JORGE L. KRAGLIEVICH-KRAL

PROCESOS ESTOCASTICOS, ENTROPIA Y ESTRUCTURA DEL UNIVERSO

I

Consideramos un sistema que puede encontrarse en un cierto número finito J de estados posibles X_J, siendo J constante. Además, consideremos que la probabilidad para que ocurra cada estado posible: X_1, X_2, ..., X_J es la misma, a saber: 1/J.

El hecho de que J sea constante, implica que en ningún caso se elimina la posibilidad de ocurrencia de cualquiera de los J estados, ni se agregan otros estados diferentes J + 1, J + 2, etc. Esto es, que los J estados posibles pueden repetirse y no hay posibilidad de ocurrencia de otros estados fuera de ellos.

Además aún, establezcamos que la ocurrencia de un estado cualquiera, está regida por el Principio de Azar, de tal modo que una secuencia dada de estados, constituye la expresión de un proceso estocástico.

La introducción de este concepto requiere una explicación de orden físico. En un sistema rige el Principio de Azar si la estructura (estática o másica) del sistema es discontinua, esto es, si entre dos estados **contiguos** existe una discontinuidad estructural; y si entre dos estados **consecutivos** cualesquiera existe una discontinuidad energética. La discontinuidad de estructura se refiere al orden temporal. Físicamente, en las llamadas "relaciones de incertidumbre", esto está expresado por el hecho de que los productos **energía** × **tiempo** y (masa × velocidad) × **distancia** solo pueden ser iguales o mayores que cierta cantidad especificada en función del **quantum** de acción. Si escribimos, en lugar de energía, (**carga** × tensión eléctrica) × **tiempo**, encontramos una correspondencia entre carga eléctrica y masa; entre distancia y tiempo y entre velocidad y tensión eléctrica, pero con la salvedad de que estas dos últimas magnitudes difieren en una dimensión, porque como se demuestra en mi teoría inédita de Homologación entre los Campos Mecánicos y Eléctricos (Kraglievich–Kral, MS) la medida estática de la tensión eléctrica está dada por el cociente superficie/tiempo.

Esto coincide con el concepto de que al introducir "tiempo" estamos realmente introduciendo otra dimensión.

Resulta interesante destacar que si se expresa la energía como mc^2, siendo c la velocidad de la luz en el vacío, la masa vale energía/c^2 y el segundo producto es (energía × velocidad/c^2) × distancia. Pero (velocidad/c^2) es la recíproca de la "velocidad de onda" w de DE BROGLIE, que vale c^2/v. De tal modo, el segundo producto es (energía/w) × distancia.

... el estado de equilibrio sólo puede ocurrir al cabo de un número de "ciclos propios" ...

Al sustituir tiempo por distancia, la energía aparece dividida por w, que es una velocidad mayor que c. Es decir, **esta energía es menor que la energía que aparece en el primer producto.**

En las condiciones establecidas, diremos que las "leyes", o rigurosamente hablando las funciones matemáticas que describen el comportamiento del sistema, son estadísticas, y que este tipo de "leyes" **es indiferente a la distinción entre distancia y tiempo.**

Sistemas de tal clase son los que se utilizan en distintos juegos de azar, como es el caso de los dados, la ruleta, etc. Su particularidad más importante consiste en que el conocimiento de N estados consecutivos, no permite establecer cual será, en particular, el estado N + 1. Más estrictamente, este resultado N + 1 está "determinado" solo en el sentido de que debe ser uno de los J estados posibles, pero dentro de este campo de J estados se encuentra indeterminado en función de lo ocurrido previamente. Esto es, como si respecto de este estado N + 1 no existiera el pasado, o como si este estado fuese en rigor el primero de una nueva secuencia, respecto de la cual todo se presenta como si antes no hubiese sucedido nada.

Tal característica se debe a la discontinuidad energética en sentido temporal: cada resultado es la consecuencia de una cierta concatenación causal limitada que de hecho es ignorada por el observador, y durante la cual una cierta cantidad de energía se disipa; una nueva cantidad de energía produce otra concatenación causal incalculable e independiente de la anterior.

Pongamos un ejemplo: si el sistema comprende 6 resultados posibles, como los que se obtiene arrojando un dado, el resultado es un nivel N + 1 no depende, o no está condicionado específicamente por los N resultados anteriores, del mismo modo que si se arrojasen N + 1 dados distintos a la vez, en diferentes cubículos y por diferentes personas, el número que ocurre en el dado N + 1 es físicamente independiente de los que ocurren en los otros N dados.

De tal manera, estos sistemas se comportan como si careciesen de "memoria" o de "percepción", puesto que nada de lo ocurrido "antes" o "al lado" influye sobre lo que va a ocurrir "después" o sobre lo que ocurre "al lado".

Llamaremos "ciclo propio" del sistema, a un número de resultados consecutivos (equivalente a contiguos) igual al número J de resultados posibles. El estado de equilibrio sólo puede ocurrir al cabo de un número entero de "ciclos propios".

... la teoría estadística nos informa ...

II

Consideremos ahora, concretamente, el caso de un juego de azar de J alternativas o estados elementales posibles de igual probabilidad, dada por 1/J, y reduzcamos el análisis al caso mínimo posible, esto es, J = 2: por ej., los dos resultados que se obtienen arrojando una moneda, o los números impares o pares que se obtienen arrojando un dado, etc.

Si ocurren N casos y si N es par (N = 2 k, con k = 1, 2, 3, ...) puede suceder que:

a) Los dos resultados posibles A y B hayan ocurrido igual cantidad de veces, esto es, N/2 veces cada uno; en este caso diremos que el sistema está en equilibrio en el nivel N;

b) Los dos resultados hayan ocurrido n_A y n_B veces, respectivamente, siendo $n_A + n_B = N$ y n_A mayor o menor que n_B.

En el segundo supuesto, el sistema está en desequilibrio en el nivel N y la magnitud relativa de este desequilibrio, llamémosle d, puede ser medida por:

$$d = | n_A - n_B | / N \qquad (1)$$

El desequilibrio máximo se daría en el caso en que la diferencia absoluta del numerador fuera igual a N, esto es, si sólo hubiera ocurrido exclusivamente el resultado A o el resultado B, de modo que el índice (1) sería igual a 1 (o al 100%), mientras que si la diferencia del numerador es cero, el índice (1) será cero. Es decir, que d varía entre 1 y 0 inclusive.

La Teoría Estadística nos informa, que a medida que $N \rightarrow \infty$, el índice $(| n_A - n_B | / N) \rightarrow 0$. Obsérvese bien que no estamos diciendo que con N tendiente a infinito, tienda a cero la diferencia $n_A - n_B$, sino esta diferencia dividida para N, siendo N necesariamente creciente. Esto es, puede ser que con N tendiente a infinito, tal diferencia no llegue nunca a ser efectivamente cero, o bien que llegue a serlo una vez, o bien repetidas veces.

Establezcamos ahora que en este juego de azar un apostador arriesga en cada caso una cantidad o apuesta A, que le ocasionará una ganancia parcial (o una pérdida parcial) $\pm G_p = \pm A$. Si el juego contiene más de dos alternativas igualmente probables, se tiene en general:

$$+ G_p = + (J - 1) A; \text{ y } - G_p = - A.$$

Según esta manera corriente de pagar las apuestas, que las bancas de juego fundamentan estadísticamente en que a la larga los resultados tienden a equilibrarse, se sostiene generalmente

... la ecuación (2) es la de una parábola con vértice en el punto de coordenadas cero y N/2 ...

que sea cual fuere el "sistema" que utilice, un apostador sólo puede esperar (a la larga) que su ganancia o su pérdida totales sean iguales a cero.

Vamos a demostrar, que en su aspecto teórico, esta suposición es falsa.

Llamemos D a la diferencia $|n_A - n_B|$ entre los dos resultados. Si, sobre cada caso N, el apostador arriesga una apuesta de D unidades a favor del resultado que ha ocurrido **menor cantidad de veces,** su ganancia total G una vez ocurrido el caso N, será:

$$\pm G = \frac{1}{2} (N - D^2) \qquad (2)$$

lo cual se puede comprobar fácilmente analizando las secuencias de las 2^N combinaciones posibles de los resultados A y B para cada nivel N, repartidas en (N + 1) grupos.

En la práctica, tal sistema de jugar implica utilizar en las apuestas la llamada "serie de D'Alembert" que es una simple progresión aritmética, en la que la apuesta vale cero si los resultados están equilibrados, o bien vale 1, 2, 3, ..., a favor del resultado "atrasado", (el de menor frecuencia absoluta), siendo esta progresión creciente cuando nos alejamos del estado de equilibrio y decreciente cuando nos acercamos a él. Es importante indicar que $\pm$ G es independiente del orden en el que ocurren los resultados A y B.

La ecuación (2) es la de una parábola con vértice en el punto de coordenadas cero y N/2. Este vértice corresponde al máximo posible de + G, esto es, cuando se alcanza D = 0; mientras que la pérdida máxima posible será

$$- G = \frac{1}{2} (N - N^2) = \frac{N}{2} (1 - N).$$

Dado que cuando N tiende a infinito, (D/N) tiende a cero, llegará tarde o temprano un nivel en el cual se cumpla la condición de que:

$$N > D^2 \qquad (3)$$

y en tal caso, se tendrá:

$$\frac{1}{2} (N - D^2) = + G \qquad (4)$$

Por otra parte, en N casos, y siendo N par, la cantidad de veces en que puede alcanzarse el equilibrio (D = 0, y en consecuencia + G = + N/2) varía desde un mínimo de cero veces hasta un máximo de N/2 veces, y por lo tanto, es más probable que a medida que N crece, se alcance al menos 1 vez el estado de equilibrio, lo que se conecta con el hecho de que para cada nivel N par,

... la ecuación (2) no constituye, en la práctica, en modo alguno, una "martingala infalible" para ganar en un ...

la combinación de resultados más probables, o mejor dicho, el conjunto más probable de combinaciones posibles es el que comprende las combinaciones en que se tiene $D = 0$.

Recalcaremos especialmente el hecho de que la ecuación (2) **no implica, en modo alguno, que pueda ser aplicada en la práctica en un juego de azar**, por dos razones que son, por otra parte, realmente extrañas a la contextura de dicha ecuación:

1.—Porque no puede establecerse en ningún caso en cual nivel N se va a cumplir la condición (3) o la condición más favorable aun en la que es $D = 0$; por ejemplo, estas condiciones podrían ser alcanzadas mucho después de la duración práctica (limitada) del juego;

2.—Porque puede ocurrir que a partir de cierto nivel N, la apuesta $A = D$, sea mayor que el límite superior de apuestas establecido arbitrariamente en dicho juego por parte de la banca.

Es decir, la ecuación (2) no constituye, en la práctica, en modo alguno, una "martingala infalible" para ganar en un juego de dos alternativas igualmente probables —un **desideratum** de muchos jugadores empedernidos— pero, en cambio, reviste un gran interés teórico, tanto por el hecho de que habrá un nivel N lo suficientemente grande para que $N - D^2$ sea positivo (y eventualmente $D = 0$), como por su forma parabólica.

Si el sistema estadístico comprende 3 resultados A, B, C de probabilidades iguales a ⅓, se puede formar 3 pares o 3 estadísticas parciales, a saber: AB, AC, BC y si denominamos D_1, D_2 y D_3 a las diferencias parciales, en tal caso, aplicando el mismo criterio anterior a estas estadísticas parciales pero con la variante de que la ganancia parcial será $+ G_p = (J - 1) A = 2 A$ (dos veces la apuesta), como sucede con las docenas en una ruleta, en N casos se tendrá:

$$\pm G = \frac{1}{2}(N) - \frac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) \quad (5)$$

la cual representa un grupo de tres parábolas. Para 4 alternativas de probabilidades iguales a ¼, habrá 6 estadísticas, para 5 alternativas habrá 10, etc., de modo que el total de diferencias parciales estará dado por la tabla:

J	D_J
2	1
3	3
4	6
5	10
.....	.....

... una vez alcanzado el equilibrio en un nivel N par, ello ...

y las ecuaciones (2) y (5) pueden generalizarse fácilmente a sistemas de J alternativas.

Creo necesario indicar que en los Tratados de Teoría de las Probabilidades que conozco, no he encontrado mencionadas estas ecuaciones.

III

Consideremos nuevamente el caso más simple, el de dos alternativas igualmente probables. Una vez alcanzado el equilibrio en un nivel N par, ello implica que el sistema debe haber pasado por un nivel anterior N' de desequilibrio absoluto máximo dentro de este ciclo.

Por lo tanto, desde ese nivel N' hasta el nivel N, aunque no necesariamente de manera uniforme, han ocurrido dos cosas:

a) Las dos frecuencias absolutas n_A y n_B desiguales al máximo en los N' casos, han alcanzado después esta igualdad en N casos;

b) La ganancia G ha aumentado desde un valor mínimo en N', posiblemente negativo, y eventualmente igual a $-G = \frac{1}{2}(N' - N'^2)$, hasta un valor máximo de $+G = N/2$.

Este sistema es abierto; recibe energía desde el exterior la cual es retransferida al exterior nuevamente en forma de calor, pero esta retransferencia, en cada caso, produce un "suceso": la ocurrencia del resultado A o del B. Desde el punto de vista de estos sucesos de ocurrencia acumulativa, es como si la energía introducida fuera almacenada en el sistema aunque debe tomarse en cuenta que los sucesos que ocurren no alteran la estructura de este último.

Ahora podemos encarar las cosas con el siguiente criterio: supongamos que el sistema comprende dos "cuerpos" A y B, que están inicialmente "fríos" y que, durante una primera fase, la energía que recibe el sistema es absorbida en mayor medida por uno de estos "cuerpos", de manera que al llegar al nivel de N' casos, este "cuerpo" está más "caliente" que el otro.

A partir de este nivel N' hasta el de N casos, el sistema sigue recibiendo energía en cantidades discretas, pero todo ocurre como si de preferencia las absorbiera el cuerpo que en N' estaba más "frío", de manera que al llegar al enésimo caso, ambos "cuerpos" están igualmente "calientes".

Tal situación presenta cierta analogía con un sistema idealmente aislado, constituido por dos cuerpos en contacto, el uno más caliente que el otro; durante un

... la entropía puede ser expresada como el logaritmo de la ...

intervalo finito de tiempo, ocurre un flujo de calor hacia el cuerpo más frío, hasta que se llega al equilibrio de las temperaturas y, durante este proceso, la entropía del sistema aumenta.

En este planteamiento son análogos:

1.—Las frecuencias absolutas de ocurrencia y las temperaturas;

2.—El número N de casos y el tiempo;

3.—La ganancia G y la entropía E.

Veamos si, dentro de este encuadre analógico, existe alguna semejanza entre las expresiones de la entropía E y la ganancia G.

La entropía puede ser expresada como el logaritmo de la probabilidad de que un sistema que se encuentra en un estado dado, pase después de cierto tiempo a otro estado más probable; sobreentendiéndose que el estado de máxima probabilidad es el estado de equilibrio energético (por ej., térmico). Si generalizamos la probabilidad como la medida de una superficie x^2 (siendo por lo tanto x la medida de una distancia recta), la cual tiene como valores extremos 0 y 1, la entropía E será:

$$E = \ln x^2 = 2 \ln x \qquad (6)$$

Dado que x^2 varía entre 0 y 1, x mide una distancia igual o menor que 1; y $2 \ln x$ es una cantidad igual a cero o negativa. Descartando el caso cero, que corresponde a la certeza (igual a 1) de que el sistema alcanzó el estado más probable de equilibrio, se tiene:

(con $\ln x = - L \neq 0$):

$$- E = - 2 L \qquad (7)$$

En el caso de la ganancia G, y multiplicando la ecuación (2) por el factor 2, tenemos:

$$G = - D^2 + N \qquad (8)$$

Suponiendo que G, D y N fuesen variables continuas, la primera derivada de (8) será:

$$G' = - 2D + 1 \qquad (9)$$

de donde:

$$G' - 1 = - 2D \qquad (10)$$

Si se comparan los segundos miembros de (7) y (10), se puede esperar que exista cierta conexión entre las magnitudes $L = \ln x$ (siendo x una distancia comprendida entre 0 y 1) y D, la diferencia de frecuencias en el proceso estocástico.

... la hipótesis de que el Universo físico es finito, y ...

IV

Introduzcamos ahora la hipótesis de que el Universo físico es finito, y comprende un espacio "envolvente" no euclidiano, cerrado y de curvatura constante, n–dimensional, y un espacio "envuelto", euclidiano, (n + 1) – dimensional. Si el espacio curvo cerrado envolvente es 3–dimensional, su contenido euclidiano será 4–dimensional: este conjunto espacial, como tal, es irrepresentable.

En este modelo de Universo finito, consideraremos que el radio R del espacio curvo envolvente es constante e igual a 1.

Consideraremos además, que los cuerpos observables distantes (estrellas "fijas" y Galaxias), que pueden ser observados porque emiten radiaciones electromagnéticas, visibles o invisibles pero detectables, se encuentran, o mejor dicho, se encontraban, respecto al "ahora" del observador, en el espacio curvo envolvente, es decir, en la hipersuperficie del sistema; y que un observador que los observa, considera que el espacio es "realmente euclidiano" y por lo tanto, se considera a sí mismo en el "interior" euclidiano, y más particularmente, en el "centro" de este "interior". Cualquier observador, situado en cualquier parte y en cualquier época, supondrá lo mismo.

Si el espacio curvo envolvente fuese una superficie esférica, lo cual sería compatible con un espacio euclidiano interno de 3 dimensiones, todos los focos luminosos observables hacia diferentes direcciones desde el "centro de la esfera" estarían a iguales distancias del observador que se considera situado en tal centro; pero como se trata de un espacio curvo 3–dimensional, esto es, de una hipersuperficie que envuelve a un hipervolumen 4–dimensional (hipercúbico), las distancias son diferentes, esto es, son fracciones del radio R de la hipersuperficie al que hemos hecho igual a 1. Es decir, estas distancias, en cualquier dirección, están comprendidas entre 0 y 1.

Como ya hemos dicho, tanto la hipersuperficie como el hipervolumen al cual envuelve, son irrepresentables, pero del mismo modo que la proyección de un hipercubo en un espacio de 3 dimensiones, comprende un "cubo externo" y otro "interno", cuyos vértices homólogos están unidos por 8 diagonales (cualquiera de las cuales representa la cuarta dimensión del espacio proyectada), la proyección de la hipersuperficie que envuelve a la porción de hipervolumen euclidiano, 4–dimensional, comprende una superficie esférica "externa" y otra "interna" lo cual se representa en Fig. 1.

... diremos de paso, que la porción de hipervolumen ...

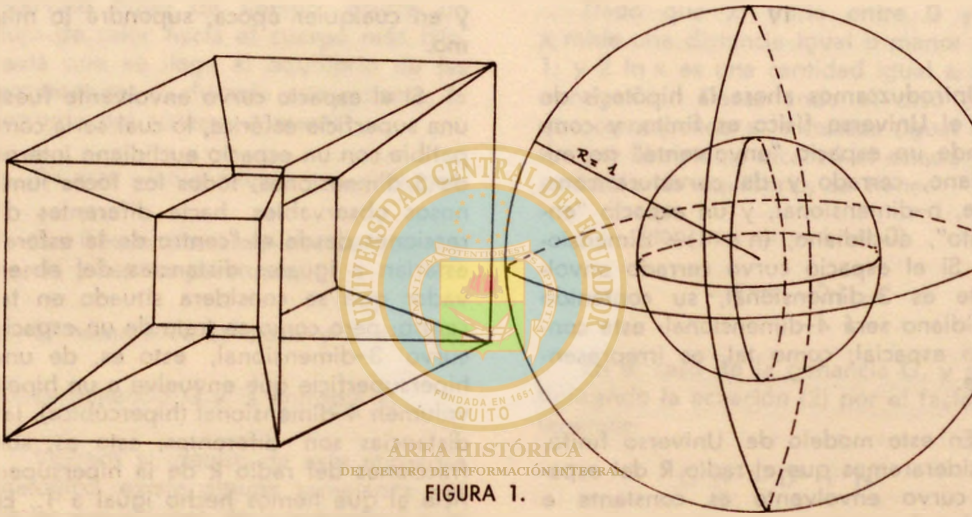

FIGURA 1.

En la proyección en la que aparecen las dos esferas, todo ocurre como si el observador se encontrase "proyectado en el centro" y cualquier fuente de emisión electromagnética estuviese ubicada en el espacio comprendido entre las superficies esféricas interna y externa. De tal modo, si el radio del sistema es el radio unidad de la esfera externa, las distancias (radiales y en rigor, temporales) entre las fuentes y el observador, son fracciones de este radio máximo, esto es distancias menores que 1.

Diremos de paso, que la porción de hipervolumen 4–dimensional envuelta por la hipersuperficie es igual a $2\pi r^4$, esto es, igual al volumen del cubo de lado r multiplicado por una longitud igual a la de una circunferencia de radio r.

La onda electromagnética que fue emitida desde una fuente situada en el espacio entre las esferas de Fig. 1, con una frecuencia f_1, llega después de cierto tiempo al observador que se considera situado en el centro, con una frecuencia f_2, menor que f_1, según el efecto DOPPLER-FIZEAU, lo cual se traduce en un corrimiento hacia el rojo de las rayas espectrales. Es decir, llega con una energía menor que la energía que tenía al momento de la emisión; y ya hemos vis-

... como cualquier observador se considera a sí mismo en el centro del sistema, deduce ...

to, al hablar de las relaciones de incertidumbre, que cuando se sustituye tiempo por distancia, la energía es menor, queda dividida por la magnitud:

$$w = c^2/v. \qquad (11)$$

Por lo tanto, entre la frecuencia de emisión y la frecuencia que detecta el observador, hay una diferencia de frecuencias D_f tal que:

$$D_f = f_1 - f_2 \qquad (12)$$

Como cualquier observador se considera a sí mismo en el centro del sistema, deduce que en la dirección radial a lo largo de la cual llegó la emisión, la fuente se aleja de este centro, como si el sistema total "se expandiera".

La diferencia D_f es tanto mayor cuanto mayor es la distancia a la que el observador calcula que "se encuentra" la fuente, esto es, calculando dicha distancia como si la fuente estuviera "allí-ahora". A su vez, deduce que los objetos emisores se alejan de él (del centro) a velocidades tanto mayores cuanto más distantes se "encuentran".

Pero nosotros hemos hallado que existe una conexión entre la diferencia de frecuencias y el logaritmo de la distancia cuyo cuadrado mide una probabilidad, esto es, el logaritmo de una distancia comprendida entre 0 y 1.

Y esta aparición del logaritmo de la distancia, se vincula con el hecho de que siendo constante la velocidad (absoluta, es decir, invariante de LORENTZ) de la propagación de la onda electromagnética, la distancia a la que el observador calcula que "se encuentra" la fuente "que se aleja" es directamente proporcional al tiempo transcurrido desde la emisión, puesto que dicha "distancia" x es igual a c t.

Si, desde el punto de vista del movimiento relativo, consideramos que la velocidad c es imaginaria (por ser absoluta e invariante de LORENTZ) la "distancia" x también lo será, siempre que se admita que, de cualquier forma, el tiempo t es real.

Resulta ser así imaginaria la "expansión espacial" del Universo: tal "expansión" es estrictamente **temporal.** La admisión de que la velocidad c es imaginaria, tiene entre otras consecuencias, la de que si la velocidad relativa v es positiva, la velocidad de onda de DE BROGLIE, a saber, w, es negativa. De tal modo, la existencia de $|w| > c$, no contradice la afirmación de que c es el límite superior finito de las velocidades positivas v.

V

Hemos demostrado en la Sección II de este artículo que si un juego de azar comprende solamente dos alternativas A y B igualmente probables y mutuamente excluyentes, un jugador que

... el número N creciente de unidades que va ganando el jugador, es igual ...

apostara en cada caso tantas unidades como las que indica la diferencia de ocurrencia entre A y B, siempre a favor de la alternativa que ha ocurrido menos veces, obtendría al alcanzarse el equilibrio de frecuencias en N casos, una ganancia igual a N/2 unidades; o bien igual a N unidades si el jugador apuesta el doble en cada caso. Tal estado de equilibrio puede ocurrir en uno o más ciclos propios del sistema, constando en este ejemplo, cada ciclo propio de 2 casos. Llamaremos "ciclo de equilibrio" al número de ciclos propios (número que es $\geqslant 1$) a lo largo del cual o de los cuales se alcanza el equilibrio.

Vamos a suponer ahora, que la banca que acciona el sistema y paga las apuestas, posee un capital de C_B unidades y que este capital es limitado, o sea, finito. Como al final de cada ciclo de equilibrio, el jugador gana N unidades, llegará un momento, después de cierto número de ciclos de equilibrio, en que el jugador le habrá ganado a la banca la totalidad de este capital, esto es, le habrá ganado un número máximo de unidades igual a C_B.

El número N creciente de unidades que va ganando el jugador, es igual al número N creciente de casos en que ocurren A ó B; y estamos suponiendo que A ó B, pueden seguir ocurriendo indefinidamente, esto es, que la estructura básica del sistema no se altera (por ejemplo, si se observase que ocurre cierta alteración por desgaste físico del mecanismo que produce los resultados A ó B, este mecanismo sería sustituido por otro idéntico pero sin desgaste).

Este número N de casos es función del tiempo t:

$$N = F(t) \qquad (13)$$

y en consecuencia, al llegar al nivel en que el jugador le ganó todo su capital C_B a la banca, ésta ya no podría seguir pagando apuestas: el juego debería darse por finalizado, lo cual implica decir que siendo N función de t, esto es equivalente a admitir "que el tiempo se detiene".

Al ocurrir tal "detención del tiempo", en este "Universo del juego", se daría el caso siguiente:

En un comienzo, el jugador contaba con un capital C_J lo suficientemente grande como para continuar apostando a pesar de cualquier pérdida parcial; y la banca con un capital C_B lo suficientemente grande a su vez como para pagar las apuestas del jugador. Al final, el jugador cuenta con un capital $C_J + C_B$ y la banca con un capital igual a cero.

En tales condiciones, es evidente que el juego no puede continuar.

Para que en dicho "Universo" el juego continúe, o sea, para que el tiempo siga transcurriendo a partir de este esta-

... el intercambio de identidades, debe producirse cuando ...

do, es evidente que, en primer lugar, debería producirse **un intercambio de identidades entre jugador y banca:** aquél debería asumir las funciones de ésta y viceversa. Sin embargo, este intercambio no basta por sí solo, pues al producirse, la banca habría perdido todo su capital y **no tendría cómo comenzar a efectuar apuestas.**

Se impone, por lo tanto, introducir una modificación, que consiste en lo que sigue.

Para empezar a jugar, el jugador cuenta con un capital C_J y la banca con un capital C_B que es un número entero n de veces el capital C_J del jugador:

$$C_B = n\, C_J \qquad (14)$$

El intercambio de identidades, debe producirse cuando este capital C_B de la banca queda reducido a la cantidad C_J, esto es, cuando la banca ha perdido $(n-1)\, C_J$.

Por lo tanto, el capital total C_T con el que comenzaría un ciclo completo, sería:

$$C_T = C_J + n\, C_J = (n+1)\, C_J \qquad (15)$$

Claro está, que en esta secuencia de ciclos en que se intercambian las identidades de jugador y banca, el juego como tal carecería de sentido, puesto que todo consistiría en una transferencia alternante de la cantidad $(n-1)\, C_J$ de un sector al otro.

Sin embargo, esta secuencia presenta interés por su analogía con un Universo físico finito, en el cual la cantidad total de energía (equivalente al capital total C_T) es finita, el tiempo continúa transcurriendo para cualquier observador situado en cualquier parte, y la entropía E, análoga de la ganancia G, continúa aumentando, **si se prescinde de considerar cuál de los dos sectores es el que obtiene dicha ganancia.**

A esto debemos agregar que durante un ciclo total en el que, luego de varios ciclos de equilibrio, el capital igual a $(n-1)\, C_J$ pasó de manos, los resultados A y B han ocurrido según cierto orden que corresponde a una de las 2^N combinaciones posibles, y más particularmente a una de las combinaciones de A y B que corresponden al equilibrio. Con N suficientemente grande, existe un número muy grande de combinaciones de A y B correspondientes al equilibrio y **es muy improbable que en un nuevo ciclo total los resultados A y B vuelvan a ocurrir exactamente en el mismo orden anterior.**

Ello contradice la doctrina del "eterno retorno" tal como fue elaborada por NIETZSCHE, quien concebía el devenir temporal universal como un solo ciclo que se repite indefinidamente de manera exactamente igual en todos sus detalles, en base a un concepto ético funda-

... el primer principio es el poder creador y formador ...

do en que "debemos" vivir cada instante de nuestra vida, convencidos de que vamos a tener que volver a vivirlo indefinidas veces, de modo tal que no tengamos que arrepentirnos de haberlo vivido. La falacia lógica implicada en este razonamiento es la siguiente: se confunden en un solo contexto lo que "debería" ocurrir de acuerdo con cierta valoración ética preestablecida, con lo que efectivamente ocurre, que es en rigor una de las tantas maneras en que pueden ocurrir las cosas y no todas, sino ciertas cosas. Además de que, admitiendo la validez de esta valoración ética, resultaría más lógico pensar de que no vamos a volver a vivir nunca más un instante dado de nuestra vida, de modo que más bien deberíamos esforzarnos por vivirlo de la manera más acorde con dicha valoración ética, sea ésta cuál fuere.

En realidad, la idea del "eterno retorno" no era original de NIETZSCHE, puesto que ya había sido concebida mucho antes por los filósofos estoicos de la Grecia clásica. De acuerdo con ZELLER, en su obra "Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung dargestellt", vol. III, Leipzig, 1875-1882, los estoicos griegos pensaban lo siguiente:

"Las cosas separadas de la sustancia original se desarrollan según una ley interna. Ya que, según su definición, el primer principio es el poder creador y formador, el Universo entero debe crecer a partir de sí mismo con la misma necesidad que el animal o la planta de la semilla. Según los estoicos y Heráclito, la llama original se transforma primero en "aire" o vapor, después en agua; de ésta, una parte se precipita como tierra, y otra permanece como agua; una tercera se evapora como aire atmosférico, el cual aviva de nuevo el fuego. De la mezcla cambiante de estos cuatro elementos se forma el mundo —desde la tierra como centro—... A través de esta separación de los elementos surge el contraste entre el elemento activo y el pasivo; el alma y el cuerpo del mundo... Pero, de la misma manera que este contraste vino en el tiempo así está destinado a cesar; la sustancia original consume gradualmente la materia **que ha sido segregada de ella como un cuerpo**, hasta que, al final de este período del mundo, una conflagración mundial devuelve cada cosa a su primera condición. Pero, cuando cada cosa ha vuelto de esta manera a su unidad original, y **el gran año del mundo** se ha extinguido, empieza otra vez la formación de un nuevo mundo, tan exactamente igual al anterior que en él, todas las cosas, personas y fenómenos se tornan exactamente como antes; y de esta manera, la historia del mundo y de la divinidad... se mueve en un ciclo sin fin, a través de los mismos períodos".

... la cantidad de materia y de movimiento "están fijadas" ...

Los subrayados son del autor: el primero remarca la idea básica de que la materia es una "segregación" de la "sustancia original" (la energía); el segundo, la idea de un ciclo cósmico, tal como el que hemos deducido en el caso del "Universo del juego" en el cual, cierta cantidad del capital de la banca, pasa a manos del apostador, que así torna a convertirse en banca y viceversa.

EMPEDOCLES y LUCRECIO repitieron más o menos la misma idea; aunque muchos siglos después, SPENCER modificó este concepto, en la conclusión de sus "Primeros Principios", de una manera que concuerda con lo aquí estamos sosteniendo. Dijo en efecto, que:

"De esta manera hemos llegado a la conclusión de que el proceso completo de las cosas desplegadas en la totalidad del universo visible es análogo al proceso total de las cosas desplegadas en los más pequeños conjuntos. **Al estar fijada la cantidad de materia y de movimiento**, parece que cuando el cambio en la distribución de la materia que efectúa el movimiento ha alcanzado el límite en cualquier dirección que se lleve, el movimiento indestructible necesita una dirección inversa. Aparentemente, las fuerzas de atracción y repulsión **que coexisten universalmente**, y que necesitan ritmo en los más mínimos cambios en todo el universo también necesitan ritmo en los cambios totales, alternando la evolución y la disolución. Y de esta manera se sugiere el concepto de un pasado durante el cual han existido evoluciones sucesivas análogas a las que ahora están continuando, y de un futuro durante el cual otras evoluciones sucesivas pueden continuar, **siempre lo mismo en principio, pero nunca lo mismo en resultado concreto**".

Nuevamente hemos subrayado, en primer lugar, que la cantidad de materia y de movimiento "están fijadas" (son cantidades finitas y permanentes); en segundo lugar, que coexisten las fuerzas de atracción y repulsión, lo cual plantea la existencia de un equilibrio dinámico y por lo tanto no necesariamente estable; tercero, que los ciclos se repiten, pero no de manera exactamente igual. Y en esto último reside la diferencia entre el "ciclo cósmico" de los estoicos y el de SPENCER.

VI

Veamos ahora cuáles son los principales elementos análogos entre el "Universo del juego" que hemos descripto sucintamente y un Universo físico finito como el que introdujimos por hipótesis en la sección IV.

En primer lugar, y en el aspecto estructural, existe una analogía en lo referente a las naturalezas discontinuas de la materia (estrictamente de la masa) y

... en el universo físico, la masa material se presenta también estructurada en sistemas discontinuos: partículas, átomos y moléculas ...

la energía. En el "Universo del juego" la estructura de la masa es discontinua en el sentido de que los "sucesos" (ocurrencia de uno u otro resultado) son dados por las dos superficies opuestas de la masa de una moneda, o por las superficies planas discontinuas de la masa de un dado, o por las casillas numeradas, separadas, en las que puede caer la bolilla en una ruleta, etc. En el Universo físico, la masa material se presenta también estructurada en sistemas discontinuos: partículas, átomos y moléculas. En segundo lugar, en el "Universo del juego", el sistema cuya estructura es discontinua es accionado discontinuamente, por medio de cantidades discretas de energía, que en cada caso producen un suceso identificable. En el Universo físico, la energía es emitida o absorbida en cantidades discretas elementales llamadas **quanta**, o en cantidades que son múltiplos enteros de esos quanta elementales. Los sucesos físicos resultan precisamente de estas emisiones y absorciones.

Además, en el "Universo del juego" que en su expresión básica consta de dos alternativas, se suceden N casos de sucesos A,B de tal manera, que eligiendo un suceso cualquiera A ó B ocurrido en un nivel N–ésimo, como suceso referencial, podemos referirnos a los sucesos que han ocurrido antes, en cierto orden ya dado e inmodificable, y por lo tanto a los que van a ocurrir después, en un nuevo orden que en cambio no podemos predecir, y que no depende del anterior. En el Universo físico, y eligiendo un suceso dado como suceso referencial, podemos hablar de los sucesos que han ocurrido antes en el mismo sitio (relativo, esto es, especificado en cierto sistema de referencia), en cierto orden ya inmodificable y de los que van a ocurrir después, en ese mismo sitio en un orden que ignoramos, puesto que el futuro de la realidad física elemental es impredecible. Se puede predecir el comportamiento estadístico de conjuntos muy grandes de entes elementales, y en ello se basan las "leyes físicas causales", pero esas leyes no nos informan acerca del comportamiento individual de cada elemento: del mismo modo que, en nuestro juego, podemos predecir que a medida que N se hace muy grande, tiende a ocurrir el equilibrio de los resultados, pero no podemos predecir ningún resultado en un caso aislado.

Es decir, que ambos casos tienen como comunes denominadores, que en ellos los sucesos referidos a cierto sitio, ocurren en cierto orden temporal, y que ese orden temporal está descripto por leyes o funciones estadísticas. Ambos son "Universos" en el sentido de que, valga la redundancia, los sucesos se suceden en un solo sentido: esto es, hacia el futuro, procediendo la palabra de **uni:** uno, y **versus:** hacia.

... la cantidad de quanta emitidos por átomos materiales es igual a la cantidad ...

En nuestro "Universo del juego", los dos sucesos elementales que pueden ocurrir, A y B, son "instantáneos", es decir, carecen de duración, puesto que aunque admitamos que la ocurrencia de A ó B en cada caso particular, es la consecuencia (durable) de una cadena causal, ésta es para nosotros inobservable; lo que tiene cierta duración es una secuencia de N casos en la que queda seleccionada como ocurrida una de las 2^N combinaciones posibles.

En el Universo físico también podemos aislar un sistema de dos sucesos elementales instantáneos: que un **quantum** de energía sea emitido (A) o absorbido (B), necesariamente por algún átomo material. En este caso también se trata de sucesos mutuamente excluyentes, aunque quedaría por demostrar que estos dos sucesos elementales son igualmente probables; esto significaría que en cualquier instante referido al tiempo propio de un sistema de referencia arbitrario, la cantidad de **quanta** emitidos por átomos materiales es igual a la cantidad absorbida por los restantes átomos materiales.

Esto nos lleva a considerar que en nuestro modelo de Universo finito, cuyo radio (en la proyección de la hiperesfera) es la medida del tiempo, la cantidad de masa material es invariable. Digamos, de paso, que al sustituir distancia recta x (entre el "centro" donde suponemos encontrarnos y una fuente luminosa situada en el espacio interesférico de la proyección, o sea, una fracción del radio) por el tiempo t, la curvatura, que es la recíproca del radio, es a su vez la recíproca del tiempo, y es por lo tanto, la medida de una frecuencia. Ya hemos visto que esta sustitución de distancia recta por tiempo, es compatible con el efecto DOPPLER-FIZEAU: implica, correlativamente, una disminución de la energía que es proporcional a la frecuencia. Y por otra parte, dicha sustitución se justifica, al considerar que la distancia recta, como distancia que puede ser recorrida por un móvil a velocidad $v < c$, es imaginaria: sólo la luz puede recorrerla, a la velocidad límite c. Los móviles materiales que se mueven a velocidades relativas v, sólo pueden desplazarse en el campo real siguiendo trayectorias curvas.

Aclaremos además que estas trayectorias curvas ocurren en el espacio interesférico de la proyección, mientras que la luz se proyecta en línea recta a lo largo del radio **de esta misma proyección.**

Dado que la luz llega con una frecuencia disminuída (lo cual es interpretado como un "alejamiento" de la fuente por un observador que supone estar en el centro de la proyección) y que la frecuencia mide una curvatura, se deduce que en su **trayecto real**, la luz **no sigue**

... la "verdadera trayectoria" del rayo luminoso en el vacío no es una línea recta, sino una espiral ...

una línea recta: en la hiperesfera propiamente dicha, sigue una trayectoria de curvatura decreciente.

La curva que cumple con esta condición, en un plano, es la espiral y por lo tanto, debemos concluir que la "verdadera trayectoria" del rayo luminoso en el vacío **no es una línea recta, sino una espiral.**

Ahora bien; la frecuencia fundamental en la distribución tipificada de GAUSS, esto es, la que corresponde a una desviación cero, vale $1/\sqrt{2\pi} = 0{,}3989423$; y aquí, "desviación cero" significa, físicamente, la trayectoria rectilínea (la de la luz).

Por lo tanto, el período elemental (o sea, la unidad natural de tiempo, o si se prefiere, la medida generalizada del **quantum** de tiempo), vale $\sqrt{2\pi} = 2{,}5066281$.

Si admitimos (KRAGLIEVICH–KRAL, MS) que dinámicamente el número π equivale a 1/2, lo cual se deduce de aceptar que estáticamente π equivale a la unidad, la magnitud $\sqrt{2\pi}$ equivale a 1; esto es, a la medida generalizada del radio del Universo.

Existen razones —que aquí no especificaremos— para suponer que con la unidad de tiempo, es decir, con la longitud del "radio universal", está ligado el número e, base de los logaritmos naturales. La diferencia entre el valor de e, y el de $\sqrt{2\pi}$, ambos números irracionales, es tal que:

$$\frac{e - \sqrt{2\pi}}{4} = 0{,}0529134.......$$

Pero el radio del electrón en reposo en el átomo de Hidrógeno, o sea, el primer radio de BOHR, que se denota como r_0, vale $0{,}0529172 \times 10^{-8}$ metros, o como lo ha demostrado recientemente (KRAGLIEVICH–KRAL, 1975) debe valer **exactamente** 0,0529166, ... ($\times 10^{-8}$ metros) que es igual, salvo 10^{-8}, a $(M + M' - \dot{M})/2\ (\times 10^{-1})$ siendo M, M', y $\dot{M}$, respectivamente, la media aritmética (= 1), la mediana (= 0,958333 ...) y la modalidad (= 0,9) de la distribución estadística de los elementos estructurales de un volumen de espacio euclidiano.

Esto es, que:

$$\frac{1}{2}(e - \sqrt{2\pi}) \sim 2\, r_0$$

(salvo el factor decimal).

En otras palabras, la "contracción" del "radio universal" e/2 en $\sqrt{2\pi}/2$ es prácticamente proporcional, por un factor decimal, a la medida del diámetro del átomo de Hidrógeno en su estado fundamental.

... existe en este universo una cantidad total de energía equivalente al ...

En resumen, nuestra comparación entre un Universo finito de radio arbitrariamente igual a la unidad y un proceso estocástico de dos alternativas igualmente probables y mutuamente excluyentes, nos conduce a lo siguiente:

Existe en este Universo una cantidad total de energía equivalente al capital total C_T de nuestro juego, en el que intervienen un jugador y una banca que periódicamente intercambian sus identidades; esta cantidad total vale:

$$C_T = (n + 1)\, C_J$$

siendo n un número entero y C_J el capital con el cual el jugador inicia el juego. La banca, en este inicio, dispone de un capital:

$$C_B = n\, C_J$$

Una cantidad igual a $(n-1)\, C_J$ es transferida, en un ciclo, desde el ente que actúa como banca hacia el que actúa como jugador. Por lo tanto, durante un ciclo (un "año del mundo" en la terminología de los estoicos griegos) hay una cantidad $2\, C_J$ que permanece intransferida: la equiparamos a la cantidad fija de masa material que "siempre" existe en el Universo. Y colocamos la palabra siempre entre comillas, porque el conjunto no transcurre en el tiempo: es el tiempo el que transcurre en el conjunto, que como tal, es **atemporal.**

En consecuencia, entre esta cantidad y la cantidad de energía total, existe una relación tal, que:

$$\frac{(n + 1)\, C_J}{2\, C_J} = \frac{1}{2}(n + 1) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \qquad (16)$$

siendo $2\, C_J$ la cantidad **mínima** de energía (o de capital) que no es transferida. La cantidad $(n-1)\, C_J$ se encuentra en estado de flujo: equivale a la cantidad de energía libremente difundida en el espacio total, en forma de radiación electromagnética.

En la Teoría Cuántica del Oscilador Armónico, la energía mínima W_o no es igual a cero, como ocurría en la Física precuántica, o Física del continuo. De tal manera, siendo $W_o > 0$, la energía total W_T del oscilador en un nivel cuantificado n'—ésimo, vale:

$$W_T = \left[n' + \frac{1}{2} \right] W_o$$

y se tiene:

$$\frac{W_T}{W_o} = n' + \frac{1}{2}$$

Si hacemos n' equivalente a n/2 aparece una perfecta correspondencia entre la energía total y el capital total

... no podemos saber cuál es el estado actual del universo ...

y entre la energía mínima y el capital mínimo que no es transferido durante un ciclo en nuestro juego.

VIII

Como cuestión adicional, y como consecuencia de que en nuestro Universo finito debe existir una cantidad fija de masa material, cabe preguntarse cuál es el número de objetos materiales que realmente existen.

Conocemos estos objetos como consecuencia de sus radiaciones electromagnéticas, ya sean visibles o invisibles, pero detectables. Sin embargo, no todos los objetos que detectamos, existen actualmente, esto es, en nuestro ahora relativo. La existencia de muchos de ellos se refiere a un pasado remoto y no tenemos un medio objetivo de comprobar que "todavía" siguen existiendo: no podemos saber, ni si existen "ahora", ni en el caso de que existan, "dónde" se encuentran ni en que estado se encuentran.

Sólo podemos afirmar objetivamente, que existían hace cierta cantidad de tiempo y que entonces se encontraban en cierta dirección, a una distancia recta de "nosotros–ahora" que como hemos visto, no es una "verdadera distancia".

Es decir, que en virtud de la condición finita y límite de la velocidad de la luz, **no podemos saber cuál es el estado actual del Universo** (ni ello tiene sentido, puesto que el conjunto es atemporal) y esto es compatible con el hecho de que **no podemos, tampoco, representar la "forma real" de dicho Universo,** ni por lo tanto, calcular su "tamaño": puesto que mal se puede conocer el tamaño métrico de algo cuya forma real se desconoce.

Sin embargo, y en base a especulaciones que vinculan entre sí diversas constantes cósmicas de una manera independiente de sus medidas en un sistema referencial determinado, EDDINGTON sostuvo en su obra "Fundamental Theory" (Cambridge, 1946) que el número total de protones (esto es, núcleos de Hidrógeno) que pueden existir en el Universo, es un número del orden de 10^{79}. Según EDDINGTON, cuya teoría aún no ha sido evaluada completamente, este número "debe ser" exactamente:

15 747 724 136 275 002 577
605 653 961 181 555 468
044 717 914 527 116 709
366 231 425 076 185 631
031 296.

Esto es, una cifra que para la mente humana carece por completo de significado "empírico". Lo importante, al margen de esto, es que de acuerdo con la Teoría Fundamental de EDDINGTON, no

... Dios le extendió unos papeles llenos de ecuaciones y le dijo: "aquí está todo" ...

puede ni debe haber un protón más, ni uno menos que los que indica esa cifra monumental.

En realidad, la cifra transcripta, pese a su apariencia ininteligible, se reduce al número:

$$136 \times 2^{256}$$

y este número no es arbitrario. Resulta, lógicamente, de un cierto cálculo de matrices vinculado con la estructura básica de la realidad física.

La teoría de EDDINGTON fue objetada en el sentido de que el "número mágico" 136, que aparece en su fórmula es en realidad el número 137, el cual está ligado a la llamada "constante de estructura fina" del espectro de la luz. A propósito de esto, existe una graciosa anécdota imaginaria: cuando murió el gran físico alemán W. PAULI, lo primero que hizo en el Cielo fue preguntarle a Dios por qué había elegido precisamente el número 137 como clave de la estructura del Universo. Dios le extendió unos papeles llenos de ecuaciones y le dijo "aquí está todo". PAULI los examinó y le contestó: "esto es falso".

De todos modos, para quienes no conocen los entretelones de estas teorías, les puede parecer muy trivial que la estructura del Universo dependa de una variación tan mínima como la que hay entre 136 y 137, ya que se trata en definitiva de una unidad de más. Sin embargo, la cuestión es más seria de lo que parece, pues la cifra 136 está ligada a la construcción de una matriz perfecta, y EDDINGTON, que era cuáquero, suponía que efectivamente Dios había construido el Cosmos de una manera perfecta: una curiosa simbiosis entre especulación científica del más alto nivel y creencias religiosas de largo ancestro familiar. Mientras que la introducción de 137 en lugar de 136, desorganiza el cálculo, como si en realidad, al construir el Cosmos, Dios se hubiera equivocado, con lo cual dejaría de ser "perfecto".

En este último caso, habría tenido razón el alma de PAULI cuando exclamó "esto es falso", pues cuando "Dios hizo el mundo" (metafóricamente hablando) habría cometido un error elemental.

Ello arroja una seria duda acerca de "la perfección absoluta de Dios" (no más importante que el descubrimiento de las manchas del Sol, que en su tiempo fue considerado un hecho herético, pues se suponía que el Sol debía ser inmaculado), pero gracias a ese error, es que en realidad el Universo **funciona.** Si el cálculo de EDDINGTON, relacionado con 136, fuera correcto, la Creación sería perfecta y como tal, no funcionaría.

Esta imperfección se vincula con el hecho de que el número 1,8371173... (que es proporcional a la suma de los

... las estrellas más grandes tienen un límite de masa definido: pueden contener hasta 10^{69} protones ...

radios del protón y el electrón en el átomo de Hidrógeno) es el logaritmo natural (de base e) de un número que es muy próximo a $2\pi = 6{,}28318\ldots$ pero que sin embargo no es exactamente 2π. La discusión analítica de este punto excede de los límites del presente artículo.

Dejando esto de lado, y volviendo al número total de 10^{79} protones, hemos de tomar en cuenta que según JORDAN, en su obra "Die Herkunft der Sterne" (Stuttgart, 1947) las estrellas más grandes tienen un límite de masa definido: pueden contener hasta 10^{69} protones. El Sol, que es una estrella amarilla intermedia, tiene una cantidad 50 veces menor, a saber, 2×10^{57} protones.

El cálculo del número de estrellas de nuestra Galaxia de la Vía Láctea, es del orden de $2{,}5 \times 10^{11}$. Por lo tanto, el número de protones de nuestra Galaxia, tomando al Sol como tipo de estrella intermedia, sería del orden de 5×10^{68}.

Si suponemos que nuestra Galaxia es "típica", es decir, que pertenece a un tipo promedio, y aceptamos el número total de 10^{79} protones, el número de Galaxias realmente existente en el modelo de Universo finito, sería del orden de:

$$\frac{10^{79}}{5 \times 10^{68}} = 2 \times 10^{10}$$

esto es, veinte mil millones.

Esta es una cifra indudablemente grande, pero mucho más pequeña que lo esperado: igual a cerca de un décimo del total de estrellas que se supone que existen en nuestra Galaxia y de hecho, infinitamente menor que el número infinito de cuerpos que se supone en otras hipótesis que constituyen el Universo.

REFERENCIAS

KRAGLIEVICH – KRAL, J. L., 1975.– Statistical analysis of the structure of euclidean 3–space.– Edición del autor, Quito, pp. 1-32.

............., M. S.– Teoría general de homologación entre los campos mecánico–gravitatorios y electro–magnéticos.