DOUGLAS
MOYA
ALVAREZ

UNA NUEVA INTERPRETACION AL PRINCIPIO DE LA MINIMA ACCION

DOUGLAS
MOYA
ALVAREZ

UNA NUEVA INTERPRETACION AL PRINCIPIO DE LA MINIMA ACCION

1.— INTRODUCCION.

En la historia de la Ciencia abundan los intentos de hacer coincidir las leyes de la naturaleza con la estructura de la teología. Varios de éstos, basados en el principio de mínimo, tenían interés para los matemáticos. El más célebre de éstos fue formulado por Maupertuis, y fue expuesto como una doctrina científica que demostraba la existencia de Dios. Esta perspectiva avivó la curiosidad de las brillantes inteligencias de Euler y Bernoulli, siendo defendida por ellos. En el desarrollo ulterior de la Física Lagrange, primero, y luego Hamilton extendieron los resultados de Euler para sustentar el desarrollo de la mecánica teórica desde un principio variacional, despreciando cualquier otra interpretación que se salga de los márgenes de la formulación. El Principio de mínima acción, se redujo así, en tan solo un formulismo matemático sin ningún contenido físico nuevo, con igual importancia y significado que el formular las leyes de la naturaleza con ecuaciones diferenciales o ecuaciones integrales.

Sin embargo, lo curioso, es que todas las teorías físicas del mundo atómico que no cumplen con el principio de mínima acción son incorrectas de principio. Esto ya lo había observado el físico norteamericano y premio Nobel Feymman. Así pues, algo oculto como significación existe tras el mencionado principio, el cual no puede ser solamente una forma alternativa de exponer las leyes de la naturaleza, pues éste, al contrario que la formulación en ecuaciones diferenciales o integrales, los restringe poderosamente.

El presente trabajo pretende demostrar que la Física necesita hacer una afirmación filosófica sobre el carácter del universo, colocándola en el campo del materialismo científico a través de un principio fundamental. Tal afirmación es que el mundo es objetivo, y su existencia y desarrollo se da independientemente de la voluntad, la imaginación y la conciencia de quien lo conoce, afirmación que se expresa como el principio de mínima acción.

2.— QUE ES EL PRINCIPIO DE MINIMA ACCION.

Supongamos la existencia de un sistema aislado formado por N partículas. En un instante fijo de tiempo las partículas ocupan una posición, la misma que evolucionará en la medida que el tiempo transcurre. Del mismo modo voy a inventar un espacio tal que, un punto de él sea representativo de la configuración del sistema en consideración. ¿Cómo lograrlo? Esto es fácil, pues basta con afirmar que un punto de aquel espacio está determinado por el conjunto de las coordenadas de todas las partículas en el espacio real, esto quiere decir, por 3N coordenadas, ya que en el espacio real le corresponden tres coordenadas a cada partícula. Como las coordenadas de cada partícula cambian en el tiempo, el punto representativo del sistema en el espacio de configuración variará de posición, describiendo una trayectoria continua entre dos instantes fijos de tiempo, digamos t1 y t2, tales que a cada uno le corresponde una configuración dada del sistema, y correspondientemente, un punto representativo.

Entre estos dos puntos representativos va a existir un conjunto infinito de curvas que los empalmen, todas ellas posibles, pero tan solo una será la trayectoria real del sistema, y las otras serán simples hipótesis que solo pueden tener lugar en el pensamiento, más no en el mundo objetivo.

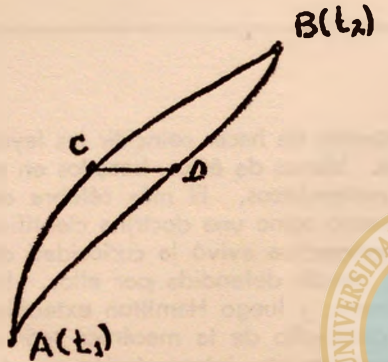

FIG. 1.—Trayectorias del espacio de configuración.

¿Cómo distinguir la trayectoria real de una hipotética?

Para ello voy a suponer conocida la trayectoria real, como por ejemplo, la curva ACB de la FIG. 1. La curva ADB supondré hipotética, separada una distancia infinitesimal de la curva real. Sea entonces la integral de líneas,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f dt \qquad (1)$$

Siendo f alguna función de las características dinámicas del sistema, que habrá que definir cuidadosamente. El sistema evoluciona de modo que su punto representativo se desplaza desde A hasta cualquier punto correspondiente al intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$, que lo llamaremos C. En el instante t el punto representativo se desplaza desde C a D, desde una trayectoria real a una trayectoria imaginaria, y luego sobre la trayectoria imaginaria se va a desplazar hasta t_2. La integral de línea (1) se toma ahora sobre la trayectoria ADB dando un resultado S'. Podemos afirmar que,

$$S' = S + \delta S \qquad (2)$$

donde δS corresponde a la variación de la acción entre la trayectoria real y la trayectoria imaginaria para los límites fijos t y t_2. Pero las leyes del mundo son objetivas, es decir, existen independientemente de nuestro pensamiento y de las impresiones y creencias que tengamos de ellas, lo que significa negar la posibilidad que el punto representativo estando en C se "salte" a una trayectoria imaginaria muy próxima, pues de lo contrario, esto implicaría que las cosas comenzarían a evolucionar según nuestros mitos y creencias y no de acuerdo con la realidad. Por lo tanto, el argumento anterior concluimos que es condición necesaria y suficiente para una trayectoria real que se cumpla la condición

$$\delta S = 0 \qquad (3)$$

Supongamos que cada curva que empalma los puntos A y B queda fijada al definir los valores del juego de parámetros α, β, γ... Esto significa que si

$$S = S(\alpha, \beta, \gamma \ldots) \tag{4}$$

de la condición (3) concluimos:

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial S}{\partial \beta} \delta\beta + \ldots = 0 \tag{5}$$

que se cumplen para todos los valores posibles de α, β... y de $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$.... por lo tanto (5) representará una combinación lineal trivial, y:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = 0 \ldots \tag{6}$$

Que no es sino la afirmación de que todas las trayectorias posibles del punto representativo en el espacio de configuración, la trayectoria real es la que hace extrema la integral (1). Esta conclusión que se conoce como el Principio de Mínima Acción es muy general e independiente de como definamos la función f, y se basa en la afirmación de la objetividad materialista del mundo, pues usando este argumento es como llego a (3) y a (6) en una forma lógica y natural.

3.– SIGNIFICADO FISICO DEL SUB-INTEGRADO DE LA ACCION.

La definición de la función f está vinculada con el tipo de fenómeno en particular a ser descrito. Es fácil demostrar que f tiene dimensiones de energía y se acostumbra llamar el Lagrangiano del Sistema. Es por todos conocido que la Mecánica Clásica es el límite tanto de la teoría de la relatividad para pequeñas velocidades y para la métrica de espacios euclideos, como de las teorías cuánticas para cuando suponemos que la constante de acción es cero. Por lo tanto, la usaremos como modelo de exposición.

En Mecánica Clásica, un sistema está totalmente determinado cuando conocemos la posición y la velocidad de las partículas en un instante determinado, así podemos predecir su condición futura. Por lo tanto, f deberá ser una función de la posición, y de la velocidad de las partículas, así como del instante de tiempo en que efectuamos su medición simultánea.

Hagamos, por tradición, $f = L(X_i, \dot{X}_i, t)$ y (1) se escribirá como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(X_i, \dot{X}_i, t)\, dt \tag{7}$$

de la ecuación (3):

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(X_i, \dot{X}_i, t)\, dt = 0$$

que nos lleva a concluir la expresión:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i}\, \partial X_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial X_i} - \frac{d}{dt}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} \right\} \delta X_i \, dt = 0 \qquad (8)$$

todas las curvas pasan por los puntos A y B; por lo que

$$\delta \; X_i \; (t_1) = \delta \; X_i \; (t_2) = 0$$

y puesto que $\delta \; X_i$ va a ser, en general para $t_1 < t < t_2$, distinto de cero. De (8) deberá cumplirse necesariamente que,

$$\frac{d}{dt} \; \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} - \frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \qquad (9)$$

ecuación a la que se denomina de Euler-Lagrange, y señala la condición que L debe cumplir para que (1) se haga extrema. Consideremos un sistema de referencia inercial, en el cual el espacio y el tiempo sean, lógicamente, homogéneos e isotrópicos. En este tipo de sistema, un cuerpo libre y en reposo permanecerá siempre en reposo. Es lo que se conoce como el principio de relatividad de Galileo, pues en tales sistemas las leyes de la mecánica serán totalmente equivalentes.

La homogeneidad del espacio y el tiempo de un sistema inercial significa que la Lagrangiana de una partícula que se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme no puede contener explícitamente sus coordenadas de posición X_i ni el tiempo t; es decir L será sólo función de la velocidad $\vec{v}$. Puesto que el espacio es isótropo, la Lagrangiana no puede depender tampoco de la dirección del vector $\vec{v}$; por lo tanto será función sólo de su valor absoluto, es decir, de su cuadrado.

$$L = L\,(v^2) \qquad (10)$$

Consideremos un sistema de referencia K' que se mueve con la velocidad infinitesimal $\vec{\epsilon}$ con respecto a K' por lo tanto la velocidad de una partícula libre referida al sistema K' será

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\epsilon}$$

Pero como K y K' son físicamente equivalentes las lagrangianas de la partícula aislada se relacionarán por:

$$L' = L + \frac{d}{dt}\, g\,(X_i, t) \qquad (11)$$

siendo g una función derivable arbitraria de las coordenadas y el tiempo. Observemos que la ecuación de Lagrange no tiene por qué variar,

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'dt = \int_{t_1}^{t_2} Ldt + g\,[X_i(t_2), t_2] - g\,[X_i(t_1), t_1]$$

los últimos términos son constantes, y cualquier variación de la acción conlleva a

$$\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} Ldt = 0$$

De la ecuación (10) puede decirse:

$$L(v'^2) = L(v^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{\epsilon}) \qquad (12)$$

en donde se ha despreciado ϵ^2 por pequeña. Desarrollando (12) por series de potencias, despreciando las diferenciales de ϵ de orden superior

$$L(v'^2) = L(v^2) + 2\vec{v}\cdot\vec{\epsilon}\,\frac{\partial L}{\partial v^2} \qquad (13)$$

Para que $L(v'^2)$ y $L(v^2)$ sean físicamente equivalentes el último término de la derecha de (13) debe ser, de acuerdo con (11), una derivada total con respecto al tiempo. Esto exige que $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ sea independiente de la velocidad, con lo cual

$$L = a\,v^2$$

A la magnitud a se la llama ½ m, siendo m la masa de la partícula. Así la Lagrangiana de una partícula libre se la escribe

$$L = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \qquad (14)$$

que no es sino la energía cinética de la partícula. Como la ecuación de Lagrange no se modifica al multiplicar al Lagrangiano por una constante, el hacer $a = ½\, m$ equivale a definir las unidades mecánicas en el que se expresarán las magnitudes físicas de interés. En general, para cuando existe presente una energía potencial de interacción V, el Lagrangiano se escribe como

$$L = T - V \qquad (14')$$

4.— INTERACCION SOBRE UN SISTEMA AISLADO.

Consideremos a nuestra partícula libre (o un sistema aislado, que es lo mismo), que se mueve entre dos instantes de tiempo fijos t_1 y t_2, pero de tal forma que cuando $t = t_2$ interactuó con el sistema, quitándole de su trayectoria inicial a otra infinitesimalmente próxima, como señala la figura 2.

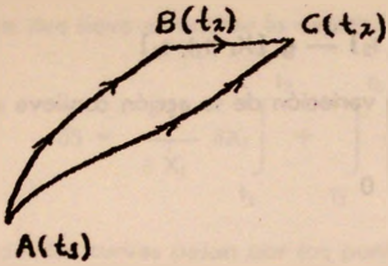

FIG. 2.—Interacción sobre un sistema aislado en el instante $t = t_2$.

¿Qué magnitud de qué variable física fue necesario dar al sistema para que desde $t = t_2$ en lo sucesivo comience a evolucionar si como desde **un comienzo** se hubiese movido sobre la segunda curva?

La ecuación (8) nos indica:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1}\,\delta X_1 \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} \right\} \delta X_1\, dt$$

El segundo término de la derecha del segundo miembro de la ecuación debe ser cero, pues corresponde a la evolución del sistema **libre** en cualquiera de las dos trayectorias **reales AB o AC.** Se ve claramente que cuando interactuó con el sistema intercambió acción en la magnitud.

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1}\,\delta X_1 \Big|\ t = t_2\ ,\ \delta X_1\,(t_1) = 0 \qquad (15)$$

¿Qué significa todo esto? Que la acción es una magnitud que se conserva entre dos instantes de tiempos fijos para un sistema aislado, por lo cual para la evolución temporal del sistema entre esos dos instantes de tiempo el punto representativo evoluciona por aquella curva por la cual la acción sea la disponible por el sistema para ese lapso de tiempo. Y para cuando el sistema deja de ser aislado en un instante dado, en ese momento el sistema gana o pierde una magnitud dada por (15), es decir intercambia **acción**, de allí la razón lógica de la palabra "interacción" de los sistemas.

Se puede ver de (14) que $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} = m\,\dot{X}_1 = p$ por lo tanto de (15)

$$p = \frac{\partial S}{\partial X_1} \qquad (16)$$

es el impulso intercambiado en el momento de la interacción, y es así como se lo define.

5.— LA ECUACION DE HAMILTON-JACOBI.

Hay una cuestión de interés adicional. La ecuación (9), por ejemplo viene del hecho de que S es constante para una trayectoria limitada por dos instantes de tiempo fijos; pero qué sucede cuando considero a los intervalos de tiempo variables y a los instantes de tiempo que fijan los extremos de una trayectoria variables. ¿Cómo varía la acción? Para contestar esta pregunta, definamos la función Hamiltoniana del Sistema

$$H = H(X_i, p_i, t) \tag{17}$$

que es otra función de estado dinámico, pero dependiendo del impulso y no de la velocidad como lo hacía el Lagrangiano. Su definición precisa viene dada desde el siguiente procedimiento:

Sea $L = L(X_i, \dot{X}_i, t)$ y derivando con respecto al tiempo.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial X_i}\dot{X}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i}\ddot{X}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

de la ecuación de Lagrange $\dfrac{\partial L}{\partial X_i} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} = \dot{p}_i$

$$\frac{dL}{dt} = \dot{p}_i\dot{X}_i + p_i\ddot{X}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

y finalmente,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}(L - p_i\dot{X}_i)$$

Se define al Hamiltoniano por $H = p_i\dot{X}_i - L$ (18)

de modo que se cumplirá de la relación anterior

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{19}$$

Y se ve que cuando el Lagrangiano no es función del tiempo, es decir para cuando el tiempo es homogéneo, $\dfrac{dH}{dt} = 0$ y H se conserva en el tiempo. Para ese caso,

$$H = p_i\dot{X}_i - L = T + V = \text{const.} \tag{20}$$

El Hamiltoniano coincide con la energía total del sistema.

Para trayectorias de límites variables, es obvio que la acción deba ser una función de la trayectoria a seguirse y del tiempo. Como la trayectoria del punto representativo depende de las coordenadas X_i de las partículas, en general

$$S = S(X_i, t) \tag{21}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial X_i}\dot{X}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{21'}$$

$$\text{Pero } S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \Rightarrow L \frac{dS}{dt} \tag{22}$$

considerando (16) y (22) en (21')

$$L = p_i\dot{X}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{23}$$

y recordando (18) $\frac{\partial S}{\partial t} + p_i\dot{X}_i - L = 0$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

Puesto que $H = H(X_i, p_i, t)$ y por (16)

$$H\left(X_i, \frac{\partial S}{\partial X_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{23'}$$

ecuación a la que se denomina de Hamilton-Jacobi, nos indica la variación de la acción en el tiempo, y es una versión segunda para formular un problema mecánico. Nótese que es una ecuación diferencial parcial de primer orden para la acción. Una vez resuelta se puede conocer el Hamiltoniano y de allí calcular las magnitudes físicas de interés a través de las ecuaciones canónicas de Hamilton. Para encontrarlas obsérvese que de

$$p_i\dot{X}_i - L(X_i, \dot{X}_i, t) = H(X_i, p_i, t)$$

$$\frac{\partial X}{\partial X_i}dX_j + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_j + \frac{\partial H}{\partial t}dt = \dot{X}_i dp_i + p_i d\dot{X}_i - \frac{\partial L}{\partial X_i}dX_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i}d\dot{X}_j - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

Como $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i}$ y $p_i \frac{\partial L}{\partial X_i}$; Entonces,

$$\frac{\partial H}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \dot{X}_j dp_i + \dot{p}_i dX_j - \dot{p}_j dX_i - \dot{p}_i dX_j + \ldots$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} dt = \dot{X}_i dp_i - \dot{p}_j dX_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\text{entonces} \quad \frac{\partial H}{\partial X_i} = -\dot{p}_i \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{X}_i \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (24)$$

que son las ecuaciones buscadas.

6.—PRINCIPIO DE MINIMA ACCION DE MAUPERTUIS.

Consideramos que existe un campo de fuerzas sobre un sistema de partículas, por lo tanto habrá un intercambio de cantidad de movimiento dado por:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial X_i}$$

de la última expresión podemos decir que,

$$S = \int_{X_0}^{X_2} p_i dX_i$$

siendo X_0 e X_i dos puntos representativos del espacio de configuración que los consideramos fijos, y queremos encontrar cuál es la trayectoria del punto representativo del sistema de partículas para que enlace los dos puntos dados. Así pues, si bien los puntos X_0 e X_i son fijos, el estado y la configuración del sistema de partículas y el campo de fuerzas en conjunto pueden variar en el tiempo. Un punto P de la trayectoria en el instante t se transforma en un punto P' de la nueva trayectoria en el instante $t + \Delta t$ como indica la Figura adjunta para dos puntos representativos q_1 y q_2 con la correspondencia

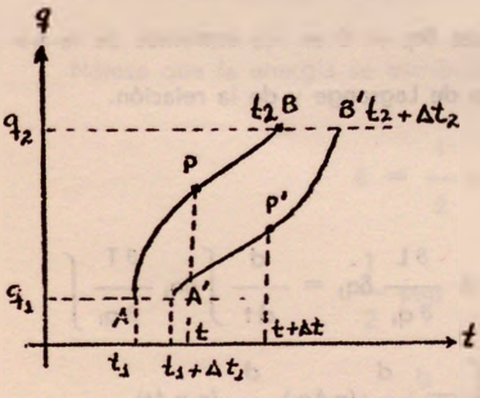

FIG. 3.—Ilustración de la variación Δ.

$$q_i + q_i' = q_j + \Delta q_j$$

$$q_i' = q_i + \delta q_j + \dot{q}_j \Delta t$$

Puesto que los puntos en el extremo de la trayectoria permanecen fijos para ellos $\Delta q_i = 0$

La variación Δ de una función $f = f \ (q_i, q_j, t)$ está dado por:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \Delta \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q_i} \left[\delta q_i + \dot{q}_i \Delta t \right] + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \left[\delta \dot{q}_i + \ddot{q}_i \Delta t \right] + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \right\} \Delta t$$

$$\Delta f = \delta f + \frac{df}{dt} \Delta t \qquad (26)$$

es decir hay una identidad de operadores,

$$\Delta = \delta + \Delta t \frac{d}{dt} \qquad (27)$$

Consideraremos la variación Δ de la función de Hamilton

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

$$\Delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + L \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}, \text{ o lo que es lo mismo}$$

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \, dt + L \Delta t \right|_{t_1}^{t_2}$$

En este caso $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt$ no se anula pues $\delta q_i \neq 0$ en los extremos de la trayectoria. De las ecuaciones de movimiento de Lagrange y de la relación.

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left| \delta q_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right|$$

$$= \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) = \frac{d}{dt} \left| p_i \left(\Delta q_i - \dot{q}_j \Delta t \right) \right| = \frac{d}{dt} (p_i \Delta q_i) - \frac{d}{dt} (p_j \dot{q}_j \Delta t)$$

Así pues,

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(p_i A q_i) - \frac{d}{dt}(p_j \dot{q}_j \Delta t)\, dt + L\Delta t \int_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta S = p_i \Delta q_i \int_{t_1}^{t_2} - p_j \dot{q}_j \Delta t \int_{t_1}^{t_2} + L\Delta t \int_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta S = - H\Delta t \int_{t_1}^{t_2} \qquad (28)$$

Si restringimos nuestro estudio a sistemas para los cuales, $\partial H/\partial t = 0$ y a variaciones para las cuales H permanece constante, entonces:

$$H\Delta t \int_{t_1}^{t_2} = \Delta \int_{t_1}^{t_2} H dt$$

$$\Delta S = - \Delta \int_{t_1}^{t_2} H dt$$

$$\Delta S = - \Delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - L)\, dt$$

$$\Delta S = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt - \Delta \int_{t_1}^{t_2} P_i \dot{q}_i dt$$

$$\text{Por lo tanto } \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = 0 \qquad (29)$$

Se lo conoce como principio de mínima acción de Maupertuis.

Nótese que la energía se escribirá como $E = \frac{1}{2} p_i \dot{q}_i + U$

$$E = \frac{1}{2} p_i \dot{q}_i + V \quad , \quad \text{Luego}$$

$$\frac{1}{2} p_i \dot{q}_i = E - V = T$$

y

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0$$

y si no actúa ninguna fuerza externa sobre el sistema llegamos a que T = cons. y se cumplirá

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt = 0$$

$$\Delta (t_2 - t_1) = 0 \tag{30}$$

lo cual expresa que entre todas las trayectorias posibles entre dos puntos, compatibles con la conservación de la energía, el sistema sigue aquella por la cual el tiempo de tránsito es extremal. Aquí hay un punto común entre la mecánica y la óptica geométrica que denomina a (30) como el principio de Fermat, y nos sugiere que la Mecánica Clásica corresponde a la óptica geométrica límite de un movimiento ondulatorio.

El principio de mínima acción de Maupertuis no es sino una conclusión lógica del principio de Hamilton, y no una formulación independiente de la afirmación sobre el carácter objetivo del mundo. Cualquier otro principio variacional de la Física tendrá este carácter.

BIBLIOGRAFIA

LANDAU y LIFSHITZ, Física Teórica, Mecánica. Editorial Reverté S.A. 1965.

HERBERT GOLDSTEIN. Mecánica Clásica. Editorial Aguilar. 1966.

BECHERT y GERTHSEN. Física Atómica, Volumen 3. Edit. U.T.E.H.A. México, 1962.

SOMMERFELD, Lectures on Teoretical Physics (Vols. I, II y III). Academic Prsse, New York, 1952.

FEYMAN/LEICHTON/SANDS. The Feyman Lectures on Physics, Volumen 2. Fondo Educativo Interamericano, S.A., 1971.

L. ELSGOLTZ, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional. Edit. MIR. Moscú. 1969.