entre los dos puntos de suspensión será

ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$L = a + 2a \left(\frac{1}{\cos \alpha_1} + \frac{1}{\cos \alpha_2} + \frac{1}{\cos \alpha_3} + \ldots\ldots \right)$$

Los valores de $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$ ...... se determinan por las fórmulas (2).

Segundo caso.—*Carga uniforme por unidad de distancia horizontal.*

Este caso es el límite del anterior; es decir, si se supone que la equidistancia *a* entre los tirantes disminuye indifinidamente de valor, hasta hacerse infinitamente pequeña, los lados del polígono funicular haciéndose cada vez más pequeños, se acercan a la curva parabólica y en el límite se confunden con ella. Por tanto para determinar la ecuación de la curva que forma el cable en este caso límite, podemos partir de las ecuaciones ya encontradas. introduciendo en ellas las modificaciones correspondientes.

Para ello observemos que, siendo constante la luz del cable en cada caso, si se hace *a* muy pequeña, el valor de *n* será grande (muchos nudos) y la carga P que corresponde a cada nudo, será también muy pequeña.

Sea *q* la carga por unidad de longitud; entonces, para repartir uniformemente cada carga P en la distancia *a* que le corresponde, tendremos

$$P = a\,q$$

Además podemos tomar como origen de coordenadas, el vértice de la curva, de tal manera que $b = o$.

Si en la ecuación (4) hacemos

$$b = o \text{ y } P = a\,q, \text{ se obtiene}$$

$$y = \frac{a^2 q}{2\,T_o}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{q\,x^2}{2\,T_o} - \frac{a^2 q}{8\,T_o}$$

pero como *a* es tan pequeño como se quiera, su cuadrado resulta dspreciable y el término

$$\frac{a^2 q}{8\,T_o} = o$$

la ecuación queda

$$y = \frac{q\,x^2}{2\,T_o} \quad (6)$$

que es una parábola de eje vertical.

De acuerdo con la fig. (6) vemos que cuando

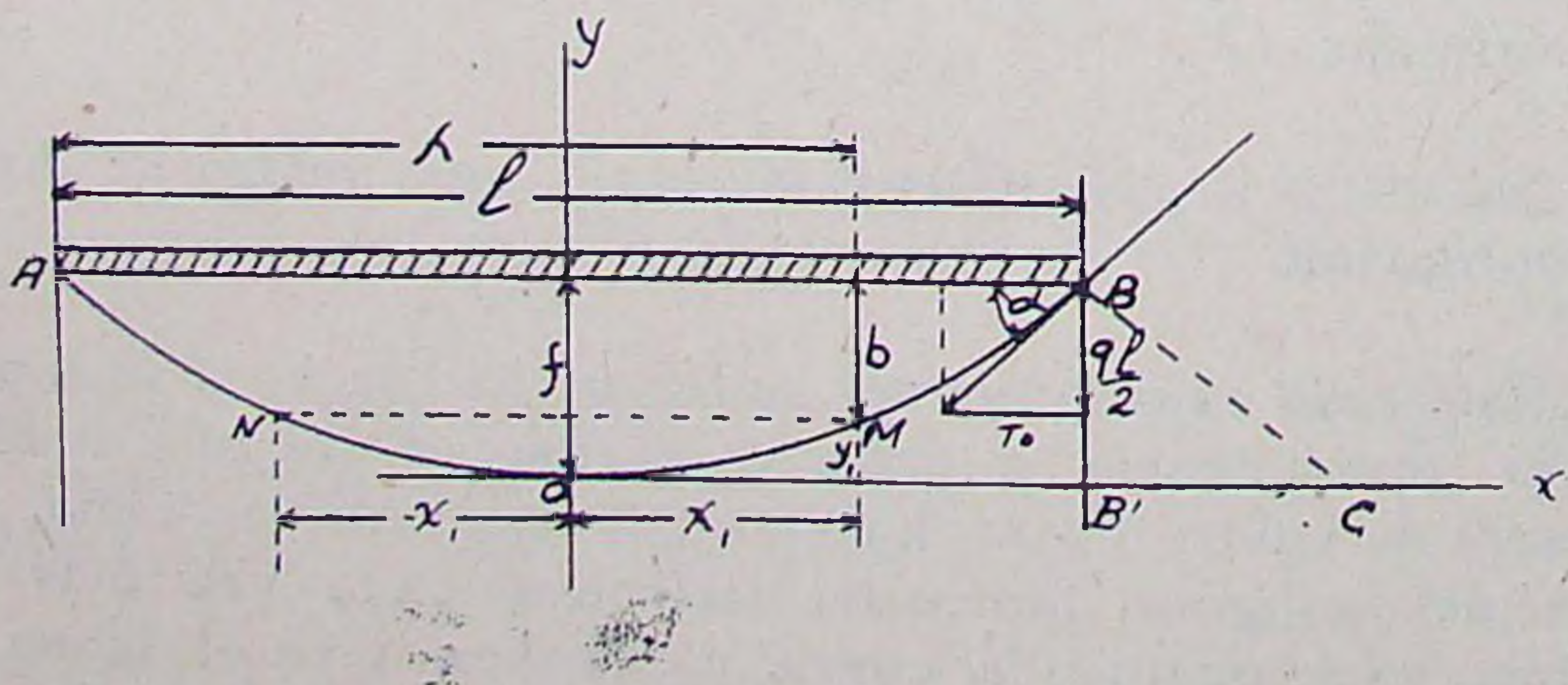


Fig. 6

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$x = \frac{l}{2}, \; y = f$$

Por tanto

$$f = \frac{q\,l^2}{8\,T_0} \quad y \; T_0 = \frac{q\,l^2}{8\,f} \quad (7)$$

La fórmula (7) da el valor de la tensión en la parte más baja del cable, es decir, en el vértice de la parábola, en función de la carga unitaria, de la luz y de la flecha. Se usa también en el cálculo de cables de puentes colgantes y principalmente en el cálculo de alambres y líneas de transmisión, para los tramos comprendidos entre cada dos postes horizontales; desde luego, en estos dos últimos casos es solo una fórmula aproximada ya que en ellos la carga no es constante a lo largo de la cuerda del cable y, por lo mismo, la curva no es exactamente parabólica, sino mas bien una catenaria, como veremos después. Con todo hasta valores de la flecha iguales a un cuarto de luz, el error es tan pequeño que se puede despreciar.

Tensión en cualquier punto del cable.—Para encontrar la tensión del cable en cualquier punto de abscisa x, basta componer la tensión horizontal T_0 con la carga vertical existente entre el origen de coordenadas o y el punto de abscisa x; esta componente vertical tendrá por valor qx y la tension del cable valdrá entonces

$$T = \sqrt{T_0^2 + (qx)^2}$$

La tensión máxima ocurre en los puntos de suspensión, en los cuales $x = \pm \frac{l}{2}$ y, por tanto

$$T_{max} = \sqrt{T_0^2 + \left(\frac{q\,l}{2}\right)^2} = \frac{ql}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4f}\right)^2 + 1} \quad (8)$$

Dirección de la tangente.—La dirección de la tangente a la curva en cualquier punto, que será al mismo tiempo la dirección de la tensión en dicho punto, se encuentra derivando la ecuación (6), es dicir

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{q\,x}{T.} \quad (9)$$

En los puntos de suspensión la inclinación de la tangente será,

haciendo $x = \frac{1}{2}$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{q\,l}{2T_0} \quad (10)$$

Si se prolonga la tangente a la curva en el punto de suspensión hasta cortar al eje de las X, tendremos que dicha tangente pasará a una distancia del origen (fig. 6)

$$d = \frac{1}{2} - BB^1 \operatorname{cotg.} \alpha_0$$

$$d = \frac{1}{2} - \frac{f}{\operatorname{tg} \alpha_0} = \frac{1}{2} - \frac{q\,l^2}{8T_0} \times \frac{2T_0}{q\,l} = \frac{1}{4}$$

De manera que, en el caso de puentes colgantes, si se quiere que el cable esté igualmente inclinada a ambos lados de la suspensión, la regla es que la distaneia B^1C debe ser la cuarta parte de la luz.

Longitud del cable.—La longitud del cable entre los puntos de suspensión se podría determinar de una manera exacta, considerando un elemeeto *ds* de la curva parabólica, para emplear el método ordinario que indica el cálculo integral; pero de esta manera se obtiene una ecuación muy complicada, por lo que sin mayor error aconsejan calcular la longitud del cable con la fórmula aproximada

$$L = l + \frac{8\,f^2}{3\,l} \quad (11)$$

Haciendo una integración por series, Jorini (construcción de puentes, pág. 721) encuentra para la longitud del cable la fórmula

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1651
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$L = l\left(1 + \frac{z^2}{6} - \frac{z^2}{40}\right) \quad (12)$$

siendo $z = \frac{4f}{l}$

En estás fórmulas l es la distancia entre los puntos de suspensión.

Caso en que los puntos de suspensión están a diferente nivel.

Hasta aquí hemos supuesto que los puntos de suspensión del cable están a nivel y, por lo mismo, que el vértice de la parábola o punto más bajo está exactamente en la mitad de la luz. Pero lo más frecuente es que los postes no están a nivel y se necesita adaptar las fórmulas anteriores a este caso general.

El cable suspendido está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores y de las reacciones correspondientes. Si en un punto cualquiera M (fig. 6) se corta el cable y se la aplica en la dirección de la tangente una fuerza igual y contraria a la tensión que corresponde a este punto, el sistema continúa en equilibrio y la forma de la curva A O M no se habrá modificado.

Supongamos, entonces que A y M sean los nuevos puntos de suspensión del cable, sometido a la misma carga unitaria q y separados por una distancia horizontal λ; sea b el desnivel entre A y M y utilizamos las notaciones anteriores.

Como la tensión T_0 en el punto o no ha cambiado, el problema se reduce a determinar en función de los datos λ y b, cual sería el valor de l, suponiendo que el cable se prolongara hasta el punto B, para que los postes queden al mismo nivel y así aplicar las fórmulas anteriores.
Observamos que cuando

$$y = f - b = \frac{q\,l^2}{8T_0} - b\,,\; x = \lambda - \frac{l}{2}$$

y si sustituimos estos valores en la ecuación (6) se obtiene:

$$\frac{q\,l^2}{8T_o} - b = \frac{q\,(\lambda - \frac{l}{2})^2}{2\,T_o}$$

y después de simplificar,

$$l = \lambda + \frac{2b\,T_o}{\lambda\,q} \qquad (13)$$

Con este valor de l, facilmente se deducen los demás datos. Así, el vértice de la curva o punto más bajo, distará del poste inferior (punto de suspensión M de la fig. 6) una distancia

$$x_1 = \lambda - \frac{l}{2}$$

y estará por debajo de M con un desnivel de

$$y = f - b, \text{ siendo } f = \frac{q\,l^2}{8\,T_o}$$

La longitud de la curva A O M, deducida a base de las fórmulas (11) o (12) valdrá:

$$L_1 = \frac{L - N\,O\,M}{2} + N\,O\,M = \frac{L + N\,O\,M}{2}, \quad (14)$$

fórmula en la cual se calcula NOM por medio de las fórmulas (11) ó (12), pero teniendo el cuidado de sustituir l por $2\,x_1 = 2\,\lambda - l$ y f por $f - b$

TERCER CASO.—*Carga uniforme por unidad de longitud del cable.*

Este es el caso verdadero de un cable suspendido entre dos puntos cuando, supuesto perfectamente flexible, sólo está sujeto a la acción de su propio peso; pero, por la dificultad de utilizar las fórmulas que resultan, se aplica poco prefiriéndose las fórmulas deducidas en el caso anterior, las cuales no dan error apreciable hasta para valores de la flecha equivalentes a la cuarta parte de la luz.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
AREA HISTORICA DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Para este caso es preciso recurrir a las ecuaciones diferenciales.

Sea T_0 la tensión en el vértice de la curva (fig. 7), q el peso de la unidad de longitud del cable, S la longitud de la curva AM; luego qS será el peso de la porción AM del cable.

La tensión T_1 tangente al cable en el punto M, debe hacer equilibrio a la tensión horizontal T_0

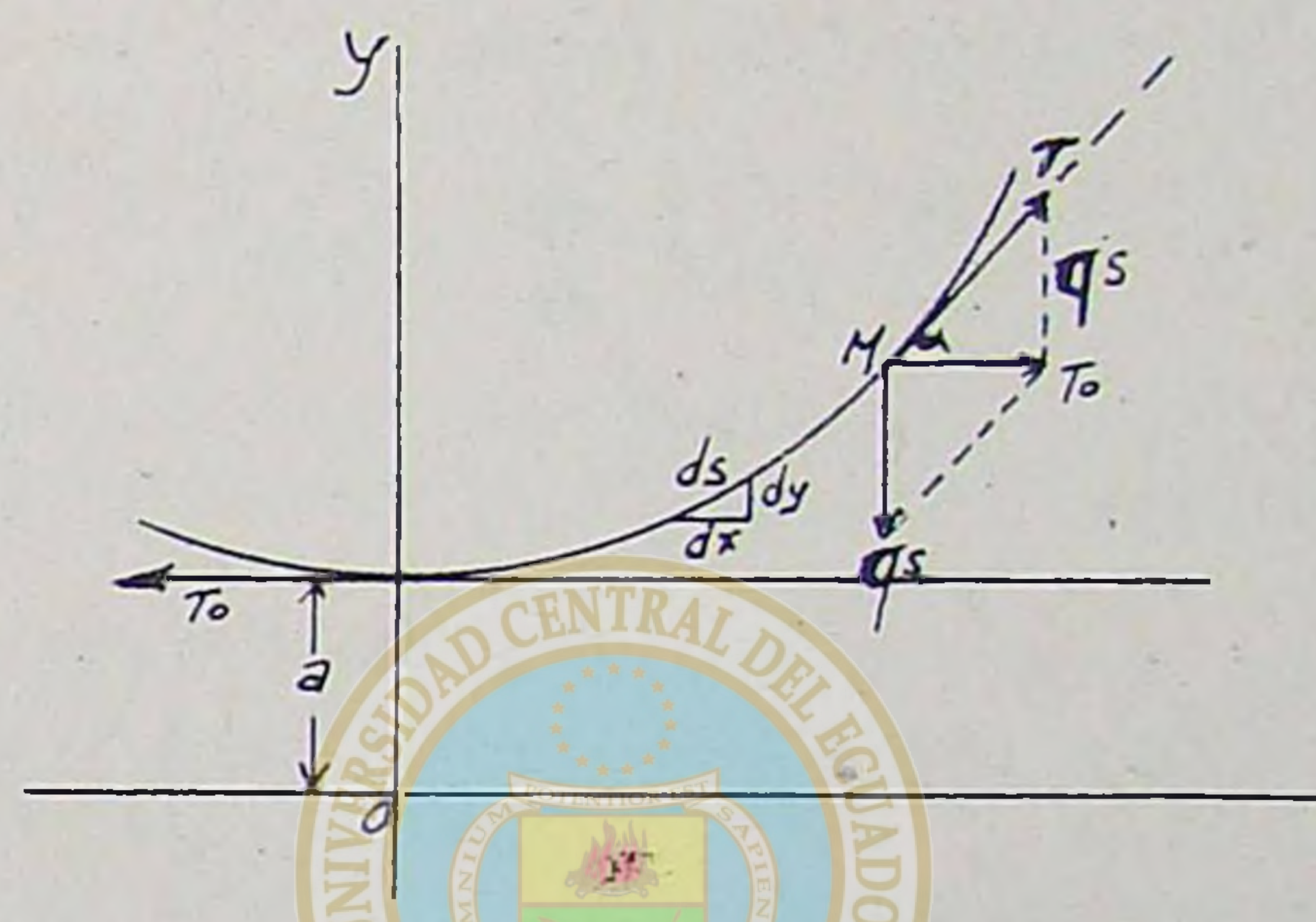


Fig. 7

y al peso qS. Por consiguiente

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{qS}{T_0};$$

por matemáticas se sabe también que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qS}{T_0}$$

La tensión horizontal es una constante en cada caso; si ponemos que $T_0 = qa$, la ecuación anterior se hace

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S}{a} = p$$

$$S = a\,p \qquad (15)$$

Un elemento *ds* infinitamente pequeño del cable tendrá por valor

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\text{y} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + p^2} \qquad (16)$$

Derivando la ecuación (15), resulta

$$\frac{ds}{dx} = a\,\frac{dp}{dx} \qquad (17)$$

y de (16) y (17) sale

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a}$$

La primera integración da

$$\log_e \left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = \frac{x}{a} + c$$

$$\text{cuando } x = 0,\ p = \frac{dy}{dx} = 0;\ \text{luego } c = 0$$

y después de despejar p se encuentra:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Por una segunda integración se obtiene:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad (18)$$

ecuación que como se sabe, es de la curva llamada catenaria.

ÁREA HISTÓRICA DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

En la ecuación (18), cuando $x = o$, $y = a$; luego *a* es la distancia del vértice de la curva al origen de coordenadas. Su valor mutiplicado por q, da el valor de la tensión horizontal T_o. Pero el valor de *a* es desconocido y para determinarlo se puede seguir un método aproximado que de *a* en función de la luz y de la flecha o de la luz y de la longitud del cable; en este caso es preciso recurrir a las funciones hiperbólicas ya que la ecuación de la catenaria, en función del coseno hiperbólico es

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \cos. h. \frac{x}{a}$$

Como este caso no tiene vercadera utilidad práctica, no expondré en este ligero estudio el método a seguirse (1).

APLICACIONES.—1ª. Hacer todo el cálculo que corresponde al cable y tirantes para un pequeño puente colgante de 16.20 m. de luz, con flecha igual a $^1/_8$ de la luz; el tablero del puente tiene 3 m. de ancho y se calculará para una carga uniformemente repartida de 400 kg/m^2.

Resolución.—Si dividimos la luz en un número de espacios impar, para que no quede ningún tirante en el centro y estar en las condiciones del caso primero, podemos escoger 9 espacios y entonces

$$a = \frac{1}{9} = \frac{16,2}{9} = 1,8 \text{ mts.}$$

La carga por metro lineal de puente vale $400 \times 3 = 1200$ kg. y como los cables son dos (uno a cada lado) cada uno soportará una carga unitaria $q = 0,6$ toneladas; en consecuencia la carga trasmitida por los tirantes en cada nudo, es de $P = 0,6 \times 1,8 = 1,08$ toneladas.

El número de tirantes en la mitad de la luz es cuatro (fig. 8); pero como es desconocido el valor de la ordenada

---

(1) El Manual de *Foerster*, tomo 1°. pág. 97, indica un procedimiento aproximado para la determinación de *a*

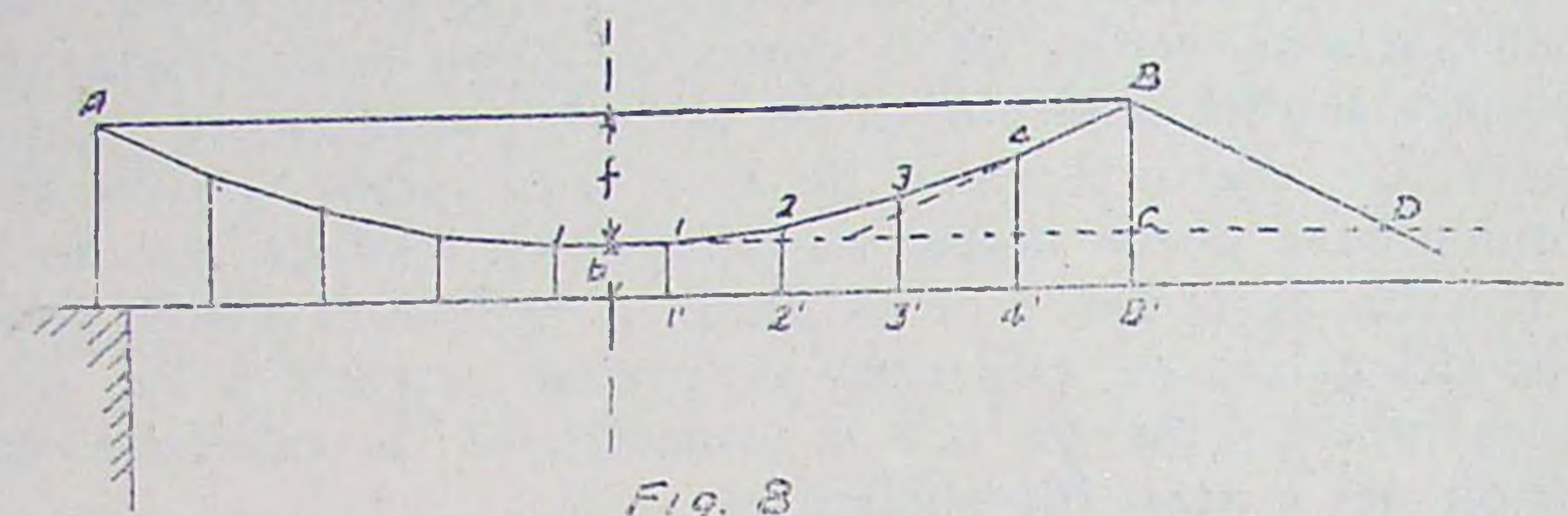


Fig. 8

44[1] que se necesita para determinar la tensión en el punto mas bajo, con un pequeño error en favor de la seguridad del cable, podemos suponer que el punto de suspensión, B es también un nudo y, por tanto, n = 5. La ordenada BB^1 ya es conocida: $BB^1 = f + b$, puesto que $f = \frac{16,2}{8} = 2,025$ m. y b es un valor completamente arbitrario, que adoptaremos de b = 0,8 m.

La tensión horizontal en el cordón 1 - 1, según la fórmula (5) será

$$T_0 = \frac{1,80 \times 1,08 \times 5 \times 4}{2 \times 2,025} = 9,6 \text{ toneladas}$$

También se puede utilizar, para el cálculo de T_0, la fórmula (7), aunque no es exactamente el caso para el cual se dedujo dicha fórmula, pero el error es pequeño; siendo q = 0,6 toneladas.

$$T_0 = \frac{q\, l^2}{8 f} = \frac{0,6 \times 16,2^2}{8 \times 2,025} = 9,72 \text{ toneladas}$$

La tensión máxima, en el cordón 4 - B, sera la resultante de T_0 y de los pesos trasmitidos al cable por los cuatro nudos

$$T = \sqrt{9,6^2 + (4 \times 1,08)^2} = 10,5 \text{ toneladas}$$

Los ángulos α_1, α_2, α_3 y α_4 se deducen de las fórmulas (1)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{P}{T_o} = \frac{1,08}{9,6} = 0,113 \quad \text{y} \quad \alpha_1 = 6^\circ 30,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2P}{T_o} = \frac{2,16}{9,6} = 0,225 \quad \alpha_2 = 12_\circ 40,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{3P}{T_o} = \frac{3,24}{9,6} = 0,337 \quad \alpha_3 = 18^\circ 40,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{4P}{T_o} = \frac{4,32}{9,6} = 0,450 \quad \alpha_4 = 24_\circ 10$$

Por tanto

$$\cos \alpha_1 = 0,993$$
$$\cos \alpha_2 = 0,976$$
$$\cos \alpha_3 = 0,947$$
$$\cos \alpha_4 = 0,912$$

Longitud de los cordones

Longitud de $1 - 1 = a = 1,80$ m

Longitud de $1 - 2 = \dfrac{a}{\cos\alpha_1} = 1,813$ m

Longitud de $2 - 3 = \dfrac{a}{\cos\alpha_2} = 1,843$ m

Longitud de $3 - 4 = \dfrac{a}{\cos\alpha_3} = 1,900$ m

Longitud de $4 - 8 = \dfrac{a}{\cos\alpha_4} = 1,973$ m

La longitud total entre los puntos de suspensión valdrá:

$$L = a + 2a\left(\frac{1}{\cos\alpha_1} + \frac{1}{\cos\alpha_2} + \frac{1}{\cos\alpha_3} + \frac{1}{\cos\alpha_4}\right) =$$

$$= 1,8^\circ + 3,60\left(\frac{1}{0,993} + \frac{1}{0,906} + \frac{1}{0,940} + \frac{1}{0,912}\right)$$

$$L = 16,86 \text{ m.}$$

Longitud de los tirantes.— $b = 0,80$ m.

Longitud del tirante $1 - 1^1 = b = 0,80$ m.

Longitud del tirante $2 - 2^1 = b + a\mathrm{tg}\alpha_1 = 0,80 + 1,8 \times \times 0,113 = 1,003$ m.

Longitud del tirante $3 - 3^1 = 2 - 2^1 + a\mathrm{tg}\alpha_2 = 1,003 + + 1,8 \times 0,225 = 1,408$ m.

Longitud del tirante $4 - 4^1 = 3 - 3^1 + a\mathrm{tg}\alpha_3 = 1,408 + + 1,8 \times 0,336 = 2,015$ m.

Altura del pilar o torre $BB^1 = 4 - 4^1 + a\mathrm{tg}\alpha_4 = 2,015 + + 1,8 \times 0,45 = 2,825$ m.

Comprobación: altura de la torre $BB^1 = f + b = 2,025 + + 0,80 = 2,825$ m.

Prolongación del cable hacia el anclage.—Desde los puntos de suspensión A y B, se prolonga el cable hacia el exterior del puente para sujetarlo en los macizos de mampostería. Si se quiere evitar esfuerzos en las torres en el sentido longitudinal del puente, debe darse a estas prolongaciones, la misma inclinación con respecto a la horizontal que tiene el último cordón 4 — B (en sentido contrario).— En estas condiciones, si CB (fig. 8) es igual a f, la distancia horizontal $CD = \frac{1}{4}$ aproximadamente, de acuerdo con lo dicho sobre la tangente al estudiar el caso segundo. La tensión en BD es igual a la del cordón 4 - B, es decir, 10,5 toneladas.

El doble de esta tensión, para tener un factor de seguridad igual a 2 debe ser resistida por el macizo de anclaje, investigándose las condiciones de estabilidad, al deslizamiento, al volcamiento y la presión sobre el suelo.

Compresión producida por los cables en las torres de suspensión.—Si los cordones 4B y BD tienen la misma inclinación, las componentes horizontales de sus tensiones por ser iguales y directamente opuestas, se anulan, por lo que,

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

como ya se dijo, los esfuerzos en el sentido longitudinal del puente se anulan, salvo los que se podrían producir a causa del rozamiento de los cables en los puntos de suspensión.

En cambio, cada torre debe resistir al esfuerzo de compresión debido a las componentes verticales de las tensiones de los cordones, que se suman por ser del mismo sentido.

Por la simetría de los cordones 4-B y BD con relación al eje de la torre, las componentes verticales son iguales y el esfuerzo de compresión será igual al doble de cualquiera de ellas.

$$Q = 2 \times T_{max} \cos(90 - \alpha_1) = 2\,T \operatorname{sen} \alpha_1$$

$$Q = 2 \times 10{,}5 \times 0{,}409 = 8{,}59 \text{ Toneladas}$$

Conocidos los esfuerzos desarrollados en el cable y tirantes fácilmente se determinan las secciones que les corresponden, bastando para ello dividir el esfuerzo total calculado para el coeficiente de resistencia de trabajo del material empleado. Cuando no se dispone de cable se lo puede sustituir con alambres cuya sección total sea suficiente para resistir a la tensión máxima.

Segundo ejemplo—Entre dos postes separados por una distancia horizontal de 120 m. y que tienen un desnivel de 2 m. se quiere templar un alambre de cobre. Si el esfuerzo de tracción en el alambre no ha de pasar de 7 kg/mm^2, se desea saber cual debería ser la flecha mínima que debería tener el cable, así como las coordenadas del punto más bajo y la longitud del cable suspendido entre los dos postes.

Dato: 1 m. de alambre de cobre de 1 m.m.^{2} de sección pesa nueve gramos.

Resolución.—Para el caso de cables sometidos a solo la acción de su propio peso, no hace falta conocer su sección o su diámetro ya que la carga unitaria q (peso de la unidad de longitud del cable), es proporcional a la sección, es decir, que los resultados serán los mismos cualquiera que sea la sección o el diámetro del alambre utilizado.

De acuerdo con la figura (6) y las fórmulas estudiadas en el caso segundo, los datos son:

$\lambda = 120$ m.; $b = 2$ m.; $q = 9$ gramos; $T = 7.000$ gramos y las incógnitas, f ó y, x, y la longitud L_1 del alambre.

Para aplicar la fórmula (13), se necesita conocer la tensión mínima T_o; se podría calcular su valor exacto en función de las fórmulas (8) y (13), estableciendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, pero así resulta una ecuación en l difícil de resolver, por lo que es más práctico proceder con uno o dos ensayos, poniendo un valor T_o aproximado para comprobar luego. Para ello basta fijarse que T_o difiere siempre muy poco de T (tensión máxima); de manera que si $T = 7$ Kg., podemos poner $T_o = 6{,}9$ Kg. Entonces

$$l = \lambda + \frac{2\,b\,T_o}{\lambda\,q} = 120 + \frac{2 \times 2 \times 6.900}{120 \times q} = 145{,}55 \text{ m.}$$

$$f = \frac{q\,l^2}{8T_o} = \frac{q \times 145{,}55^2}{8 \times 6.900} = 3{,}45 \text{ m.}$$

$$\text{luego } y_1 = f - b = 1{,}45 \text{ m.}$$

es decir que el vértice de la curva está 1,45 m. bajo el nivel del punto de suspensión del poste más bajo y a una distancia de este poste de

$$x_1 = \lambda - \frac{l}{2} = 120 - 72{,}77 = 47{,}23 \text{ m.}$$

Para la longitud del alambre, con la misma notación de la figura (6), tendremos:

$$L = l + \frac{8\,f^2}{3\,l} = 145{,}55 + \frac{8 \times 3{,}45^2}{3 \times 145{,}55} = 145{,}77 \text{ m.}$$

$$NOM = 2\,x_1 + \frac{8\,y_1^2}{3 \times 2\,x_1} = 94{,}46 + \frac{8 \times 1{,}45^2}{3 \times 94{,}46} = 94{,}52 \text{ m.}$$

Por tanto, la longitud del alambre es de

$$L_1 = \frac{L + NOM}{2} = \frac{145{,}55 + 94{,}52}{2} = 120{,}14 \text{ m.}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
FUNDADA EN 1651
QUITO
ÁREA HISTÓRICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL

Comprobación del valor de T_o adoptado:

$$T\text{máx} = \sqrt{T_o^2 + \left(\frac{q\,l}{2}\right)^2}\ ; \quad T_o = \sqrt{T - \left(\frac{q\,l}{2}\right)^2}$$

$$T_o = \sqrt{7^2 - \left(\frac{0{,}009 \times 145{,}5}{2}\right)^2} = 6{,}97 \text{ Kg.}$$

Como se ve, la tensión para estos casos es casi constante y sin peligro de que se produzca un esfuerzo muy grande, se puede poner para T_o el valor de la tensión máxima admisible.

Observación.—En los lugares donde son frecuentes los vientos, se debe disminuir prudencialmente el coeficiente de trabajo del material a causa del aumento de tensión producida por el viento; también es fácil hacer el cálculo tomando en cuenta la presión del viento que se le puede suponer de 150 a 200 Kg/m^2 y de dirección horizontal. Entonces se puede buscar la resultante por metro longitudinal del peso del alambre y de la presión del viento; estas dos fuerzas son perpendiculares entre sí y su resultante será la carga unitaria *q* para el empleo de las fórmulas.

AREA HISTORICA
DEL CENTRO DE INFORMACIÓN INTEGRAL